Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. М. Зупник, $SU(4)$ -гармоническое суперпространство и суперсимметричная калибровочная теория, *ТМФ*, 2015, том 184, номер 2, 269–289

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8754>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.166.219.16

26 апреля 2023 г., 12:54:53

© 2015 г.

Б. М. Зупник*

$SU(4)$ -ГАРМОНИЧЕСКОЕ СУПЕРПРОСТРАНСТВО И СУПЕРСИММЕТРИЧНАЯ КАЛИБРОВОЧНАЯ ТЕОРИЯ

Рассматривается формализм гармонического суперпространства в $N = 4$ суперсимметрии, использующий $SU(4)/SU(2) \times SU(2) \times U(1)$ -гармоники, который ранее применялся в абелевой калибровочной теории. Предложено преобразование неабелевых связей в стандартном $N = 4$ суперпространстве в суперполевые уравнения для двух основных аналитических суперполей: независимой напряженности W размерности 1 и безразмерного гармонического 4-препотенциала V , имеющих $U(1)$ -заряд, равный 2. Эти уравнения связи I явно зависят от грасмановых координат θ , хотя они ковариантны относительно необычных преобразований $N = 4$ суперсимметрии. Компонентное разложение суперполевых уравнений I порождает известные уравнения для физических полей $N = 4$ супермультиплета, вспомогательные поля исчезают или выражаются через физические поля на массовой поверхности. В гармоническом формализме $N = 4$ суперкалибровочной теории вне массовой поверхности построено калибровочно-инвариантное действие $A(W, V)$ для двух неограниченных неабелевых аналитических суперполей W и V , это действие содержит тета-множители в каждом члене, оно инвариантно относительно группы автоморфизмов $SU(4)$ и масштабных преобразований. На уровне компонентных полей в этой модели возникает взаимодействие двух бесконечномерных $N = 4$ супермультиплетов с участием физических и вспомогательных полей. Действие $A(W, V)$ порождает аналитические уравнения движения II, альтернативные суперполевым связям I. Оба множества уравнений дают эквивалентные уравнения для физических компонентных полей $N = 4$ калибровочного супермультиплета. Построено нелинейное эффективное взаимодействие абелева гармонического суперполя W .

Ключевые слова: гармоническое суперпространство, расширенная суперсимметрия, теория Янга–Миллса.

DOI: 10.4213/tmf8754

1. ВВЕДЕНИЕ

Суперполевые связи для $N = 3, 4$, $D = 4$ калибровочных теорий рассматривались в соответствующих суперпространствах с координатами x^m , θ_k^α , $\bar{\theta}^{k\dot{\alpha}}$ [1], где индекс k описывает спинорное представление $SU(3)$ или $SU(4)$ групп автоморфизмов этих

*Объединенный институт ядерных исследований, Дубна, Московская обл., Россия

суперсимметрий. Было показано, что связи для суперполевых напряженностей W^{kl} порождают уравнения движения.

Мы используем метод гармонического суперпространства (ГС) в суперсимметричных калибровочных теориях и супергравитации [2]. ГС в $N = 2$ и $N = 3$ суперкалибровочных теориях позволяют преобразовать суперполевые условия связи в условия интегрируемости, которые гарантируют ковариантное сохранение грассмано-аналитических представлений. Важным достижением этого метода является построение немассового суперполевого формализма $N = 3$ суперсимметричной теории Янга–Миллса, использующего три сопряженные пары $SU(3)$ -гармоник u_i^1 , u_i^2 , u_i^3 и u_i^1 , u_i^2 , u_i^3 , описывающих однородное пространство $SU(3)/U(1) \times U(1)$ [3]. Основные грассмано-аналитические суперполя (препотенциалы) этого формализма V_2^1 , V_3^2 , V_3^1 содержат бесконечное число компонентных немассовых полей. Действие типа Черна–Саймонса в $N = 3$ ГС соответствует уравнениям нулевой кривизны для суперполевых напряженностей. ГС-преобразование в этой теории связывает уравнения движения в ГС с суперполевыми связями в обычном $N = 3$ суперпространстве. Дальнейшее развитие $N = 3$ теории рассматривалось в работах [4]–[8]. Суперполевые напряженности $N = 3$ теории выражаются через соответствующие препотенциалы [6]. Классические уравнения движения $N = 3$ калибровочной теории обладают $N = 4$ суперсимметрией [7], однако она не сохраняется вне массовой поверхности.

ГС для $N = 4$ суперсимметрии изучались во многих работах [9]–[19]. В работе [10] описывается твисторно-гармоническое суперпространство, основанное на бозонных спинорных гармониках группы Лоренца по аналогии с твисторной интерпретацией $N \geq 3$ теории Янга–Миллса [11]. Остается невыясненной связь этого нестандартного суперполевого описания с полевыми взаимодействиями вне массовой поверхности в обычном пространстве Минковского. Как правило, различные гармонические суперполевые конструкции используются для описания коротких $N = 4$ абелевых супермультиплетов на массовой поверхности [12]–[15]. ГС использует $USp(4)$ -гармоники, которые не гарантируют явной $SU(4)$ -симметрии [17]. Ограниченные короткие суперполя различных гармонических формализмов используются в работах [18] для описания эффективных нелинейных взаимодействий. Действие $N = 4$ суперсимметричной теории с центральными зарядами в гармоническом $USp(4)$ -формализме было выражено через ограниченную суперполевою напряженность [19].

Основная задача настоящей работы связана с исследованием неабелевой $N = 4$ калибровочной теории в формализме ГС, построением классических уравнений движения для гармонических суперполей этой теории, эквивалентных компонентным полевым уравнениям движения $N = 4$ теории Янга–Миллса. Также мы изучаем возможные взаимодействия гармонических суперполей вне массовой поверхности и соответствующие этим взаимодействиям уравнения движения. Исследуются компонентные полевые представления этих суперполевых взаимодействий, которые содержат бесконечное число вспомогательных полей.

Однородное пространство $\mathcal{U}_8 = SU(4)/H$, $H = SU(2) \times SU(2) \times U(1)$, и соответствующие гармонические координаты u_k^{+a} , $u_k^{-\hat{a}}$ описаны в приложении А. Подробно рассмотрены $SU(4)$ -инвариантные гармонические производные и неприводимые гармонические комбинации в пространстве $\mathcal{U}_8$, имеющие индексы групп $SU(4)$ и H .

Приложение Б посвящено анализу $\mathcal{U}_8$ -аналитического ГС $\mathcal{H}(4+8|8)$. Мы анализируем правила сопряжения гармоник, спинорных координат, гармонических и спинорных производных и изучаем суперконформные преобразования в ГС. Соглашения и формулы из этих приложений широко используются в работе.

ГС $\mathcal{H}(4+8|8)$ применялось для описания суперполевого напряженности W^{++} в абелевой $N = 4$ калибровочной теории на массовой поверхности [12]–[14]. Мы исследуем неабелево обобщение этой конструкции в разделе 2. Предложено преобразование ковариантных производных $N = 4$ калибровочной теории в стандартном суперпространстве в ковариантные производные на массовой поверхности в ГС и построены соответствующие $N = 4$ условия интегрируемости, которые имеют более сложную структуру по сравнению с $N = 3$ условиями интегрируемости [3]. Наш формализм включает безразмерные аналитические калибровочные суперполя (4-препотенциалы) V_a^{++a} и независимое калибровочно-ковариантное суперполе W^{++} размерности 1. Нелинейное условие $SU(4)$ -самодуальности и дифференциальные условия связей для стандартной суперполевого напряженности W^{kl} автоматически решены в этом гармоническом формализме. Основной результат раздела 2 – построение калибровочно-ковариантных суперполевых уравнений связи I в ГС для суперполей W^{++} и V_a^{++a} , которые явно содержат грассмановы координаты и описывают динамику суперкалибровочной теории на массовой поверхности. Показано, что эти уравнения ковариантны относительно необычных преобразований $N = 4$ суперсимметрии. Разложение уравнений связи I на полевые компоненты порождает известные полевые уравнения $N = 4$ теории Янга–Миллса, все вспомогательные поля исчезают или выражаются через физические поля. Аналитические суперполевые уравнения связи раздела 2 не выведены из принципа наименьшего действия.

В разделе 3 рассматривается гармонический суперполевого формализм $N = 4$ неабелевой калибровочной теории вне массовой поверхности. Главный результат этого раздела – построение действия A независимых неограниченных аналитических суперполей W^{++} и V_a^{++a} , которое включает только первые гармонические производные калибровочных суперполей и инвариантно относительно неабелевой калибровочной группы и группы автоморфизмов $SU(4)$. Действие A представляет собой интеграл по аналитическому ГС, оно явно зависит от грассмановых координат θ и нарушает $N = 4$ суперсимметрию. Уравнения движения II A -модели получены варьированием действия по независимым аналитическим суперполям W^{++} и V_a^{++a} . Суперполевые уравнения движения II формально эквивалентны некоторым комбинациям суперполевых связей I из раздела 2 с нильпотентными тета-множителями.

Компонентные поля бесконечномерных $N = 4$ супермультиплетов W^{++} и V_a^{++a} возникают в грассмановых и гармонических разложениях суперполей. Компонентный вариант действия A содержит физические калибровочные, скалярные и спинорные поля и бесконечное число вспомогательных полей. Уравнения движения A -модели связывают физические поля $N = 4$ калибровочного супермультиплета с некоторым набором вспомогательных полей, бесконечное число дополнительных вспомогательных полей исчезает на массовой поверхности. После исключения вспомогательных компонентных полей в действии восстанавливается $N = 4$ суперсимметрия, соответственно, уравнения для физических полей ковариантны относительно $N = 4$ суперсимметрии.

Раздел 4 посвящен построению $N = 4$ суперсимметричных нелинейных взаимодействий абелева суперполя W^{++} по аналогии с $N = 3$ абелевым эффективным взаимодействием [6]. Показано, что вспомогательные поля W^{++} суперполя играют важную роль в построении нелинейных эффективных взаимодействий физических $N = 4$ полей, которые описывают возможные квантовые поправки в этой модели.

В разделе 5 мы изучаем явно суперсимметричное взаимодействие S калибровочного препотенциала V_a^{++a} в ГС и пытаемся использовать S как действие некоторой калибровочной теории. Мы нашли противоречия в этой S -модели, которая содержит взаимодействия стандартного $N = 4$ калибровочного супермультиплета с дополнительными скалярными, векторными, тензорными и спинорными полями без необходимых дополнительных калибровочных симметрий.

2. ГАРМОНИЧЕСКИЕ СУПЕРПОЛЯ НА МАССОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ В $N = 4$ КАЛИБРОВОЧНОЙ ТЕОРИИ

2.1. $N = 4$ суперполевые связи в центральном базисе. Суперполевые связи $N = 4$ теории Янга–Миллса описываются следующими уравнениями [1]:

$$\begin{aligned} \{\nabla_\alpha^k, \nabla_\beta^j\} &= \varepsilon_{\alpha\beta} W^{kj}, & \{\bar{\nabla}_{k\dot{\alpha}}, \bar{\nabla}_{j\dot{\beta}}\} &= \varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \bar{W}_{kj}, \\ \{\nabla_\alpha^k, \bar{\nabla}_{j\dot{\beta}}\} &= -2i\delta_j^k \nabla_{\alpha\dot{\beta}}, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где ∇ – спинорные и векторные ковариантные производные в центральном базисе (ЦБ)

$$\begin{aligned} \nabla_\alpha^k &= D_\alpha^k + A_\alpha^k(z), & \bar{\nabla}_{k\dot{\alpha}} &= \bar{D}_{k\dot{\alpha}} + \bar{A}_{k\dot{\alpha}}(z), \\ \nabla_{\alpha\dot{\alpha}} &= \partial_{\alpha\dot{\alpha}} + A_{\alpha\dot{\alpha}}(z), \end{aligned} \quad (2.2)$$

A_α^k и $\bar{A}_{k\dot{\alpha}}$ – неабелевы спинорные суперполя, а $N = 4$ спинорные производные D_α^k и $\bar{D}_{k\dot{\alpha}}$ определены в приложении Б. Мы используем суперполевую напряженность W^{kj} , которая в ЦБ имеет вид

$$W^{kj} = \frac{1}{2} \varepsilon^{\beta\alpha} (D_\alpha^k A_\beta^j + D_\beta^j A_\alpha^k + \{A_\alpha^k, A_\beta^j\}), \quad (2.3)$$

и сопряженную суперполевую напряженность $\bar{W}_{kj}$. Дополнительное условие $SU(4)$ -самодуальности имеет вид нелинейного дифференциального условия для A_α^k и $\bar{A}_{k\dot{\alpha}}$

$$\bar{W}_{ij} = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijkl} W^{kl}. \quad (2.4)$$

Калибровочные преобразования в ЦБ используют антиэрмитовы суперполевые параметры $C(z)$:

$$\delta A_\alpha^k = -\nabla_\alpha^k C, \quad \delta \bar{A}_{k\dot{\alpha}} = -\bar{\nabla}_{k\dot{\alpha}} C, \quad \delta W^{kl} = [C, W^{kl}]. \quad (2.5)$$

Тождества Бьянки размерности $3/2$ порождают уравнения движения для W^{ij} в ЦБ [1]

$$\begin{aligned} 2\nabla_\gamma^k W^{ij} - \nabla_\gamma^i W^{jk} - \nabla_\gamma^j W^{ki} &= 0, \\ \bar{\nabla}_{k\dot{\alpha}} W^{ij} + \frac{1}{3} \delta_k^j \bar{\nabla}_{l\dot{\alpha}} W^{li} - \frac{1}{3} \delta_k^i \bar{\nabla}_{l\dot{\alpha}} W^{lj} &= 0 \end{aligned} \quad (2.6)$$

и сопряженные уравнения для $\bar{W}_{kj}$.

