Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. П. Коноплева, Инстантоны и теория гравитации, *ТМФ*, 1998, том 115, номер 2, 312–320

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf876>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 16:30:01

ИНСТАНТОНЫ И ТЕОРИЯ ГРАВИТАЦИИ

Обсуждаются проблемы, связанные с применением непертурбативных методов квантования в теориях калибровочных полей и гравитации. Объединение взаимодействий рассматривается в рамках геометрической теории калибровочных полей. Обсуждаются понятие вакуума в единой теории взаимодействий и роль инстантонов в структуре вакуума. Демонстрируется связь между определениями инстантонов и тензора энергии-импульса калибровочного поля, а также роль вакуумных решений уравнений Эйнштейна в определении вакуума калибровочных полей. Показано, что решение Шварцшильда, как и весь класс вакуумных решений уравнений Эйнштейна, является гравитационным инстантоном несмотря на гиперболическую сигнатуру метрики пространства-времени. Гравитация, в том числе эйнштейновская, рассматривается как частный случай взаимодействия, описываемого неабелевым калибровочным полем.

1. ВВЕДЕНИЕ

Проблема построения последовательной квантовой теории гравитации занимает особое место в современной теоретической физике. Тому есть много причин, и одна из них заключается в том, что гравитация в отличие от всех других взаимодействий играет двойственную роль: с одной стороны, она является одним из фундаментальных взаимодействий, с другой стороны, это динамическая геометрия пространства-времени, являющегося ареной для негравитационных взаимодействий. Очевидно, что гравитация должна участвовать в формировании структуры вакуума для любого взаимодействия, но на первый взгляд неясно, каким образом можно было бы установить эту связь.

В данной статье показано, что существует единство проблем сохранения энергии и формирования структуры вакуума в теориях всех калибровочных полей, включая гравитацию. Все фундаментальные взаимодействия рассматриваются в рамках лагранжева вариационного формализма, построенного впервые в [1] и изложенного затем в [2] и [3]. Этот формализм основан на представлениях конечнопараметрических G_r и бесконечных $G_{\infty r}$ групп Ли и двух теоремах Нетер, а также их обобщениях. Он позволяет рассматривать теорию как в плоском пространстве, так и в искривленном, придавая

*Всероссийский научно-исследовательский институт электромеханики, Москва, Россия; Лаборатория теоретической физики им. Н.Н. Боголюбова, ОИЯИ, Дубна, Россия. E-mail: nelly@theor.jinrc.dubna.su, nelly@thsun1.jinr.dubna.su.

тем же самым вариационным формулам естественный геометрический смысл. Общая теория относительности (ОТО) Эйнштейна и калибровочные теории гравитации с высшими производными рассматриваются при этом как частные случаи теорий неабелевых калибровочных полей. Таким образом, ко всем фундаментальным взаимодействиям, включая гравитацию, применяется единый подход.

2. ТЕНЗОР ЭНЕРГИИ-ИМПУЛЬСА

Пусть исследуемая физическая система описывается интегралом действия

$$S = \int L(x, u, u', \dots) dv,$$

где u — полевые переменные, x — координаты и время, dv — элемент объема. Если задан метрический тензор $g_{\mu\nu}$ пространства-времени V_4 , то *определение тензора энергии-импульса* имеет вид

$$T_{\mu\nu} = \frac{\delta L}{\delta g^{\mu\nu}}.$$

Иными словами, тензор энергии-импульса — это лагранжева производная по метрике V_4 . Возможны и другие определения тензора энергии-импульса, но данное определение — одно из общепринятых [4]. Оно позволяет сразу получать симметричный тензор энергии-импульса, что обеспечивает правильную связь между импульсом, энергией и моментом импульса, а также соответствие теоретико-полевых понятий и представлений классической физики.

Рассмотрим частные случаи применения данного определения и убедимся, что именно такие тензоры энергии-импульса обычно используются в физике.

1. Электромагнитное поле:

$$L = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu},$$

где $F_{\mu\nu}$ — тензор напряженности поля. Тензор энергии-импульса электромагнитного поля имеет вид

$$T_{\mu\nu}^{\text{эл}} = \left(F_{\mu\tau} F^{\tau}_{\nu} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right).$$

2. Неабелевы калибровочные поля:

$$L = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu},$$

где $F_{\mu\nu}^a$ — тензор напряженности поля. Тензор энергии-импульса калибровочного поля есть

$$T_{\mu\nu}^{\text{кп}} = \left(F_{\mu\tau}^a F_a^{\tau}_{\nu} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\alpha\beta}^a F_a^{\alpha\beta} \right).$$

3. Гравитация:

а) ОТО:

$$L = R,$$

$g_{\mu\nu}$ – полевая переменная (метрика V_4 , $\mu, \nu = 0, \dots, 3$), R – след тензора Риччи. Имеем

$$T_{\mu\nu}^{\text{OTO}} = \frac{\delta L}{\delta g^{\mu\nu}} = 0,$$

т.к. это есть уравнение движения (т.е. уравнение Эйлера–Лагранжа) для полевой переменной $g_{\mu\nu}$. Поскольку в ОТО движение считается бессиловым, равенство нулю $T_{\mu\nu}^{\text{OTO}}$ вполне естественно.

В квантовой теории поля использование метода интегрирования по путям при переходе к мнимому времени и евклидову пространству-времени приводит к появлению понятий, близких по своей математической природе к понятиям, используемым в ОТО. Одним из таких понятий является инстантон как классическая траектория движения с нулевой энергией [5, 6]. В качестве примера рассмотрим двугорбый потенциал. Как было замечено в [6, с. 561], траектории, описывающие инстантоны в евклидовой версии одномерного потенциального движения бесспиновой частицы, соответствуют механическому движению с нулевой полной энергией. В обычной квантово-механической картине такое движение в мнимом времени интерпретируется как подбарьерное туннелирование;

б) $SO(3, 1)$ -гравитация:

$$L = -\frac{1}{4}R^{(ik)}{}_{\mu\nu}R^{(ik)}{}^{\mu\nu},$$

где $R_{\mu\nu}^{(ik)}$ – тензор напряженности поля (тензор римановой кривизны пространства-времени в реперных координатах). Полевыми переменными в этом случае являются коэффициенты связности Риччи $\Delta^{(ik)}$ ($i, k = 0, \dots, 3$). Тензор энергии-импульса $SO(3, 1)$ -гравитационного поля имеет вид

$$T_{\mu\nu}^{\text{ГР}} = \left(R_{\mu\tau}^{(ik)}R^{\tau}{}_{\nu(ik)} - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}R_{\alpha\beta}^{(ik)}R^{\alpha\beta}{}_{(ik)} \right).$$

3. ВАКУУМ

Вакуум в теории поля можно определить как состояние с нулевым тензором энергии-импульса этого поля:

$$T_{\mu\nu} = 0.$$

Тогда для частных случаев вакуум будет определяться следующими уравнениями:

1. ОТО:

$$T_{\mu\nu}^{\text{OTO}} = \frac{\delta L}{\delta g^{\mu\nu}} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 0,$$

это известные вакуумные уравнения Эйнштейна.

2. Электродинамика Максвелла:

$$T_{\mu\nu}^{\text{эл}} = \left(F_{\mu\tau}F^{\tau}{}_{\nu} - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} \right) = 0.$$

3. Неабелевы калибровочные поля:

$$T_{\mu\nu}^{\text{кп}} = \left(F^a_{\mu\tau} F^{\tau}_{a\nu} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F^a_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}_a \right) = 0.$$

4. $SO(3,1)$ -гравитация:

$$T_{\mu\nu}^{\text{гр}} = \left(R_{\mu\tau}{}^{(ik)} R^{\tau}_{\nu(ik)} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} R_{\alpha\beta}{}^{(ik)} R^{\alpha\beta}_{(ik)} \right) = 0.$$

Это уравнение означает отсутствие приливных сил, т.е. реальной гравитации. В то же время оно означает, что пробные частицы считаются точечными, т.е. мы пренебрегаем размерами реальных тел, движущихся во внешнем гравитационном поле. Частицы рассматриваются просто как метки, визуализирующие силовые линии гравитационного поля и не искажающие его своим собственным полем.