2.2. Гармоническая интерпретация неабелевых суперполевых связей.

Мы используем $\mathcal{U}_8$ -гармоники $u_k^{+a}, u_k^{-\hat{a}}, \bar{u}_a^{-k}, \bar{u}_{\hat{a}}^{+k}$ из приложения А и рассматриваем гармонические проекции $N = 4$ связей (2.1)

$$\begin{aligned} \{\mathbf{D}_\alpha^{+a}, \mathbf{D}_\beta^{+b}\} &= \frac{1}{2} \varepsilon_{\alpha\beta} \varepsilon^{ba} \mathbf{W}^{++}, \\ \{\bar{\mathbf{D}}_{\dot{\alpha}\dot{\alpha}}^+, \bar{\mathbf{D}}_{\dot{\beta}\dot{\beta}}^+\} &= \frac{1}{2} \varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \varepsilon_{\dot{a}\dot{b}} \bar{\mathbf{W}}^{++} = -\frac{1}{2} \varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \varepsilon_{\dot{a}\dot{b}} (\mathbf{W}^{++})^\dagger = \frac{1}{2} \varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \varepsilon_{\dot{a}\dot{b}} \mathbf{W}^{++}, \\ \{\mathbf{D}_\alpha^{+a}, \bar{\mathbf{D}}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}^+\} &= 0, \end{aligned} \quad (2.7)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_\alpha^{+a} &= u_k^{+a} \nabla_\alpha^k = D_\alpha^{+a} + A_\alpha^{+a}, & \bar{\mathbf{D}}_{\dot{\alpha}\dot{\alpha}}^+ &= \bar{u}_{\hat{a}}^{+k} \bar{\nabla}_{k\dot{\alpha}} = \bar{D}_{\dot{\alpha}\dot{\alpha}}^+ + \bar{A}_{\dot{\alpha}\dot{\alpha}}^+, \\ \mathbf{W}^{++} &= \varepsilon_{ab} u_k^{+a} u_l^{+b} W^{kl}, & \bar{\mathbf{W}}^{++} &= \varepsilon^{\hat{a}\hat{b}} \bar{u}_{\hat{a}}^{+k} \bar{u}_{\hat{b}}^{+l} \bar{W}_{kl}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Используя свойства гармоник (A.14) и (A.15), мы свяжем соотношение самодуальности (2.4) с гармоническим условием антиэрмитовости

$$[(\mathbf{W}^{++})_B^A]^\sim = -(\mathbf{W}^{++})_A^B, \quad A, B = 1, 2, \dots, n. \quad (2.9)$$

Мы анализируем суперполевые уравнения для суперполей $A_\alpha^{+a}, \bar{A}_{\dot{\alpha}\dot{\alpha}}^+$ и $\mathbf{W}^{++}$ с использованием гармонических уравнений

$$\begin{aligned} [\partial_{\hat{a}}^{++a}, \mathbf{D}_\alpha^{+b}] &= 0, & [\partial_{\hat{a}}^{++a}, \bar{\mathbf{D}}_{\dot{\beta}\dot{\beta}}^+] &= 0, & [\partial_{\hat{a}}^{++a}, \partial_b^{++b}] &= 0, \\ \partial_{\hat{a}}^{++a} \mathbf{W}^{++} &= 0, & \partial_{\hat{a}}^{++a} \bar{\mathbf{W}}^{++} &= 0, \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$\mathbf{D}_\alpha^{+a} \mathbf{W}^{++} = \bar{\mathbf{D}}_{\dot{\alpha}\dot{\alpha}}^+ \mathbf{W}^{++}, \quad (2.11)$$

которые очевидны в ЦБ.

Гармонизованные $N = 4$ связи (2.7) имеют более сложный вид по сравнению с грассмановыми условиями интегрируемости в $N = 3$ калибровочной теории в соответствующем суперпространстве [2], [3], которые не содержат суперполевых напряженностей:

$$u_i^1 u_j^1 \{\nabla_\alpha^i, \nabla_\beta^j\} = 0, \quad u_3^i u_3^j \{\bar{\nabla}_{i\dot{\alpha}}, \bar{\nabla}_{j\dot{\beta}}\} = 0, \quad u_k^1 u_3^j \{\nabla_\alpha^k, \bar{\nabla}_{j\dot{\beta}}\} = 0. \quad (2.12)$$

Спинорные производные $D_\alpha^{+a}, \bar{D}_{\dot{\alpha}\dot{\alpha}}^+$ и гармоническая производная $D_{\hat{a}}^{++a}$ в аналитическом базисе (АБ) рассматриваются в приложении Б. В неабелевой теории мы определяем эрмитов калибровочный аналитический 4-препотенциал

$$(V_{\hat{b}}^{++a})_A^B = [(V_{\hat{a}}^{++b})_B^A]^\sim, \quad D_\alpha^{+c} V_{\hat{b}}^{++a} = \bar{D}_{\dot{\alpha}\dot{\alpha}}^+ V_{\hat{b}}^{++a} = 0 \quad (2.13)$$

в присоединенном представлении калибровочной группы $SU(n)$

$$\delta_\lambda V_{\hat{b}}^{++a} = -D_{\hat{b}}^{++a} \lambda + [\lambda, V_{\hat{b}}^{++a}], \quad (2.14)$$

где λ_A^B – аналитические суперполевые калибровочные параметры

$$\lambda_A^B = -(\lambda_B^A)^\sim.$$

Чисто аналитическая гармоническая ковариантная производная определена вне массовой поверхности:

$$\mathcal{D}_{\hat{b}}^{++a} = D_{\hat{b}}^{++a} + V_{\hat{b}}^{++a}. \quad (2.15)$$

Коммутатор аналитических ковариантных гармонических производных

$$[\mathcal{D}_{\hat{a}}^{++a}, \mathcal{D}_{\hat{b}}^{++b}] = \frac{1}{2} F^{(+4)ab} \varepsilon_{\hat{a}\hat{b}} + \frac{1}{2} \hat{F}_{\hat{a}\hat{b}}^{(+4)} \varepsilon^{ba} \quad (2.16)$$

выражается через два безразмерных аналитических ковариантных суперполя

$$\begin{aligned} \hat{F}_{\hat{a}\hat{b}}^{(+4)} &= \varepsilon_{ab} (D_{\hat{a}}^{++a} V_{\hat{b}}^{++b} - D_{\hat{b}}^{++b} V_{\hat{a}}^{++a} + [V_{\hat{a}}^{++a}, V_{\hat{b}}^{++b}]) = \hat{F}_{\hat{b}\hat{a}}^{(+4)}, \\ F^{(+4)ab} &= \varepsilon^{\hat{b}\hat{a}} (D_{\hat{a}}^{++a} V_{\hat{b}}^{++b} - D_{\hat{b}}^{++b} V_{\hat{a}}^{++a} + [V_{\hat{a}}^{++a}, V_{\hat{b}}^{++b}]) = -(\hat{F}_{\hat{a}\hat{b}}^{(+4)})^\dagger, \\ (D_{\hat{a}}^{++a} V_{\hat{b}}^{++b})^\dagger &= -D_{\hat{a}}^{++a} V_{\hat{b}}^{++b}. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Мы рассмотрим ГС-преобразование из ЦБ в АБ

$$\mathbf{D}_\alpha^{+a} = e^{-v} \nabla_\alpha^{+a} e^v, \quad \bar{\mathbf{D}}_{\dot{\alpha}\dot{a}}^+ = e^{-v} \bar{\nabla}_{\dot{\alpha}\dot{a}}^+ e^v, \quad \mathbf{W}^{++} = e^{-v} W^{++} e^v, \quad (2.18)$$

где $v(z, u)$ – антиэрмитова суперполевая матрица преобразования на массовой поверхности, а W^{++} – гармоническое суперполе в АБ. Мы используем $N = 4$ нековариантное представление для спинорных ковариантных производных на массовой поверхности в АБ

$$\nabla_\alpha^{+a} = D_\alpha^{+a} - \frac{1}{4} \theta_\alpha^{-a} W^{++}, \quad \bar{\nabla}_{\dot{\alpha}\dot{a}}^+ = \bar{D}_{\dot{\alpha}\dot{a}}^+ + \frac{1}{4} \bar{\theta}_{\dot{\alpha}\dot{a}}^- W^{++} = (\nabla_\alpha^{+a})^\dagger, \quad (2.19)$$

где W^{++} – независимое аналитическое антиэрмитово ковариантное суперполе

$$\delta_\lambda W^{++} = [\lambda, W^{++}], \quad (W^{++})^\dagger = -W^{++}. \quad (2.20)$$

По аналогии со связями (2.7) в ЦБ эти спинорные ковариантные производные в АБ удовлетворяют связям

$$\begin{aligned} \{\nabla_\alpha^{+a}, \nabla_\beta^{+b}\} &= \frac{1}{2} \varepsilon_{\alpha\beta} \varepsilon^{ba} W^{++}, \quad \{\bar{\nabla}_{\dot{\alpha}\dot{a}}^+, \bar{\nabla}_{\dot{\beta}\dot{b}}^+\} = \frac{1}{2} \varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \varepsilon_{\dot{b}\dot{a}} W^{++}, \\ \{\nabla_\alpha^{+a}, \bar{\nabla}_{\dot{\beta}\dot{b}}^+\} &= 0, \end{aligned} \quad (2.21)$$

где мы используем линейные соотношения

$$D_\beta^{+b} W^{++} = \bar{D}_{\dot{b}\dot{\alpha}}^+ W^{++} = 0, \quad D_\alpha^{+a} \theta_\beta^{-b} = -\varepsilon_{\alpha\beta} \varepsilon^{ba}, \quad \bar{D}_{\dot{\alpha}\dot{a}}^+ \bar{\theta}_{\dot{b}\dot{\beta}}^- = \varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \varepsilon_{\dot{b}\dot{a}}. \quad (2.22)$$

Мы определим гармоническую ковариантную производную на массовой поверхности в АБ

$$e^v \partial_{\hat{a}}^{++a} e^{-v} = \nabla_{\hat{a}}^{++a} = D_{\hat{a}}^{++a} + V_{\hat{a}}^{++a} - \frac{1}{4} [(\theta^{-a} \theta_{\hat{a}}^+) + (\bar{\theta}_{\hat{a}}^- \bar{\theta}^{+a})] W^{++}, \quad (2.23)$$

которая содержит аналитический препотенциал и эрмитов неаналитический член, явно зависящий от грассмановых координат θ в соответствии с представлением (2.19). Мы видим, что структура гармонического преобразования в $N = 4$ калибровочной теории существенно отличается от соответствующего гармонического преобразования в $N = 3$ калибровочной теории [2].

По аналогии с тривиальными связями (2.10) в ЦБ проанализируем следующие связи в АБ:

$$[\nabla_{\hat{a}}^{++a}, \nabla_{\hat{\alpha}}^{+b}] = 0, \quad [\nabla_{\hat{a}}^{++a}, \bar{\nabla}_{\hat{b}\dot{\alpha}}^+] = 0, \quad [\nabla_{\hat{a}}^{++a}, \nabla_{\hat{b}}^{++b}] = 0, \quad (2.24)$$

используя соотношения

$$D_{\hat{a}}^{++a}\theta_{\alpha}^{-b} = \varepsilon^{ab}\theta_{\hat{a}\alpha}^{+}, \quad D_{\hat{a}}^{++a}\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}^{-} = -\varepsilon_{\hat{a}\dot{\alpha}}\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}^{+a}.$$

Нелинейные уравнения согласованности для этих связей (мы будем называть их уравнения I) имеют вид

$$\dim. 1 : \quad D_{\hat{a}}^{++a}W^{++} = D_{\hat{a}}^{++a}W^{++} + [V_{\hat{a}}^{++a}, W^{++}] = 0, \quad (2.25)$$

$$\dim. 0 : \quad E^{(+4)ab} = F^{(+4)ab} + (\bar{\theta}^{+a}\bar{\theta}^{+b})W^{++} = 0, \\ \hat{E}_{\hat{a}\hat{b}}^{(+4)} = \hat{F}_{\hat{a}\hat{b}}^{(+4)} + (\theta_{\hat{a}}^{+}\theta_{\hat{b}}^{+})W^{++} = 0, \quad (2.26)$$

и последние уравнения явно зависят от грассмановых координат. Эти уравнения связывают два аналитических суперполя различных размерностей на массовой поверхности, они описывают динамику $N = 4$ калибровочной теории в ГС.