5. Негравитационные поля в римановом пространстве-времени V_4 (ОТО+ (2) + (3) + (4)). Три различных вида лагранжианов запишем в виде матрицы

$$L = R - \frac{1}{4} \begin{pmatrix} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \\ F^a_{\mu\nu} F^{\mu\nu}_a \\ R_{\mu\nu}{}^{(ik)} R^{\mu\nu}_{(ik)} \end{pmatrix}$$

и аналогично три вида вакуумов определим через уравнения Эйнштейна с правыми частями в виде тензоров энергии-импульса соответствующих полей ($s = 1, 2, 3$):

$$0 = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \kappa_s \begin{pmatrix} F_{\mu\tau} F^{\tau}_{\nu} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \\ F^a_{\mu\tau} F^{\tau}_{a\nu} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F^a_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}_a \\ R_{\mu\tau}{}^{(ik)} R^{\tau}_{\nu(ik)} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} R_{\alpha\beta}{}^{(ik)} R^{\alpha\beta}_{(ik)} \end{pmatrix}.$$

4. ИНСТАНТОНЫ

Непертурбативные методы в квантовой теории поля основаны на использовании решений уравнений калибровочных полей специального вида, называемых инстантонами [5, 6]. Эти решения описывают нетривиальную топологическую структуру вакуума и являются решениями так называемых уравнений самодуальности поля:

$$F^a_{\mu\nu} = \pm i * F^a_{\mu\nu}.$$

Эти уравнения тесно связаны с введенными выше уравнениями, определяющими понятие вакуума для каждого калибровочного поля через его тензор энергии-импульса, поскольку они являются необходимыми и достаточными условиями обращения тензора энергии-импульса в нуль. Справедливость данного утверждения следует из представления $T_{\mu\nu}$ в виде произведения двух сомножителей. Для электромагнитного поля такое разложение $T_{\mu\nu}$ на множители было получено впервые Уилером [7]. Оно имеет вид

$$\left(F_{\mu\tau} F^{\tau}_{\nu} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right) \equiv (F_{\mu\tau} - i * F_{\mu\tau})(F^{\tau}_{\nu} + i * F^{\tau}_{\nu}).$$

Доказать аналогичный результат для неабелевых калибровочных полей гораздо сложнее, чем для абелевых, но это было сделано в 1970 г. Коноплевой Н. П. и опубликовано в [8]. В этом случае разложение $T_{\mu\nu}$ имеет вид

$$\left(F^a{}_{\mu\tau} F^{\tau}{}_{a\nu} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F^a{}_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}{}_a \right) \equiv (F^a{}_{\mu\tau} - i * F^a{}_{\mu\tau})(F^{\tau}{}_{a\nu} + i * F^{\tau}{}_{a\nu}).$$

В той же работе Коноплевой Н. П. было получено разложение для тензора энергии-импульса $SO(3, 1)$ -гравитационного поля. Интересно отметить, что благодаря наличию у тензора римановой кривизны двух антисимметричных пар индексов становятся возможными два вида такого разложения. Один вариант в точности аналогичен разложению $T_{\mu\nu}$ для произвольного неабелева калибровочного поля, а другой вариант использует повторную операцию дуального сопряжения, примененную ко второй антисимметричной паре индексов.

Вторая антисимметричная пара индексов нумерует параметры локальных преобразований группы Лоренца, действующей на ортогональные реперы касательного пространства в каждой точке риманова пространства-времени V_4 . С помощью этих реперов лоренцевы индексы тензора кривизны можно превратить в мировые, т.е. обычные пространственно-временные индексы. Тогда тензор кривизны Римана примет обычный вид и обе пары его индексов станут равноправными. В этом случае ко второй паре индексов тоже можно применить операцию дуального сопряжения.

Имея в виду оба варианта, запишем разложение $T_{\mu\nu}$ для гравитации в следующем виде:

$$\begin{aligned} \left(R_{\mu\tau}{}^{(ik)} R^{\tau}{}_{\nu(ik)} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} R_{\alpha\beta}{}^{(ik)} R^{\alpha\beta}{}_{(ik)} \right) &\equiv \\ &\equiv (R_{\mu\tau}{}^{(ik)} + i * R_{\mu\tau}{}^{(ik)})(R^{\tau}{}_{\nu(ik)} - i * R^{\tau}{}_{\nu(ik)}), \\ \left(R_{\mu\tau}{}^{\rho\sigma} R^{\tau}{}_{\nu\rho\sigma} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} R_{\alpha\beta}{}^{\rho\sigma} R^{\alpha\beta}{}_{\rho\sigma} \right) &\equiv \\ &\equiv (R_{\mu\tau}{}^{\rho\sigma} - * R_{\mu\tau}{}^{*\rho\sigma})(R^{\tau}{}_{\nu\rho\sigma} + * R^{\tau}{}_{\nu\rho\sigma}). \end{aligned}$$