Уравнения связи ковариантны относительно нестандартных $N = 4$ преобразований суперсимметрии

$$\delta_{\epsilon}W^{++} = [(\epsilon_k Q^k) + (\bar{\epsilon}^k \bar{Q}_k)]W^{++}, \\ \delta_{\epsilon}V_{\hat{a}}^{++a} = [(\epsilon_k Q^k) + (\bar{\epsilon}^k \bar{Q}_k)]V_{\hat{a}}^{++a} + \frac{1}{2}[(\epsilon^{-a}\theta_{\hat{a}}^{+}) + (\bar{\epsilon}_{\hat{a}}^{-}\bar{\theta}^{+a})]W^{++}, \\ \delta_{\epsilon}\hat{F}_{\hat{a}\hat{b}}^{(+4)} = \varepsilon_{ab}(D_{\hat{a}}^{++a}\delta_{\epsilon}V_{\hat{b}}^{++b} - D_{\hat{b}}^{++b}\delta_{\epsilon}V_{\hat{a}}^{++a}), \\ \delta_{\epsilon}\hat{E}_{\hat{a}\hat{b}}^{(+4)} = [(\epsilon_k Q^k) + (\bar{\epsilon}^k \bar{Q}_k)]\hat{E}_{\hat{a}\hat{b}}^{(+4)} + \\ + \frac{1}{2}\varepsilon_{ab}\{[(\epsilon^{-b}\theta_{\hat{b}}^{+}) + (\bar{\epsilon}_{\hat{b}}^{-}\bar{\theta}^{+b})]D_{\hat{a}}^{++a} - [(\epsilon^{-a}\theta_{\hat{a}}^{+}) + (\bar{\epsilon}_{\hat{a}}^{-}\bar{\theta}^{+a})]D_{\hat{b}}^{++b}\}W^{++}.$$

Используя компонентные разложения суперполей W^{++} и $V_{\hat{a}}^{++a}$ из раздела 3, мы можем анализировать уравнения (2.25) и (2.26) для физических и вспомогательных полей. В частности, полевые уравнения $N = 4$ супермультиплета эквивалентны суперполевым уравнениям (2.6) в ЦБ. Все вспомогательные поля в суперполях W^{++} и $V_{\hat{a}}^{++a}$ исчезают на массовой поверхности или выражаются через физические поля.

В абелевом случае суперполевые связи для суперполя W^{kl} (2.6) эквивалентны следующим линейным уравнения в ГС:

$$D_{\alpha}^{+a}W^{++} = \bar{D}_{\hat{a}\hat{\alpha}}^{+}W^{++} = 0, \quad D_{\hat{a}}^{++a}W^{++} = 0, \quad (2.28)$$

$$(W^{++})^{\sim} = -W^{++}. \quad (2.29)$$

Простое ГС-условие вещественности (2.29) использует гармонические условия

$$\frac{1}{2}\varepsilon^{ijkl}\varepsilon_{ab}u_i^{+a}u_j^{+b} = \varepsilon^{\hat{a}\hat{b}}\bar{u}_{\hat{a}}^{+k}\bar{u}_{\hat{b}}^{+l} = -(\varepsilon_{ab}u_k^{+a}u_l^{+b})^{\sim} \quad (2.30)$$

и гарантирует условие самодуальности (2.4).

Суперполевое уравнение $D_{\hat{a}}^{++a}W^{++} = 0$ в АБ дает свободные уравнения для физических компонентных полей в коротком аналитическом суперполевым решении w^{++} на массовой поверхности, которое содержит следующие структуры $N = 4$ калибровочного супермультиплета:

$$W^{++} \rightarrow w^{++} \sim U_{[kl]}^{++}\phi^{kl} - 4i\theta_{\hat{b}}^{+\alpha}\bar{\theta}_{\hat{b}}^{+b\dot{\alpha}}U_{[kl]}^{b\dot{b}}\partial_{\alpha\dot{\alpha}}\phi^{kl} + [\varepsilon^{\hat{b}\hat{c}}\theta_{\hat{b}}^{+\beta}\bar{u}_{\hat{c}}^{+k}\lambda_{k\beta} + \\ + i\Theta^{++\alpha\beta}\bar{\theta}^{+b\dot{\alpha}}\bar{u}_{\hat{b}}^{-k}\partial_{\alpha\dot{\alpha}}\lambda_{k\beta} + i\Theta^{++\alpha\beta}(\partial_{\alpha\dot{\alpha}}A_{\beta}^{\dot{\alpha}} + \partial_{\beta\dot{\alpha}}A_{\alpha}^{\dot{\alpha}}) - \text{к.с.}] + \dots, \quad (2.31)$$

где $\phi^{[kl]}$ – вещественное 6-компонентное скалярное поле, A_m – абелево калибровочное поле, $\lambda_{k\beta}$ – спинорное поле. Мы здесь используем обозначения гармонических и грассмановых полиномов из приложений А и Б. Подобные уравнения и решение для вещественного абелева аналитического суперполя W^{++} рассматривались ранее в работах [12]–[14].

Отметим, что приведенные выше уравнения связи в АБ не выведены из принципа наименьшего действия, гармоническое $N = 4$ преобразование (2.23) связывает ЦБ и АБ на массовой поверхности.

3. ДЕЙСТВИЕ СУПЕРКАЛИБРОВОЧНОЙ МОДЕЛИ В $N = 4$ ГС СУПЕРПРОСТРАНСТВЕ И КОМПОНЕНТНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ

3.1. Суперполевое действие с θ -зависимыми членами. Мы рассмотрим альтернативный гармонический суперполевым формализм $N = 4$ калибровочной теории вне массовой поверхности и построим калибровочно-инвариантное и $SU(4)$ -инвариантное действие (A -модель), включающее независимое аналитическое суперполе W^{++} и препотенциал $V_{\hat{a}}^{++a}$:

$$A(W, V) \sim \frac{1}{g^2} \int d^{(-8)} \zeta du \operatorname{Tr} \left\{ W^{++} \left[(\theta^{+\hat{a}} \theta^{+\hat{b}}) \hat{F}_{\hat{a}\hat{b}}^{(+4)} + (\bar{\theta}^{+a} \bar{\theta}^{+b}) F^{(+4)}_{ab} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{2} W^{++} (\Theta^{+4} + \bar{\Theta}^{+4}) \right] \right\}, \quad (3.1)$$

где g – константа связи. Действие A также инвариантно относительно преобразований группы Пуанкаре и масштабных преобразований. Каждый член действия A явно зависит от грассмановых координат θ_a^+ , $\bar{\theta}^{+a}$, поэтому $N = 4$ суперсимметрия нарушена.

Неограниченные аналитические $SU(n)$ -суперполя удовлетворяют условиям

$$[(W^{++})^A_B]^\sim = -(W^{++})^B_A, \quad [(V_{\hat{b}}^{++a})^A_B]^\sim = (V_{\hat{a}}^{++b})^B_A. \quad (3.2)$$

Варьирование действия по супер полю $V_{\hat{a}}^{++a}$ дает уравнение (мы будем называть его уравнение II)

$$\dim.0 : \quad [\varepsilon_{ab} (\theta^{+\hat{a}} \theta^{+\hat{b}}) + \varepsilon^{\hat{a}\hat{b}} (\bar{\theta}^{+a} \bar{\theta}^{+b})] \mathcal{D}_{\hat{b}}^{++b} W^{++} = 0, \quad (3.3)$$

которое пропорционально ковариантному уравнению (2.25) и содержит θ -зависимый множитель в квадратных скобках.

Варьируя A по W^{++} , мы получим уравнение (его мы тоже называем уравнением II)

$$\dim. -1 : \quad (\theta^{+\hat{a}} \theta^{+\hat{b}}) \hat{F}_{\hat{a}\hat{b}}^{(+4)} + (\bar{\theta}^{+a} \bar{\theta}^{+b}) F_{ab}^{(+4)} + W^{++} (\Theta^{+4} + \bar{\Theta}^{+4}) = \\ = (\theta^{+\hat{a}} \theta^{+\hat{b}}) \hat{E}_{\hat{a}\hat{b}}^{(+4)} + (\bar{\theta}^{+a} \bar{\theta}^{+b}) E_{ab}^{(+4)} = 0, \quad (3.4)$$

которое представляет собой комбинацию двух уравнений (2.26) с нильпотентными θ -коэффициентами.

Таким образом, эти уравнения II, полученные из действия A , неэквивалентны, но совместимы с уравнениями I (2.25), (2.26). Компонентные уравнения для физических полей эквивалентны в обоих случаях.

3.2. Компонентный анализ A -модели. Мы анализируем компонентное разложение мнимого аналитического абелева калибровочного параметра

$$\begin{aligned} \lambda(\zeta, u) = & ia(x_A) + U_l^k a_k^l(x_A) + \theta_{\hat{c}}^{+\alpha} u_k^{-\hat{c}} \beta_{\alpha}^k(x_A) + \bar{\theta}^{+c\dot{\alpha}} \bar{u}_c^{-k} \bar{\beta}_{k\dot{\alpha}}(x_A) + \\ & + (\theta_{\hat{b}}^+ \theta_{\hat{c}}^+) U_{(kl)}^{--(\hat{b}\hat{c})} d^{(kl)}(x_A) - (\bar{\theta}^{+b} \bar{\theta}^{+c}) \tilde{U}_{(bc)}^{(kl)} \bar{d}_{(kl)}(x_A) + \\ & + i\theta_{\hat{c}}^{+\alpha} \bar{\theta}^{+c\dot{\alpha}} U_{cl}^{--\hat{c}k} b_{k\alpha\dot{\alpha}}^l(x_A) + \Theta^{++\alpha\beta} U_{[kl]}^{--} c_{(\alpha\beta)}^{[kl]}(x_A) - \\ & - \bar{\Theta}^{++\dot{\alpha}\dot{\beta}} U_{[kl]}^{--} \bar{c}_{(\dot{\alpha}\dot{\beta})}^{[kl]}(x_A) + \dots, \end{aligned} \quad (3.5)$$

где высшие грассмановы и гармонические члены опущены и используются определения из приложений А и Б. Нетрудно рассмотреть компонентное разложение члена с гармонической производной $D_{\hat{a}}^{++a} \lambda$ (2.14) и построить калибровочное условие Весса–Зумина для препотенциала

$$(V_{\hat{a}}^{++a})_{\text{WZ}} = v_{\hat{a}}^{++a} + \mathcal{V}_{\hat{a}}^{++a}, \quad (3.6)$$

где $v_{\hat{a}}^{++a}$ содержит стандартный $N = 4$ супермультиплет $\phi^{[kl]}$, A_m , $\lambda_{k\alpha}$, $\bar{\lambda}_{\dot{\alpha}}^k$:

$$\begin{aligned} v_{\hat{a}}^{++a} = & -2\theta_{\hat{a}}^{+\alpha} \bar{\theta}^{+a\dot{\alpha}} A_{\alpha\dot{\alpha}} + \phi^{[kl]} [(\theta_{\hat{a}}^+ \theta_{\hat{c}}^+) U_{[kl]}^{a\hat{c}} + (\bar{\theta}^{+a} \bar{\theta}^{+c}) U_{c\hat{a}}^{[kl]}] + \\ & + (\theta_{\hat{a}}^+ \theta_{\hat{c}}^+) \bar{\theta}^{+a\dot{\alpha}} u_k^{-\hat{c}} \bar{\lambda}_{\dot{\alpha}}^k - (\bar{\theta}^{+a} \bar{\theta}^{+c}) \theta_{\hat{a}}^{+\alpha} \bar{u}_c^{-k} \lambda_{k\alpha}, \end{aligned} \quad (3.7)$$

а $\mathcal{V}_{\hat{a}}^{++a}$ включает бесконечное число дополнительных бозонных и фермионных компонентных полей. Отметим, что условие $(v_{\hat{a}}^{++a})^{\sim} = v_{\hat{a}}^{++a}$ дает вещественность векторного поля A_m и самодуальность скалярного поля $\phi^{[kl]} = (\varepsilon_{kl ij}/2) \phi^{[ij]}$ с использованием самодуальности нейтральной независимой гармоники $U_{[ij]}^{a\hat{a}}$ (A.12)

$$\phi^{[kl]} [(\theta_{\hat{a}}^+ \theta_{\hat{c}}^+) U_{[kl]}^{a\hat{c}} + (\bar{\theta}^{+a} \bar{\theta}^{+c}) U_{c\hat{a}}^{[kl]}] = \phi^{[kl]} (\theta_{\hat{a}}^+ \theta_{\hat{c}}^+) U_{[kl]}^{a\hat{c}} + \bar{\phi}_{[kl]} (\bar{\theta}^{+a} \bar{\theta}^{+c}) \tilde{U}_{\hat{a}c}^{[kl]}. \quad (3.8)$$

Вычислим стандартную физическую часть абелевой аналитической суперполевои напряженности $\hat{F}_{\hat{a}\hat{b}}^{+4}$:

$$\begin{aligned} \hat{f}_{\hat{a}\hat{b}}^{+4} = & \varepsilon_{ab} (D_{\hat{a}}^{++a} v_{\hat{b}}^{++b} + D_{\hat{b}}^{++a} v_{\hat{a}}^{++b}) = \\ = & 2i\varepsilon_{ab} \varepsilon^{\beta\alpha} (\theta_{\hat{b}}^+ \theta_{\hat{a}}^+) \bar{\theta}^{+b\dot{\beta}} \bar{\theta}^{+a\dot{\alpha}} (\partial_{\beta\dot{\beta}} A_{\alpha\dot{\alpha}} + \partial_{\beta\dot{\alpha}} A_{\alpha\dot{\beta}}) + \\ & + 2\varepsilon_{ab} (\theta_{\hat{a}}^+ \theta_{\hat{b}}^+) u_k^{+a} u_l^{+b} \phi^{[kl]} - 2i\varepsilon_{ab} (\theta_{\hat{b}}^+ \theta_{\hat{a}}^+) \theta_{\hat{c}}^{+\beta} \bar{\theta}^{+b\dot{\beta}} u_k^{+a} u_l^{-\hat{c}} \partial_{\beta\dot{\beta}} \phi^{[kl]} + \\ & + 2i\varepsilon_{ab} (\theta_{\hat{b}}^{+\beta} u_{\hat{a}}^{+k} + \theta_{\hat{a}}^{+\beta} u_{\hat{b}}^{+k}) \bar{\theta}^{+b\dot{\beta}} \bar{\theta}_{\hat{a}}^{+\alpha} \bar{\theta}^{+c\dot{\alpha}} u_c^{-l} \partial_{\beta\dot{\beta}} \bar{\phi}_{[kl]} + \\ & + 2\varepsilon_{ab} \theta_{\hat{a}}^{+\rho} \theta_{\hat{b}}^{+\rho} \bar{\theta}^{+a\dot{\alpha}} u_k^{+b} \bar{\lambda}_{\dot{\alpha}}^k - 2i\varepsilon_{ab} (\theta_{\hat{b}}^+ \theta_{\hat{a}}^+) \theta_{\hat{c}}^{+\beta} \bar{\theta}^{+b\dot{\beta}} \bar{\theta}^{+a\dot{\alpha}} u_k^{-\hat{c}} \partial_{\beta\dot{\beta}} \bar{\lambda}_{\dot{\alpha}}^k + \\ & + 2i\varepsilon_{ba} (\theta_{\hat{a}}^+ \theta_{\hat{b}}^+) \bar{\theta}^{+b\dot{\beta}} \bar{\theta}^{+a\dot{\rho}} \bar{\theta}_{\hat{c}}^{+\rho} u_c^{-l} \partial_{\beta\dot{\beta}} \lambda_l^{\beta}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Сопряженная величина $f^{(+4)ab}$ включает $\bar{\phi}_{[ij]} = (\varepsilon_{ijkl}/2) \phi^{[kl]}$, $\bar{\lambda}_{\dot{\alpha}}^k$ и сопряженную биспинорную напряженность $F_{\alpha\beta}(A)$.

Препотенциал содержит дополнительные члены с низшими $\rho = 1$ векторными и тензорными полями размерности 1, имеющими пары $SU(4)$ -индексов:

$$\begin{aligned} \theta_{\hat{a}}^{+\alpha} \bar{\theta}^{+c\dot{\alpha}} U_{cl}^{ak} A_{k\alpha\dot{\alpha}}^l + \theta_{\hat{c}}^{+\alpha} \bar{\theta}^{+a\dot{\alpha}} \tilde{U}_{\hat{a}l}^{\hat{c}k} \bar{A}_{k\alpha\dot{\alpha}}^l + \Theta^{++\alpha\beta} [U_{\hat{a}(kl)}^a B_{(\alpha\beta)}^{(kl)} + \tilde{U}_{\hat{a}}^{a(kl)} B_{(kl)(\alpha\beta)}] + \\ + \bar{\Theta}^{++\dot{\alpha}\dot{\beta}} [\tilde{U}_{\hat{a}}^{a(kl)} \bar{B}_{(kl)(\dot{\alpha}\dot{\beta})} + U_{\hat{a}(kl)}^a \bar{B}_{(\dot{\alpha}\dot{\beta})}^{(kl)}], \end{aligned} \quad (3.10)$$

и дополнительные фермионные поля размерности 3/2

$$\Theta_{\hat{a}}^{(+3)\alpha} \bar{u}^{-ak} \xi_{k\alpha} + \Theta_{\alpha\beta}^{++} \bar{\theta}^{+a\dot{\alpha}} u_{\hat{a}k}^{-} \rho_{\dot{\alpha}}^{k(\alpha\beta)} + \text{к.с.} \quad (3.11)$$

Мы изучаем низшие члены с вспомогательными полями размерности 2

$$\begin{aligned} & \Theta_{\hat{a}}^{(+3)\alpha} \bar{\theta}^{+a\dot{\alpha}} U_{[kl]}^{--} H_{\alpha\dot{\alpha}}^{[kl]} + \Theta_{\hat{a}}^{(+3)\alpha} \bar{\theta}^{+c\dot{\alpha}} U_c^{--a(kl)} H_{(kl)\alpha\dot{\alpha}} + \\ & + \Theta_{\hat{c}}^{(+3)\alpha} \bar{\theta}^{+c\dot{\alpha}} [\delta_c^a U_{\hat{a}(kl)}^{--\dot{c}} H_{\alpha\dot{\alpha}}^{(kl)} + \delta_{\hat{a}}^{\dot{c}} U_c^{--a(kl)} H_{(kl)\alpha\dot{\alpha}}] + (\theta_{\hat{a}}^+ \theta_{\hat{c}}^+) (\bar{\theta}^{+a} \bar{\theta}^{+c}) U_{cl}^{--\dot{c}k} H_k^l + \\ & + \Theta_{\alpha\beta}^{++} (\bar{\theta}^{+a} \bar{\theta}^{+c}) U_{c\hat{a}l}^{-k} H_k^{l(\alpha\beta)} + \Theta_{\alpha\beta}^{++} \bar{\Theta}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}^{++} U_{\hat{a}l}^{-ak} H_k^{l(\alpha\beta)(\dot{\alpha}\dot{\beta})} + \text{к.с.} \end{aligned} \quad (3.12)$$

Внемассовый препотенциал включает также бесконечное число вспомогательных полей различных размерностей с более чем двумя $SU(4)$ -индексами, например нетривиальный безразмерный член

$$A_{[kl]}^{(ij)} U_{\hat{a}(ij)}^{++a[kl]} + \text{к.с.} \quad (3.13)$$

Внемассовое разложение независимой $\sim$ -мнимой абелевой суперполевои напряженности содержит независимые компонентные поля

$$\begin{aligned} W^{++} = & U_{[kl]}^{++} F^{[kl]} + \varepsilon^{\dot{b}\dot{c}} \theta_{\dot{b}}^{+\beta} \bar{u}_{\hat{c}}^{+k} \Lambda_{k\beta} - \varepsilon_{bc} \bar{\theta}^{+b\dot{\alpha}} u_k^{+c} \bar{\Lambda}_{\dot{\alpha}}^k + i \Theta_{\alpha\beta}^{++} F^{\alpha\beta} + i \bar{\Theta}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}^{++} \bar{F}^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} + \\ & + \theta_{\hat{b}}^{+\alpha} \bar{\theta}_{\hat{b}}^{+\dot{\alpha}} [U_{[kl]}^{b\dot{b}} W_{\alpha\dot{\alpha}}^{[kl]} + U_{(kl)}^{b\dot{b}} W_{\alpha\dot{\alpha}}^{(kl)} - \tilde{U}^{b\dot{b}(kl)} \bar{W}_{(kl)\alpha\dot{\alpha}}] + (\theta_{\hat{b}}^+ \theta^{+\dot{c}}) \tilde{U}_{cl}^{k\dot{b}} V_k^l - \\ & - (\bar{\theta}^{+b} \bar{\theta}_c^{+\dot{c}}) U_{bl}^{ck} \bar{V}_k^l + \Theta_{\alpha\beta}^{++} \bar{\theta}^{+b\dot{\alpha}} \bar{u}_b^{-k} R_{k\dot{\alpha}}^{(\alpha\beta)} - \theta_{\hat{b}}^{+\alpha} \bar{\Theta}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}^{++} u_k^{-\hat{b}} \bar{R}_{\alpha}^{k(\dot{\alpha}\dot{\beta})} + \\ & + \Theta_{\hat{b}}^{(+3)\alpha} u_k^{-\hat{b}} P_{\alpha}^k + \bar{\Theta}^{(+3)b\dot{\alpha}} \bar{u}_b^{-k} \bar{P}_{k\dot{\alpha}} + (\Theta^{+4} + \bar{\Theta}^{+4}) U_{[kl]}^{--} T^{[kl]} + \\ & + \Theta_{\alpha\beta}^{++} (\bar{\theta}^{+b} \bar{\theta}^{+c}) \tilde{U}_{bc}^{--(kl)} T_{(kl)}^{(\alpha\beta)} + \Theta_{\hat{b}}^{(+3)\alpha} \bar{\theta}^{+b\dot{\alpha}} U_{bl}^{--\hat{b}k} B_{k\alpha\dot{\alpha}}^l - \\ & - \theta_{\hat{b}}^{+\alpha} \bar{\Theta}^{(+3)b\dot{\alpha}} U_{bl}^{--\hat{b}k} \bar{B}_{k\alpha\dot{\alpha}}^l + \dots, \end{aligned} \quad (3.14)$$

где высшие грассмановы и гармонические члены опущены. Поля $F^{[kl]}$, $W_{\alpha\dot{\alpha}}^{[kl]}$ и $T^{[kl]}$ самодуальны по построению.

Мы подчеркнем, что нильпотентность грассмановых координат приводит к сокращению некоторых высших компонентных членов в комбинациях $W^{++}(\theta^{+\hat{a}}\theta^{+\hat{b}})\hat{F}_{\hat{a}\hat{b}}^{(+4)}$, $\Theta^{+4}(W^{++})^2$ из действия A .

Абелев вариант уравнения (3.3) дает алгебраические ограничения для бесконечного супермультиплетта (3.14)

$$V_l^k = 0, \quad T^{[kl]} = 0, \quad P_{\alpha}^k = 0, \quad \dots \quad (3.15)$$

и дифференциальные связи

$$\begin{aligned} \partial^{\dot{\alpha}\beta} F_{\alpha\beta} = 0, \quad \partial^{\dot{\alpha}\beta} \Lambda_{k\beta} = 0, \quad W_{\alpha\dot{\alpha}}^{[kl]} = -4i \partial_{\alpha\dot{\beta}} F^{[kl]}, \\ \partial^{\dot{\alpha}\alpha} W_{\alpha\dot{\alpha}}^{[kl]} = 0, \quad R_{k(\alpha\beta)\dot{\alpha}} = i \partial_{(\alpha\dot{\alpha}} \Lambda_{k\beta)}, \quad \dots \end{aligned} \quad (3.16)$$

Все вспомогательные поля в W^{++} исчезают или выражаются через основные поля $F_{\alpha\beta}$, $F^{[kl]}$, $\Lambda_{k\beta}$ на массовой поверхности, а эти поля образуют $N = 4$ мультиплет вспомогательных напряженностей и удовлетворяют свободным уравнениям движения.

В абелевом случае уравнение (3.4) порождает соотношения между физическими и вспомогательными мультиплетными напряженностями, а также ограничения на вспомогательные поля в $V_{\hat{a}}^{++a}$ и W^{++}

$$\begin{aligned} F^{[kl]} &= \phi^{[kl]}, & F_{\alpha\beta} &\sim \partial_{\alpha\dot{\alpha}} A_{\beta}^{\dot{\alpha}} + \partial_{\beta\dot{\alpha}} A_{\alpha}^{\dot{\alpha}}, & \Lambda_{k\alpha} &\sim \lambda_{k\alpha}, \\ A_{[kl]}^{(ij)} &= 0, & A_{k\alpha\dot{\alpha}}^l &= 0, & B_{(\alpha\beta)}^{(kl)} &= 0, \\ \rho_{(\alpha\beta)\dot{\alpha}}^k &= 0, & \dots & \end{aligned} \quad (3.17)$$

При сопоставлении двух уравнений мы получаем в абелевом случае свободные уравнения для физических полей $\phi^{[kl]}$, A_m и $\lambda_{k\alpha}$, а все вспомогательные поля исчезают или выражаются через физические поля на массовой поверхности. Неабелевы нелинейные уравнения (3.3) и (3.4) сохраняют калибровочную инвариантность алгебраических и дифференциальных связей. Исключая вспомогательные поля, мы получаем стандартные уравнения $N = 4$ теории Янга–Миллса для физических компонентных полей.

Чтобы доказать непротиворечивость соответствующего неабелева компонентного классического действия, достаточно доказать непротиворечивость абелева компонентного действия в A -модели и ее калибровочную инвариантность. Возможности суперполевого квантования A -модели мы будем обсуждать в другой работе.

4. НЕЛИНЕЙНЫЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ В АБЕЛЕВОЙ $N = 4$ КАЛИБРОВОЧНОЙ ТЕОРИИ

Рассмотрим билинейные компонентные электромагнитные члены в абелевом варианте действия A_0 (3.1):

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{64} [F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} + 4F^{\alpha\beta} (\partial_{\alpha\dot{\beta}} A_{\beta}^{\dot{\beta}} + \partial_{\beta\dot{\beta}} A_{\alpha}^{\dot{\beta}}) + \text{к.с.}], \\ F^2 &= F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta}, & \bar{F}^2 &= \bar{F}^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \bar{F}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Исключая вспомогательные поля $F_{\alpha\beta}$ и $\bar{F}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}$, мы получим стандартный электромагнитный лагранжиан $-(\partial_m A_n - \partial_n A_m)^2/4$. Исключение других вспомогательных полей в компонентной версии действия A_0 порождает стандартное абелево действие физических $N = 4$ полей.

$N = 4$ суперсимметричное взаимодействие абелева гармонического суперполя четвертого порядка

$$S_4 = N_1 f^2 \int d^{(-8)} \zeta du (W^{++})^4 \quad (4.2)$$

содержит константу связи f размерности -2 и некоторый нормировочный множитель N_1 . Этот член описывает простейшее эффективное взаимодействие по аналогии с нелинейной абелевой $N = 3$ калибровочной моделью [6]. В частности, этот суперполевого член порождает компонентное взаимодействие

$$L_4 \sim f^2 F^2 \bar{F}^2 \quad (4.3)$$

и подобные взаимодействия четвертого порядка для других вспомогательных полей. Простейшее $N = 4$ эффективное действие $A_0 + S_4$ описывает неполиномиальные взаимодействия физических полей, если исключить вспомогательные поля. Мы видим, что вспомогательные поля играют важную роль в изучении эффективных взаимодействий $N = 4$ супермультиплетов.

По аналогии с работой [6] мы можем построить $U(1)$ -нейтральное аналитическое суперполе $\mathcal{A}$ размерности 8:

$$\mathcal{A} = N_2 D^{+4} \bar{D}^{+4} [(D_a^{-} - \hat{a} D_{\hat{a}}^{-} - a)^4 (W^{++})^4]. \quad (4.4)$$

Мы выбираем константу N_2 из условия нормировки компонентного разложения

$$\mathcal{A} = F^2 \bar{F}^2 + \dots, \quad (4.5)$$

где все другие члены опущены. Нелинейное взаимодействие суперполя W^{++} определяется произвольной безразмерной функцией этого аналитического суперполя

$$\begin{aligned} S(W) &= f^2 \int d^{(-8)} \zeta du (W^{++})^4 E(f^4 \mathcal{A}) = \\ &= f^2 \int d^{(-8)} \zeta du (W^{++})^4 [N_1 + e_1 f^4 \mathcal{A} + e_2 f^8 \mathcal{A}^2 + \dots], \end{aligned} \quad (4.6)$$

где $e_1, e_2, \dots$ – некоторые константы.

Подчеркнем, что суперполевое взаимодействие $S(W)$ порождает самосогласованные уравнения в сочетании с билинейным абелевым взаимодействием A_0 (3.1). Варьирование $V_{\hat{a}}^{++a}$ дает линейное уравнение (3.3), а варьирование W^{++} приводит к нелинейному обобщению уравнения (3.4). Исключая вспомогательные поля W^{++} из компонентного разложения этих суперполевых взаимодействий, мы получим нелинейные эффективные взаимодействия физического $N = 4$ супермультиплета. Эти взаимодействия описывают возможные квантовые поправки к классическому $N = 4$ действию.

5. ПРОТИВОРЕЧИЯ В ЯВНО КОВАРИАНТНОЙ МОДЕЛИ В ГС

Мы анализируем простейший суперполевой инвариант калибровочной и суперконформной групп, использующий калибровочный препотенциал $V_{\hat{a}}^{++a}$

$$S = \int d^{(-8)} \zeta du \operatorname{Tr} [F^{(+4)ab} F_{ab}^{(+4)} + \hat{F}_{\hat{a}\hat{b}}^{(+4)} \hat{F}^{(+4)\hat{a}\hat{b}}] \quad (5.1)$$

как действие некоторой калибровочной теории (S -модели)¹⁾.

Варьируя препотенциал $V_{\hat{b}}^{++a}$, мы получим уравнение движения S -модели

$$\mathcal{D}^{++a\hat{a}} \hat{F}_{\hat{b}\hat{a}}^{+4} + \mathcal{D}_{b\hat{b}}^{++} F^{+4ab} = 0. \quad (5.2)$$

¹⁾ Подобные инвариантные действия рассматривались в $USp(4)$ -гармоническом суперпространстве [17].

Абелев вариант этого уравнения имеет вид

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ce} D^{++a\hat{a}} (D_{\hat{a}}^{++e} V_b^{++c} - D_b^{++c} V_{\hat{a}}^{++e}) + \varepsilon^{\hat{c}\hat{e}} D_{b\hat{b}}^{++} (D_{\hat{e}}^{++a} V_{\hat{c}}^{++b} - D_{\hat{c}}^{++b} V_{\hat{e}}^{++a}) = \\ = 2D_{c\hat{b}}^{++} D^{++a\hat{c}} V_{\hat{c}}^{++c} - D_{\hat{c}}^{++c} D_c^{++\hat{c}} V_b^{++a} = 0. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Легко проанализировать компонентное разложение суперполевого абелева действия и уравнения движения. Стандартные компонентные поля из $v_{\hat{a}}^{++a}$ (3.7) имеют разумные взаимодействия. Дополнительные поля размерности 1 (3.10) удовлетворяют динамическим уравнениям движения, однако мы не нашли дополнительных калибровочных симметрий для взаимодействий необычных векторных полей $A_{l\alpha\dot{\alpha}}^k$ и тензорных полей $B_{(\alpha\beta)}^{(kl)}$ в этой S -модели. Мы знаем, что калибровочная инвариантность $\delta A_{l\alpha\dot{\alpha}}^k = \partial_{\alpha\dot{\alpha}} \Lambda_l^k$ необходима для непротиворечивого описания свободного безмассового векторного поля с положительной энергией, и подобная калибровочная инвариантность важна для тензорных полей. Таким образом, компонентное разложение ковариантного суперполевого действия противоречиво на билинейном уровне для этих необычных полей. Мы приходим к выводу, что ковариантное суперполевое действие S описывает противоречивую калибровочную теорию взаимодействия стандартного $N = 4$ супермультиплета с дополнительными бозонными и фермионными полями.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы переформулировали суперполевые связи $N = 4$ калибровочной теории [1] в формализме $\mathcal{U}_8$ ГС $\mathcal{H}(4 + 8|8)$. В неабелевом случае уравнения в ГС связывают независимое гармоническое суперполе W^{++} размерности 1 и безразмерный калибровочный препотенциал $V_{\hat{a}}^{++a}$. Эти суперполевые уравнения I явно зависят от грассмановых координат, хотя они ковариантны относительно деформированных преобразований $N = 4$ суперсимметрии препотенциалов. Нелинейные суперполевые связи для стандартной суперполевой напряженности W^{kl} автоматически решены в нашем формализме, и динамические суперполевые связи I сохраняют грассмановую аналитичность. Суперполевые уравнения в разделе 2 не получены из принципа наименьшего действия.

Мы используем неограниченные аналитические суперполя W^{++} и $V_{\hat{a}}^{++a}$ в неабелевом калибровочно-инвариантном суперполевым действии A . Явная зависимость действия A от грассмановых координат нарушает $N = 4$ суперсимметрию, хотя группа автоморфизмов $SU(4)$ сохраняется. Действие A описывает взаимодействия двух бесконечномерных $N = 4$ супермультиплетов и сохраняет $N = 4$ грассмановую аналитичность суперполей вне массовой поверхности по аналогии с суперкалибровочными теориями в $N = 2$ и $N = 3$ ГС [2]. Уравнения движения II A -модели в ГС представляют собой линейные комбинации уравнений связи I с нильпотентными тета-множителями. На массовой поверхности уравнений I и II все вспомогательные поля исчезают или выражаются через физические $N = 4$ поля $\phi^{[kl]}$, A_m и $\lambda_{k\alpha}$, уравнения I и II для физических полей эквивалентны.

Возможные квантовые поправки в $N = 4$ теории описываются нелинейным эффективным взаимодействием суперполя W^{++} .

ПРИЛОЖЕНИЕ А

 $SU(4)/SU(2) \times SU(2) \times U(1)$ -гармоническое однородное пространство

А.1. Гармонические переменные и гармонические производные. Мы используем гармоники u_k^{+a} , $u_k^{-\hat{a}}$, параметризующие 8-мерное однородное пространство $\mathcal{U}_8 = G/H$, где $G = SU(4)$, $H = SU_L(2) \times SU_R(2) \times U(1)$, $k = 1, 2, 3, 4$ – спинорный $SU(4)$ -индекс, значения $a = 1, 2$ соответствуют дублету $SU_L(2)$, значения $\hat{a} = \hat{1}, \hat{2}$ – дублету $SU_R(2)$, а индексы “+” и “–” – $U(1)$ -зарядам. Они образуют матрицу $SU(4)$ и ковариантны по отношению к независимым G - и H -преобразованиям.

Эрмитово сопряжение гармонической матрицы $SU(4)$ дает сопряженные гармоники

$$\overline{u_k^{+a}} = \bar{u}_a^{-k}, \quad \overline{u_k^{-\hat{a}}} = \bar{u}_{\hat{a}}^{+k}. \quad (\text{A.1})$$

Эти гармоники удовлетворяют следующим основным соотношениям [9]:

$$\begin{aligned} u_i^{+a} \bar{u}_b^{-i} &= \delta_b^a, & u_i^{+a} \bar{u}_{\hat{b}}^{+i} &= 0, \\ u_i^{-\hat{a}} \bar{u}_b^{+i} &= \delta_b^{\hat{a}}, & u_i^{-\hat{a}} \bar{u}_{\hat{b}}^{-i} &= 0, \\ u_i^{+a} \bar{u}_a^{-k} + u_i^{-\hat{a}} \bar{u}_{\hat{a}}^{+k} &= \delta_i^k, \\ \varepsilon^{ijkl} u_i^{+a} u_j^{+b} u_k^{-\hat{a}} u_l^{-\hat{b}} &= \varepsilon^{ab} \varepsilon^{\hat{a}\hat{b}}. \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Специальное $\sim$ -сопряжение для этих гармоник и других величин сохраняет $U(1)$ -заряд и меняет местами индексы двух подгрупп $SU(2)$, а также $SU(4)$ -индексы:

$$\begin{aligned} (u_i^{+a})^\sim &= -\bar{u}_{\hat{a}}^{+i}, & (u_i^{-\hat{a}})^\sim &= -\bar{u}_a^{-i}, & (\varepsilon^{ab}) &= \varepsilon_{\hat{b}\hat{a}}, \\ (\bar{u}_a^{-i})^\sim &= -u_i^{-\hat{a}}, & (\bar{u}_{\hat{a}}^{+i})^\sim &= -u_i^{+a}. \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Это сопряжение совместно с основными гармоническими соотношениями. Наше определение $\sim$ -сопряжения использует дополнительный знак минус по сравнению с определением, данным в [9].

$U(1)$ -нейтральные $SU(4)$ -инвариантные гармонические производные

$$\begin{aligned} \partial_b^a &= u_i^{+a} \partial_b^{-i} - \bar{u}_b^{-i} \bar{\partial}_i^{+a} - \frac{1}{2} \delta_b^a (u_i^{+f} \partial_f^{-i} - \bar{u}_f^{-i} \bar{\partial}_i^{+f}), \\ \hat{\partial}_{\hat{b}}^{\hat{a}} &= u_i^{-\hat{a}} \partial_b^{+i} - \bar{u}_b^{+i} \bar{\partial}_i^{-\hat{a}} - \frac{1}{2} \delta_{\hat{b}}^{\hat{a}} (u_i^{-\hat{f}} \partial_f^{+i} - \bar{u}_f^{+i} \bar{\partial}_i^{-\hat{f}}), \\ \partial^0 &= u_i^{+f} \partial_f^{-i} - \bar{u}_f^{-i} \bar{\partial}_i^{+f} + \bar{u}_{\hat{f}}^{+i} \bar{\partial}_i^{-\hat{f}} - u_i^{-\hat{f}} \partial_f^{+i} \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

содержат частные гармонические производные

$$\partial_b^{-i} = \frac{\partial}{\partial u_i^{+b}}, \quad \partial_b^{+i} = \frac{\partial}{\partial \bar{u}_b^{-i}}, \quad \bar{\partial}_i^{-\hat{b}} = \frac{\partial}{\partial \bar{u}_b^{+i}}, \quad \bar{\partial}_i^{+\hat{b}} = \frac{\partial}{\partial u_b^{-i}}. \quad (\text{A.5})$$

Эти нейтральные гармонические производные удовлетворяют алгебре Ли $SU_L(2) \times SU_R(2) \times U(1)$.

Восемь заряженных гармонических производных на $\mathcal{U}_8$

$$\partial_b^{++a} = u_i^{+a} \partial_b^{+i} - \bar{u}_b^{+i} \bar{\partial}_i^{+a}, \quad \partial_b^{--\hat{a}} = u_i^{-\hat{a}} \partial_b^{-i} - \bar{u}_b^{-i} \bar{\partial}_i^{-\hat{a}}$$

удовлетворяют алгебре Ли $SU(4)$:

$$\begin{aligned} [\partial_a^{++a}, \partial_b^{-\hat{b}}] &= \partial_b^a \delta_a^{\hat{b}} - \hat{\partial}_a^{\hat{b}} \delta_b^a + \frac{1}{2} \delta_b^a \delta_a^{\hat{b}} \partial^0, \\ [\partial_c^{\hat{b}}, \partial_a^{++a}] &= \delta_c^a \partial_a^{++b} - \frac{1}{2} \delta_c^b \partial_a^{++a}, & [\partial_c^{\hat{b}}, \partial_a^{++a}] &= -\delta_a^{\hat{b}} \partial_c^{++a} + \frac{1}{2} \delta_c^{\hat{b}} \partial_a^{++a}, \\ [\partial_c^{\hat{b}}, \partial_a^{-\hat{a}}] &= -\delta_a^{\hat{b}} \partial_c^{-\hat{a}} + \frac{1}{2} \delta_c^{\hat{b}} \partial_a^{-\hat{a}}, & [\partial_c^{\hat{b}}, \partial_a^{-\hat{a}}] &= \delta_c^{\hat{a}} \partial_c^{-\hat{b}} - \frac{1}{2} \delta_c^{\hat{b}} \partial_a^{-\hat{a}}, \\ [\partial_0, \partial_a^{++a}] &= 2\partial_a^{++a}, & [\partial_0, \partial_a^{-\hat{a}}] &= -2\partial_a^{-\hat{a}}. \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Специальное эрмитово сопряжение определено для гармонических производных

$$\begin{aligned} (\partial_i^{+i})^\dagger &= \bar{\partial}_i^{+b}, & (\partial_b^{-i})^\dagger &= \bar{\partial}_i^{-\hat{b}}, \\ (\partial_b^a)^\dagger &= \hat{\partial}_a^{\hat{b}}, & (\partial^0)^\dagger &= -\partial^0, & (\partial_b^{++a})^\dagger &= \partial_a^{++b}, & (\partial_b^{-\hat{a}})^\dagger &= \partial_a^{-\hat{b}}, \\ (\partial_b^{++a} f)^\sim &= [\partial_b^{++a}, f]^\dagger = -\partial_a^{++b} \tilde{f}, & (\partial_b^a f)^\sim &= [\partial_b^a, f]^\dagger = -\hat{\partial}_a^{\hat{b}} \tilde{f}, \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

где f и $\tilde{f}$ — $\sim$ -сопряженные гармонические функции.

Эти правила $\sim$ -сопряжения совместны со следующими формулами:

$$\begin{aligned} \partial_b^a u_i^{+c} &= u_i^{+a} \delta_b^c - \frac{1}{2} \delta_b^a u_i^{+c}, & \partial_b^a \bar{u}_c^{-i} &= -\bar{u}_b^{-i} \delta_c^a + \frac{1}{2} \bar{u}_c^{-i} \delta_b^a, \\ \hat{\partial}_b^{\hat{a}} u_i^{-\hat{c}} &= u_i^{-\hat{a}} \delta_b^{\hat{c}} - \frac{1}{2} \delta_b^{\hat{a}} u_i^{+\hat{c}}, & \hat{\partial}_b^{\hat{a}} \bar{u}_c^{+i} &= -\bar{u}_b^{+i} \delta_c^{\hat{a}} + \frac{1}{2} \bar{u}_c^{+i} \delta_b^{\hat{a}}, \\ \partial^0 u_i^{+c} &= u_i^{+c}, & \partial^0 \bar{u}_c^{-i} &= -\bar{u}_c^{-i}, & \partial^0 u_i^{-\hat{c}} &= -u_i^{-\hat{c}}, & \partial^0 \bar{u}_c^{+i} &= \bar{u}_c^{+i}, \\ \partial_b^{++a} \bar{u}_c^{-i} &= -\delta_c^a \bar{u}_b^{+i}, & \partial_b^{++a} u_i^{-\hat{c}} &= \delta_b^{\hat{c}} u_i^{+a}, \\ \partial_b^{-\hat{a}} u_i^{+c} &= \delta_b^c u_i^{-\hat{a}}, & \partial_b^{-\hat{a}} \bar{u}_c^{+i} &= -\delta_c^{\hat{a}} \bar{u}_b^{+i}. \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

A.2. Неприводимые гармонические комбинации. Мы исследуем неприводимые по индексам групп $SU(4)$ и $SU_L(2) \times SU_R(2)$ комбинации гармонических координат с различным $U(1)$ -зарядом q

Гармоники $q = 0$. Рассмотрим билинейные нейтральные комбинации гармоник

$$U_l^k = u_l^{+b} \bar{u}_b^{-k} - \bar{u}_b^{+k} u_l^{-\hat{b}} = -(U_k^l)^\sim, \quad U_l^k U_j^l = \delta_j^k. \quad (\text{A.9})$$

Полностью бесследовая эрмитова нейтральная комбинация с четырьмя $SU(4)$ -индексами

$$U_{jl}^{ik} = \frac{1}{4} U_l^k U_j^i + \frac{1}{60} \delta_l^k \delta_j^i - \frac{1}{15} \delta_j^k \delta_l^i = (U_{ik}^{jl})^\sim \quad (\text{A.10})$$

имеет комбинированную симметрию $U_{jl}^{ik} = U_{lj}^{ki}$.

Простейшие билинейные комбинации с $SU_L(2) \times SU_R(2)$ -индексами имеют вид

$$\begin{aligned} U_{[ij]}^{a\hat{a}} &= \frac{1}{2} u_i^{+a} u_j^{-\hat{a}} - \frac{1}{2} u_j^{+a} u_i^{-\hat{a}}, & U_{(ij)}^{a\hat{a}} &= \frac{1}{2} u_i^{+a} u_j^{-\hat{a}} + \frac{1}{2} u_j^{+a} u_i^{-\hat{a}}, \\ \tilde{U}_{a\hat{a}}^{[ij]} &= (U_{[ij]}^{a\hat{a}})^\sim, & \tilde{U}_{a\hat{a}}^{(ij)} &= (U_{(ij)}^{a\hat{a}})^\sim. \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

Мы рассматриваем важное $U(1)$ -нейтральное соотношение самодуальности, связывающее сопряженные гармоники

$$U_{[ij]}^{a\hat{a}} = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijkl} \varepsilon^{ab} \varepsilon^{\hat{a}\hat{b}} \tilde{U}_{\hat{b}\hat{b}}^{[kl]}. \quad (\text{A.12})$$

Отметим, что детерминантное условие (последнее соотношение в (A.2)) вытекает из этого соотношения.

Дважды бесследовые нейтральные комбинации

$$U_{bl}^{ak} = u_l^{+a} \bar{u}_b^{-k} - \frac{1}{2} \delta_b^a u_l^{+e} \bar{u}_e^{-k}, \quad \tilde{U}_{\hat{a}k}^{\hat{b}l} = (U_{bl}^{ak})^\sim \quad (\text{A.13})$$

удовлетворяют соотношениям $U_{bl}^{ak} U_k^j = U_{bl}^{aj} = U_k^{aj} U_l^k$. Мы можем построить бесследовую комбинацию с четырьмя $SU(4)$ -индексами.

Гармоники $q = 1$. Построим бесследовую комбинацию с тремя $SU(4)$ -индексами

$$U_{jl}^{+ai} = \frac{1}{2} u_j^{+a} u_l^{+b} \bar{u}_b^{-i} - \frac{2}{30} \delta_j^i u_l^{+a} - \frac{7}{30} \delta_l^i u_j^{+a} = U_{lj}^{ik} u_k^{+a} \quad (\text{A.14})$$

и сопряженную комбинацию $\tilde{U}_{\hat{a}i}^{+jl} = (U_{jl}^{+ai})^\sim$.

Гармоники $q = 2$. Условие самодуальности с зарядом $q = 2$

$$\frac{1}{2} \varepsilon^{kl ij} U_{[ij]}^{++} = \tilde{U}^{++[kl]} \quad (\text{A.15})$$

связывает следующие комбинации гармоник:

$$U_{[ij]}^{++} = \varepsilon_{ab} u_i^{+a} u_j^{+b}, \quad \tilde{U}^{++[ij]} = \varepsilon^{\hat{c}\hat{e}} \bar{u}_{\hat{c}}^{+i} \bar{u}_{\hat{e}}^{+j} = -(U_{[ij]}^{++})^\sim. \quad (\text{A.16})$$

Рассмотрим билинейные комбинации с двумя $SU(4)$ -индексами и двумя дублетными индексами:

$$U_{(ij)}^{++(ab)} = \frac{1}{2} (u_i^{+a} u_j^{+b} + u_i^{+b} u_j^{+a}), \quad \tilde{U}_{(\hat{a}\hat{b})}^{++(ij)} = \frac{1}{2} (\bar{u}_{\hat{a}}^{+i} \bar{u}_{\hat{b}}^{+j} + \bar{u}_{\hat{b}}^{+i} \bar{u}_{\hat{a}}^{+j}), \quad (\text{A.17})$$

$$U_{\hat{b}i}^{++bj} = u_i^{+b} \bar{u}_{\hat{b}}^{+j}.$$

Вычислим гармонические производные нейтральных гармоник

$$\begin{aligned} \partial_{\hat{a}}^{++a} U_l^k &= -2 U_{\hat{a}l}^{++ak}, \\ \partial_{\hat{a}}^{++a} U_{[ij]}^{b\hat{b}} &= \frac{1}{2} \delta_{\hat{a}}^{\hat{b}} \varepsilon^{ab} U_{[ij]}^{++}, \\ \partial_{\hat{a}}^{++a} U_{(ij)}^{b\hat{b}} &= \delta_{\hat{a}}^{\hat{b}} U_{(ij)}^{++(ab)}, \quad \partial_{\hat{a}}^{++a} \tilde{U}_{\hat{b}\hat{b}}^{(ij)} = -\delta_{\hat{b}}^{\hat{b}} \tilde{U}_{(\hat{a}\hat{b})}^{++(ij)}, \\ \partial_{\hat{a}}^{++a} U_{cl}^{bk} &= -\delta_c^a u_l^{+b} \bar{u}_{\hat{a}}^{+k} + \frac{1}{2} \delta_c^b u_l^{+a} \bar{u}_{\hat{b}}^{+k}, \\ \partial_{\hat{a}}^{++a} \tilde{U}_{\hat{b}k}^{\hat{c}l} &= \delta_{\hat{a}}^{\hat{c}} u_k^{+a} \bar{u}_{\hat{b}}^{+l} - \frac{1}{2} \delta_{\hat{b}}^{\hat{c}} u_k^{+a} \bar{u}_{\hat{a}}^{+l}. \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

Бесследовые комбинации с четырьмя $SU(4)$ -индексами имеют вид

$$\begin{aligned} U_{\hat{a}(ik)}^{++a(jl)} &= \partial_{\hat{a}}^{++a} U_{(ik)}^{(jl)}, \quad U_{\hat{a}[ik]}^{++a[jl]} = \partial_{\hat{a}}^{++a} U_{[ik]}^{[jl]}, \\ U_{\hat{a}(ik)}^{++a[jl]} &= \frac{1}{4} (U_{\hat{a}i}^{++aj} U_k^l + U_{\hat{a}k}^{++aj} U_i^l - U_{\hat{a}i}^{++al} U_k^j - U_{\hat{a}k}^{++al} U_i^j) + \\ &+ \frac{1}{8} (\delta_k^j U_{\hat{a}i}^{++al} + \delta_i^j U_{\hat{a}k}^{++al} - \delta_i^l U_{\hat{a}k}^{++aj} - \delta_k^l U_{\hat{a}i}^{++aj}). \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

Отметим, что гармонику $U_{\hat{a}(ik)}^{++a[jl]}$ нельзя представить в виде полной производной нейтральной гармоники $\partial_{\hat{a}}^{++a}$.

Гармоники $q = -1$. Построим бесследовую комбинацию с тремя $SU(4)$ -индексами

$$U_{bl}^{-jk} = \frac{1}{2} \bar{u}_b^{-j} u_l^{+c} \bar{u}_c^{-k} - \frac{2}{30} \delta_l^j \bar{u}_b^{-k} - \frac{7}{30} \delta_l^k \bar{u}_b^{-j} \quad (\text{A.20})$$

и сопряженную комбинацию.

Гармоники $q = -2$. Условие самодуальности с зарядом $q = -2$

$$\frac{1}{2} \varepsilon^{kl ij} U_{[ij]}^{--} = \tilde{U}^{--[kl]} \quad (\text{A.21})$$

связывает соответствующие комбинации гармоник

$$U_{[ij]}^{--} = \varepsilon_{\hat{a}\hat{b}} u_i^{-\hat{a}} u_j^{-\hat{b}}, \quad \tilde{U}^{--[ij]} = \varepsilon^{ce} \bar{u}_c^{-i} \bar{u}_e^{-j} = -(U_{[ij]}^{--})^\sim, \quad (\text{A.22})$$

$$\varepsilon^{ijkl} U_{[ij]}^{--} U_{[kl]}^{++} = 4.$$

Мы используем соотношение

$$\partial_{\hat{a}}^{++a} U_{[ij]}^{--} = 2\varepsilon_{\hat{a}\hat{b}} U_{[ij]}^{a\hat{b}}. \quad (\text{A.23})$$

Рассмотрим билинейные комбинации с двумя $SU(4)$ -индексами и двумя дублетными индексами

$$U_{(ij)}^{--(\hat{a}\hat{b})} = \frac{1}{2} (u_i^{-\hat{a}} u_j^{-\hat{b}} + u_i^{-\hat{b}} u_j^{-\hat{a}}), \quad \tilde{U}_{(ab)}^{--(ij)} = \frac{1}{2} (\bar{u}_a^{-i} \bar{u}_b^{-j} + \bar{u}_b^{-i} \bar{u}_a^{-j}), \quad (\text{A.24})$$

$$U_{ai}^{--\hat{a}j} = u_i^{-\hat{a}} \bar{u}_a^{-j},$$

удовлетворяющие соотношениям

$$\partial_{\hat{a}}^{++a} U_{(ij)}^{--(\hat{c}\hat{b})} = \frac{1}{2} \delta_{\hat{a}}^{\hat{c}} (u_i^{+a} u_j^{-\hat{b}} + u_i^{-\hat{b}} u_j^{+a}) + \frac{1}{2} \delta_{\hat{a}}^{\hat{b}} (u_i^{-\hat{c}} u_j^{+a} + u_i^{+a} u_j^{-\hat{c}}),$$

$$\partial_{\hat{a}}^{++a} U_{bi}^{--\hat{b}j} = \delta_{\hat{a}}^{\hat{b}} (u_i^{+a} \bar{u}_b^{-j} - \frac{1}{2} \delta_b^a u_i^{+c} \bar{u}_c^{-j}) - \delta_b^a (u_i^{-\hat{b}} \bar{u}_a^{+j} - \frac{1}{2} \delta_{\hat{a}}^{\hat{b}} u_i^{-\hat{c}} \bar{u}_c^{+j}) +$$

$$+ \frac{1}{2} \delta_b^a \delta_{\hat{a}}^{\hat{b}} (u_i^{+c} \bar{u}_c^{-j} - u_i^{-\hat{c}} \bar{u}_c^{+j}) = \frac{1}{2} \delta_b^a \delta_{\hat{a}}^{\hat{b}} U_i^j + \delta_{\hat{a}}^{\hat{b}} U_{bi}^{aj} - \delta_b^a \tilde{U}_{\hat{a}i}^{\hat{b}j}. \quad (\text{A.25})$$

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

$SU(4)/SU(2) \times SU(2) \times U(1)$ -ГС

Б.1. АБ. Мы используем $N = 4$ суперпространство $R(4|16)$ с четырьмя пространственно-временными и $8+8$ спинорными координатами $z = (x^m, \theta_k^\alpha, \bar{\theta}^{k\dot{\alpha}})$, где $k = 1, 2, 3, 4$ – $SU(4)$ -индекс, $m = 0, 1, 2, 3$ – векторный индекс, $\alpha, \dot{\alpha}$ – спинорные $SL(2, \mathbb{C})$ -индексы. Преобразования суперсимметрии имеют вид

$$\delta x^m = -i(\epsilon_k \sigma^m \bar{\theta}^k) + i(\theta_k \sigma^m \bar{\epsilon}^k), \quad \delta \theta_k^\alpha = \epsilon_k^\alpha, \quad \delta \bar{\theta}^{k\dot{\alpha}} = \bar{\epsilon}^{k\dot{\alpha}}. \quad (\text{Б.1})$$

$N = 4$ спинорные производные удовлетворяют соотношениям

$$\{D_\alpha^k, D_\beta^l\} = 0, \quad \{\bar{D}_{k\dot{\alpha}}, \bar{D}_{l\dot{\beta}}\} = 0, \quad (\text{Б.2})$$

$$\{D_\alpha^k, \bar{D}_{l\dot{\alpha}}\} = -2i\delta_l^k (\sigma^m)_{\alpha\dot{\alpha}} \partial_m = -2i\delta_l^k \partial_{\alpha\dot{\alpha}}.$$

Построим аналитические координаты $\zeta = (x_A^m, \theta_a^{+\alpha}, \bar{\theta}^{+a\dot{\alpha}})$ в $\mathcal{U}_8$ -гармоническом суперпространстве $\mathcal{H}(4+8|8)$:

$$\begin{aligned} x_A^m &= x^m - i(\theta_a^- \sigma^m \bar{\theta}^{+a}) + i(\theta_a^+ \sigma^m \bar{\theta}^{-\dot{a}}), \\ \delta_\epsilon x_A^m &= 2i(\theta_a^+ \sigma^m \bar{\epsilon}^{-\dot{a}}) - 2i(\epsilon_a^- \sigma^m \bar{\theta}^{+a}), \\ \theta_a^{+\alpha} &= \theta_i^\alpha \bar{u}_a^{+i}, \quad \bar{\theta}^{+a\dot{\alpha}} = \bar{\theta}^{i\dot{\alpha}} u_i^{+a} = -(\theta_a^{+\alpha})^\sim. \end{aligned} \quad (\text{Б.3})$$

Грассманово-аналитические суперполя $\lambda(\zeta, u)$ определены в аналитическом суперпространстве. Мы добавим также неаналитические спинорные координаты в АБ:

$$\theta_a^{-\alpha} = \theta_i^\alpha \bar{u}_a^{-i}, \quad \bar{\theta}^{-\dot{a}\dot{\alpha}} = \bar{\theta}^{i\dot{\alpha}} u_i^{-\dot{a}} = -(\theta_a^{-\alpha})^\sim, \quad (\theta^{-a\alpha})^\sim = \bar{\theta}_a^{-\dot{\alpha}}. \quad (\text{Б.4})$$

Рассмотрим билинейные произведения спинорных координат

$$\begin{aligned} \theta_a^{+\alpha} \theta_b^{+\beta} &= \frac{1}{2} \varepsilon^{\beta\alpha} (\theta_a^+ \theta_b^+) + \frac{1}{2} \varepsilon_{\dot{a}\dot{b}} \Theta^{++\alpha\beta}, \\ \Theta^{++\alpha\beta} &= \varepsilon^{\hat{b}\hat{a}} \theta_a^{+\alpha} \theta_b^{+\beta}, \\ \Theta^{++\alpha\beta} (\theta_a^+ \theta_b^+) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{Б.5})$$

и аналогичные соотношения для сопряженных величин

$$\begin{aligned} \bar{\theta}^{+a\dot{\alpha}} \bar{\theta}^{+b\dot{\beta}} &= \frac{1}{2} \varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} (\bar{\theta}^{+a} \bar{\theta}^{+b}) + \frac{1}{2} \varepsilon^{ab} \bar{\Theta}^{++\dot{\alpha}\dot{\beta}}, \\ \bar{\Theta}^{++\dot{\alpha}\dot{\beta}} &= (\Theta^{++\alpha\beta})^\sim = \varepsilon_{ba} \bar{\theta}^{+a\dot{\alpha}} \bar{\theta}^{+b\dot{\beta}}. \end{aligned} \quad (\text{Б.6})$$

Соотношения третьей степени имеют вид

$$\begin{aligned} \Theta_a^{(+3)\alpha} &= (\theta_a^+ \theta_b^+) \theta_c^{+\hat{\alpha}} = \varepsilon^{\hat{c}\hat{b}} \theta_{\hat{a}\hat{\beta}}^+ \theta_b^{+\beta} \theta_c^{+\alpha} = \theta_{\hat{a}\hat{\beta}}^+ \Theta^{++(\beta\alpha)}, \\ (\theta_a^+ \theta_b^+) \theta_c^{+\alpha} &= \frac{1}{3} \varepsilon_{\hat{c}\hat{a}} \Theta_b^{(+3)\alpha} + \frac{1}{3} \varepsilon_{\hat{c}\hat{b}} \Theta_a^{(+3)\alpha}, \\ \theta_a^{+\alpha} \Theta^{++\beta\rho} &= \frac{1}{3} \varepsilon^{\alpha\beta} \Theta_a^{(+3)\rho} + \frac{1}{3} \varepsilon^{\alpha\rho} \Theta_a^{(+3)\beta}, \\ \bar{\Theta}^{(+3)a\dot{\alpha}} &= (\Theta_a^{(+3)\alpha})^\sim = -(\bar{\theta}^{+a} \bar{\theta}^{+b}) \bar{\theta}_b^{+\dot{\alpha}} = \bar{\theta}_b^{+\dot{\alpha}} \bar{\Theta}^{++\dot{\alpha}\dot{\beta}}, \\ \theta_a^{+\alpha} \bar{\theta}^{+a\dot{\alpha}} \theta_b^{+\beta} &= \frac{1}{2} [\varepsilon^{\alpha\beta} (\theta_a^+ \theta_b^+) - \varepsilon_{\hat{a}\hat{b}} \Theta^{++\alpha\beta}] \bar{\theta}^{+a\dot{\alpha}}. \end{aligned} \quad (\text{Б.7})$$

Рассмотрим соотношения четвертой степени:

$$\begin{aligned} \Theta^{+4} &= (\theta_a^+ \theta_b^+) (\theta_c^+ \theta_d^+) = \Theta^{++\alpha\beta} \Theta_{\alpha\beta}^{++}, \\ (\theta_a^+ \theta_b^+) (\theta_c^+ \theta_d^+) &= \frac{1}{6} (\varepsilon_{\hat{a}\hat{c}} \varepsilon_{\hat{b}\hat{d}} + \varepsilon_{\hat{b}\hat{c}} \varepsilon_{\hat{a}\hat{d}}) \Theta^{+4}, \\ \Theta_a^{(+3)\alpha} \theta_c^{+\beta} &= \frac{1}{2} \varepsilon^{\hat{b}\hat{e}} \varepsilon^{\beta\alpha} (\theta_a^+ \theta_b^+) (\theta_c^+ \theta_e^+) = \frac{1}{2} \varepsilon^{\alpha\beta} \varepsilon_{\hat{a}\hat{c}} \Theta^{+4}, \\ \bar{\Theta}^{+4} &= (\bar{\theta}^{+ha} \bar{\theta}^{+b}) (\bar{\theta}_a^{+\dot{\alpha}} \bar{\theta}_b^{+\dot{\beta}}) = \bar{\Theta}^{++\dot{\alpha}\dot{\beta}} \bar{\Theta}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}^{++}, \\ \bar{\theta}^{+c\dot{\beta}} \bar{\Theta}^{(+3)a\dot{\alpha}} &= \frac{1}{2} \varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \varepsilon^{ca} \bar{\Theta}^{+4}. \end{aligned} \quad (\text{Б.8})$$

Мы используем спинорные производные в АБ

$$\begin{aligned}
 D_{\alpha}^{+b} &= \partial_{\alpha}^{+b}, & \bar{D}_{\dot{b}\dot{\alpha}}^{+} &= -\bar{\partial}_{\dot{b}\dot{\alpha}}^{+}, & (D_{\alpha}^{+b}, \bar{D}_{\dot{b}\dot{\alpha}}^{+})\lambda(\zeta, u) &= 0, \\
 D_{\alpha}^{-\hat{a}} &= \partial_{\alpha}^{-\hat{a}} + 2i\bar{\theta}^{-\hat{a}\dot{\alpha}}\partial_{\alpha\dot{\alpha}}^A, & \bar{D}_{\dot{b}\dot{\alpha}}^{-} &= -\bar{\partial}_{\dot{b}\dot{\alpha}}^{-} - 2i\theta_b^{-\alpha}\partial_{\alpha\dot{\alpha}}^A, \\
 \partial_{\alpha}^{+b} &= \frac{\partial}{\partial\theta_b^{-\alpha}}, & \partial_{\alpha}^{-\hat{a}} &= \frac{\partial}{\partial\theta_{\hat{a}}^{+\alpha}}, & \bar{\partial}_{\dot{b}\dot{\alpha}}^{+} &= \frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{-\dot{b}\dot{\alpha}}}, & \bar{\partial}_{\dot{b}\dot{\alpha}}^{-} &= \frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{+\dot{b}\dot{\alpha}}}, \\
 \partial_{\alpha\dot{\alpha}}^A &= (\sigma^m)_{\alpha\dot{\alpha}} \frac{\partial}{\partial x_A^m}.
 \end{aligned} \tag{B.9}$$

Гармоническая производная в АБ

$$D_{\hat{b}}^{++b} = \partial_{\hat{b}}^{++b} + 2i\theta_{\hat{b}}^{+\beta}\bar{\theta}^{+b\dot{\beta}}\partial_{\beta\dot{\beta}}^A - \theta_{\hat{b}}^{+\beta}\partial_{\beta}^{+b} + \bar{\theta}^{+b\dot{\beta}}\bar{\partial}_{\dot{b}\dot{\beta}}^{+} = (D_{\hat{b}}^{++b})^{\dagger} \tag{B.10}$$

сохраняет аналитичность:

$$[D_{\hat{b}}^{++b}, D_{\alpha}^{+a}] = 0, \quad [D_{\hat{b}}^{++b}, \bar{D}_{\dot{a}\dot{\alpha}}^{+}] = 0. \tag{B.11}$$

Мы также определим неаналитическую и нейтральные гармонические производные в АБ:

$$\begin{aligned}
 D_b^{-\hat{a}} &= \partial_b^{-\hat{a}} - 2i(\theta_b^{-}\sigma^m\bar{\theta}^{-\hat{a}})\partial_m^A - \theta_b^{-\alpha}\partial_{\alpha}^{-\hat{a}} + \bar{\theta}^{-\hat{a}\dot{\alpha}}\bar{\partial}_{\dot{b}\dot{\alpha}}^{-}, \\
 D^0 &= \partial^0 + \theta_{\hat{a}}^{+\alpha}\partial_{\alpha}^{-\hat{a}} + \bar{\theta}^{+a\dot{\alpha}}\bar{\partial}_{\dot{a}\dot{\alpha}}^{-} - \theta_a^{-\alpha}\partial_{\alpha}^{+a} - \bar{\theta}^{-\hat{a}\dot{\alpha}}\bar{\partial}_{\dot{a}\dot{\alpha}}^{+}, \\
 D_b^a &= \partial_b^a + \bar{\theta}^{+a\dot{\alpha}}\bar{\partial}_{\dot{b}\dot{\alpha}}^{-} - \frac{1}{2}\delta_b^a\bar{\theta}^{+c\dot{\alpha}}\bar{\partial}_{c\dot{\alpha}}^{-} - \theta_b^{-\alpha}\partial_{\alpha}^{+a} + \frac{1}{2}\delta_b^a\theta_c^{-\alpha}\partial_{\alpha}^{+c}, \\
 \hat{D}_{\hat{b}}^{\hat{a}} &= \partial_{\hat{b}}^{\hat{a}} - \theta_{\hat{b}}^{+\alpha}\partial_{\alpha}^{-\hat{a}} + \frac{1}{2}\delta_{\hat{b}}^{\hat{a}}\theta_{\hat{c}}^{+\alpha}\partial_{\alpha}^{-\hat{c}} + \bar{\theta}^{-\hat{a}\dot{\alpha}}\bar{\partial}_{\dot{b}\dot{\alpha}}^{+} - \frac{1}{2}\delta_{\hat{b}}^{\hat{a}}\bar{\theta}^{-\hat{c}\dot{\alpha}}\bar{\partial}_{\dot{c}\dot{\alpha}}^{+}.
 \end{aligned} \tag{B.12}$$

Мера интегрирования в аналитическом суперпространстве имеет вид

$$\begin{aligned}
 d\zeta^{(-8)} &= d^4x_A D^{-4}\bar{D}^{-4}, \\
 D^{-4} &= \frac{1}{24}(D^{-\hat{a}}D^{-\hat{b}})(D_{\hat{a}}^{-}D_{\hat{b}}^{-}), & \bar{D}^{-4} &= \frac{1}{24}(\bar{D}^{-a}\bar{D}^{-b})(\bar{D}_{\hat{a}}^{-}\bar{D}_{\hat{b}}^{-}), \\
 D^{-4}\Theta^{+4} &= 1, & \bar{D}^{-4}\bar{\Theta}^{+4} &= 1.
 \end{aligned} \tag{B.13}$$

Б.2. Суперконформные преобразования в АБ. Четные и нечетные параметры $N = 4$ суперконформной группы $SU(2, 2|4)$ имеют вид $b, \omega_{\beta}^{\alpha}, \lambda_l^k, \epsilon_k^{\alpha}, \bar{\epsilon}^{k\dot{\alpha}}, \eta^{k\alpha}, \bar{\eta}_k^{\dot{\alpha}}$. Начнем с рассмотрения суперконформных преобразований гармоник

$$\begin{aligned}
 \delta_{sc}u_l^{+a} &= -\Lambda_{\hat{b}}^{++a}u_l^{-\hat{b}}, & \delta_{sc}\bar{u}_{\hat{a}}^{+k} &= -(\delta_{sc}u_l^{+a})^{\sim} = \Lambda_{\hat{a}}^{++b}\bar{u}_b^{-k}, \\
 \delta u_k^{-\hat{a}} &= 0, & \delta \bar{u}_{\hat{a}}^{-k} &= 0,
 \end{aligned} \tag{B.14}$$

где составной параметр

$$\begin{aligned}
 \Lambda_{\hat{a}}^{++a} &= 2i\theta_{\hat{a}}^{+\beta}\bar{\theta}^{+a\dot{\beta}}k_{\beta\dot{\beta}} + 2i\bar{u}_{\hat{a}}^{+k}u_l^{+a}\lambda_k^l - 2i\bar{\theta}^{+a\dot{\beta}}\bar{u}_{\hat{a}}^{+k}\bar{\eta}_{k\dot{\beta}} + 2i\theta_{\hat{a}}^{+\beta}u_k^{+a}\eta_{\beta}^k = \\
 &= -(\Lambda_{\hat{a}}^{++a})^{\sim}
 \end{aligned} \tag{B.15}$$

удовлетворяет условиям

$$\begin{aligned}
 D_{\hat{b}}^{++b}\Lambda_{\hat{a}}^{++a} &= 0, & D_{\hat{b}}^c\Lambda_{\hat{a}}^{++a} &= \delta_b^c\Lambda_{\hat{a}}^{++c} - \frac{1}{2}\delta_b^c\Lambda_{\hat{a}}^{++a}, \\
 \hat{D}_{\hat{b}}^{\hat{c}}\Lambda_{\hat{a}}^{++a} &= -\delta_{\hat{a}}^{\hat{c}}\Lambda_{\hat{a}}^{++c} + \frac{1}{2}\delta_{\hat{b}}^{\hat{c}}\Lambda_{\hat{a}}^{++a}.
 \end{aligned} \tag{B.16}$$

Эти преобразования сохраняют основные соотношения для гармоник (A.2). Суперконформные преобразования аналитических координат имеют вид

$$\begin{aligned}
 \delta_{sc} \theta_a^{+\alpha} &= \frac{1}{2} b \theta_a^{+\alpha} + \omega_\beta^\alpha \theta_a^{+\beta} + \theta_a^{+\beta} k_{\beta\dot{\beta}} x_A^{\dot{\beta}\alpha} - 2i \bar{u}_a^{-l} u_j^{-\dot{b}} \theta_b^{+\alpha} \lambda_l^j + \\
 &\quad + \epsilon_k^\alpha \bar{u}_a^{+k} + \bar{u}_a^{+j} x_A^{\dot{\beta}\alpha} \bar{\eta}_{j\dot{\beta}} + 2i \theta_a^{+\beta} \theta_b^{+\alpha} u_j^{-\dot{b}} \eta_\beta^j, \\
 \delta_{sc} \bar{\theta}^{+a\dot{\alpha}} &= \frac{1}{2} b \bar{\theta}^{+a\dot{\alpha}} + \bar{\omega}_{\dot{\beta}}^{\dot{\alpha}} \bar{\theta}^{+a\dot{\beta}} + \bar{\theta}^{+a\dot{\beta}} k_{\beta\dot{\beta}} x_A^{\dot{\beta}\alpha} + 2i \bar{u}_b^{-j} u_l^{+a} \bar{\theta}^{+b\dot{\beta}} \lambda_j^l + \\
 &\quad + \bar{\epsilon}^{k\dot{\alpha}} u_k^{+a} + u_j^{+a} x_A^{\dot{\beta}\alpha} \eta_\beta^j - 2i \bar{\theta}^{+b\dot{\alpha}} \bar{\theta}^{+a\dot{\beta}} \bar{u}_b^{-j} \bar{\eta}_{j\dot{\beta}} = -(\delta_{sc} \theta_a^{+\alpha})^\sim, \\
 \delta_{sc} x_A^{\dot{\alpha}\alpha} &= c^{\dot{\alpha}\alpha} + b x_A^{\dot{\alpha}\alpha} + \omega_\beta^\alpha x_A^{\dot{\beta}\alpha} + \bar{\omega}_{\dot{\beta}}^{\dot{\alpha}} x_A^{\dot{\beta}\alpha} + x_A^{\dot{\beta}\alpha} k_{\beta\dot{\beta}} x_A^{\dot{\beta}\alpha} - 4\theta_b^{+\alpha} \bar{\theta}^{+b\dot{\alpha}} \bar{u}_b^{-j} u_k^{-\dot{b}} \lambda_j^k + \\
 &\quad + 2i \theta_b^{+\alpha} \bar{\epsilon}^{k\dot{\alpha}} u_k^{-\dot{b}} + 2i \bar{\theta}^{+b\dot{\alpha}} \epsilon_k^\alpha \bar{u}_b^{-k} + 2i \bar{\theta}^{+b\dot{\alpha}} \bar{u}_b^{-j} \bar{\eta}_{j\dot{\beta}} x_A^{\dot{\beta}\alpha} + 2i \theta_b^{+\alpha} u_j^{-\dot{b}} x_A^{\dot{\beta}\alpha} \eta_\beta^j.
 \end{aligned} \tag{B.17}$$

Используя комплексное сопряжение гармоник (A.1) и соответствующее сопряжение других координат в АБ

$$\overline{\theta_a^{+\alpha}} = \bar{\theta}^{-\hat{a}\dot{\alpha}}, \quad \overline{\bar{\theta}^{+a\dot{\alpha}}} = \theta_a^{-\alpha}, \quad \overline{x_A^m} = x_A^m + 2i(\theta^- \sigma^m \bar{\theta}^{+a}) - 2i(\theta_a^+ \sigma^m \bar{\theta}^{-\hat{a}}), \tag{B.18}$$

мы можем получить суперконформные преобразования спинорных координат с отрицательным зарядом, например

$$\begin{aligned}
 \delta_{sc} \theta_a^{-\alpha} &= \overline{\delta_{sc} \bar{\theta}^{+a\dot{\alpha}}} = \frac{1}{2} b \theta_a^{-\alpha} + \omega_\beta^\alpha \theta_a^{-\beta} + \theta_a^{-\beta} k_{\beta\dot{\beta}} [x_A^{\dot{\beta}\alpha} + 2i \theta_a^{-\alpha} \bar{\theta}^{+a\dot{\beta}} - 2i \theta_a^{+\alpha} \bar{\theta}^{-\hat{a}\dot{\beta}}] - \\
 &\quad - 2i u_j^{+b} \bar{u}_a^{-l} \theta_b^{-\beta} \lambda_l^j + \epsilon_k^\alpha \bar{u}_a^{-k} + \bar{u}_a^{-j} [x_A^{\dot{\beta}\alpha} + 2i \theta_a^{-\beta} \bar{\theta}^{+a\dot{\beta}} - 2i \theta_a^{+\beta} \bar{\theta}^{-\hat{a}\dot{\beta}}] \bar{\eta}_{j\dot{\beta}} + \\
 &\quad + 2i \theta_a^{-\beta} \theta_b^{-\alpha} u_j^{+b} \eta_\beta^j.
 \end{aligned} \tag{B.19}$$

Мы получили суперконформные преобразования гармонических производных

$$\begin{aligned}
 \delta_{sc} D_a^{++a} &= \Lambda_{\hat{b}}^{++a} D_a^{\hat{b}} - \Lambda_a^{++b} D_b^a - \frac{1}{2} \Lambda_a^{++a} D^0, \\
 \delta_{sc} D_b^{-\hat{b}} &= -(D_b^{-\hat{b}} \Lambda_{\hat{c}}^{++c}) D_c^{-\hat{c}}, \quad \delta_{sc} [D_a^{++a}, D_b^{-\hat{b}}] = 0.
 \end{aligned} \tag{B.20}$$

Благодарности. Автор признателен Е. А. Иванову за обсуждения. Работа частично поддержана РФФИ (гранты № 15-02-06670, 13-02-91330, 13-02-90430), ННИО (грант LE 838/12-1) и программой Гейзенберг–Ландау.

Список литературы

- [1] M. F. Sohnius, *Nucl. Phys. B*, **136**:3 (1978), 461–474.
- [2] A. Galperin, E. Ivanov, V. Ogievetsky, E. Sokatchev, *Harmonic Superspace*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2001.
- [3] A. Galperin, E. Ivanov, S. Kalitzin, V. Ogievetsky, E. Sokatchev, *Class. Quant. Grav.*, **2**:2 (1985), 155–166.
- [4] А. С. Гальперин, Е. А. Иванов, В. И. Огиевецкий, *ЯФ*, **46**:3 (1987), 948–960.
- [5] F. Delduc, J. McCabe, *Class. Quant. Grav.*, **6**:3 (1989), 233–254.
- [6] E. A. Ivanov, B. M. Zupnik, *Nucl. Phys. B*, **618**:1–2 (2001), 3–20, arXiv: hep-th/0110074.
- [7] В. М. Зупник, *ТМФ*, **140**:2 (2004), 269–283, arXiv: hep-th/0308204.
- [8] I. L. Buchbinder, E. A. Ivanov, I. B. Samsonov, B. M. Zupnik, *Nucl. Phys. B*, **689**:1–2 (2004), 91–107, arXiv: hep-th/0403053; *JHEP*, **01** (2012), 001, 29 pp., arXiv: 1111.4145.

- [9] E. Ivanov, S. Kalitzin, Nguen Ai Viet, V. Ogievetsky, *J. Phys. A*, **18**:17 (1985), 3433–3443.
- [10] E. Sokatchev, *Phys. Lett. B*, **217**:4 (1989), 489–495.
- [11] E. Witten, *Phys. Lett. B*, **77**:4–5 (1978), 394–398.
- [12] G. G. Hartwell, P. S. Howe, *Internat. J. Modern Phys. A*, **10**:27 (1995), 3901–3919, arXiv: hep-th/9412147.
- [13] P. S. Howe, P. C. West, *Phys. Lett. B*, **400**:3–4 (1997), 307–313, arXiv: hep-th/9611075.
- [14] P. S. Howe, “On harmonic superspace”, *Supersymmetries and Quantum Symmetries* (Dubna, Russia, 22–26 July 1997), *Lecture Notes in Physics*, **524**, eds. J. Wess, E. A. Ivanov, Springer, Berlin, 1999, 68–78, arXiv: hep-th/9812133.
- [15] L. Andrianopoli, S. Ferrara, E. Sokatchev, B. Zupnik, *Adv. Theor. Math. Phys.*, **3**:4 (2000), 1149–1197, arXiv: hep-th/9912007.
- [16] I. Antoniadis, S. Hohengger, K. S. Narain, E. S. Sokatchev, *Nucl. Phys. B*, **794**:1–2 (2008), 348–380, arXiv: 0708.0482.
- [17] I. L. Buchbinder, O. Lechtenfeld, I. B. Samsonov, *Nucl. Phys. B*, **802**:1–2 (2008), 208–246, arXiv: 0804.3063.
- [18] D. V. Belyaev, I. B. Samsonov, *JHEP*, **04** (2011), 112, 26 pp., arXiv: 1103.5070; **09** (2011), 056, 21 pp., arXiv: 1106.0611.
- [19] I. L. Buchbinder, N. G. Pletnev, *Nucl. Phys. B*, **877**:3 (2013), 936–955, arXiv: 1307.6300.

Поступила в редакцию 30.06.2014,
после доработки 6.02.2015