Из этих уравнений следует, что обращение в нуль тензора энергии-импульса $SO(3, 1)$ -гравитационного поля возможно в двух случаях: либо тензор римановой кривизны самодуален, т.е.

$$R_{\mu\tau}{}^{(ik)} = \pm i * R_{\mu\tau}{}^{(ik)},$$

либо он дважды самодуален, т.е.

$$R_{\mu\tau}{}^{\rho\sigma} = \pm * R_{\mu\tau}{}^{*\rho\sigma}.$$

Второе уравнение позволяет рассматривать новый класс решений, обладающих свойствами инстантонов, но вещественных в псевдоевклидовом пространстве-времени.

Кроме обращения в нуль тензора энергии-импульса, эти решения, как и обычные инстантоны, минимизируют функционал

$$S = \int R_{\alpha\beta}{}^{\rho\sigma} * R^{*\alpha\beta}{}_{\rho\sigma} dv,$$

являющийся аналогом функционала

$$S = \int F_{\alpha\beta}^a * F_a^{\alpha\beta} dv$$

для произвольного калибровочного поля, и обращают его в константу (топологический заряд). Назовем такие решения гиперболическими инстантонами.

Таким образом, инстантоны в силу своего определения через уравнения самодуальности обращают в нуль тензоры энергии-импульса соответствующих полей и, следовательно, определяют вакуум для квантов этих полей [9]. Вследствие необходимости и достаточности условий самодуальности для обращения в нуль тензоров энергии-импульса калибровочных полей можно для определения инстантонов использовать условие $T_{\mu\nu} = 0$ вместо условий самодуальности. Это позволяет сделать более непосредственной связь между инстантонами и понятием вакуума, что весьма полезно в случае гравитации.

Действительно, в случае $SO(3,1)$ -гравитации решение уравнений самодуальности оказывается тривиальным и соответствует плоскому пространству Минковского. Однако условие двойной самодуальности тензора кривизны Римана приводит к новому взгляду на инстантоны и на роль гравитации в формировании структуры вакуума калибровочных полей. Прежде всего гиперболическая сигнатура пространства-времени препятствует рассмотрению инстантонных решений. Поэтому, кроме обычных инстантонов, определяемых в евклидовом пространстве-времени, становится возможным появление гиперболических инстантонов, определяемых в пространстве-времени с гиперболической сигнатурой. Такими гиперболическими инстантонами оказывается весь класс вакуумных решений уравнений Эйнштейна (и в том числе решение Шварцшильда). Этот вопрос более подробно рассматривается в следующем разделе.

5. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ В РИМАНОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ-ВРЕМЕНИ

Рассмотрим систему уравнений, возникающих в тех случаях, когда в римановом пространстве-времени существует либо электромагнитное поле, либо произвольное неабелево калибровочное поле. Такая система уравнений состоит из уравнений Максвелла или Янга–Миллса, записанных в римановом пространстве V_4 , и уравнений Эйнштейна, в правой части которых в качестве источника гравитационного поля стоит тензор энергии-импульса соответствующего поля. Этот подход к объединению электромагнитного и гравитационного полей был предложен впервые Уилером и назван им геометродинамикой [7]. Обобщение геометродинамики Уилера на калибровочные поля было предложено в 1970 г. Коноплевой [8]. Идея Уилера состояла в том, чтобы, решая совместную систему уравнений для электродинамики и гравитации, выразить напряженности

электрического и магнитного полей через геометрические величины и тем самым геометризовать электродинамику.

Геометродинамика Уилера и ее обобщения. Система уравнений в геометродинамике Уилера имеет вид

$$F^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0, \\ R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \kappa_1 \left(F_{\mu\tau} F^{\tau}{}_{\nu} - \frac{1}{4}g_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right).$$

Она позволяет показать, что напряженности электрического и магнитного полей выражаются через производные тензора кривизны Римана. Уилер считал, что влияние электромагнитного поля на метрику V_4 настолько характерно, что позволяет решать и обратную задачу, восстанавливая по геометрии V_4 напряженности электромагнитного поля. Однако при таком восстановлении появляется неоднозначность, связанная с инвариантностью тензора энергии-импульса $T_{\mu\nu}^{\text{эл}}$ относительно дуальных преобразований тензора поля. До Уилера такие преобразования рассматривались как дискретные, но в связи с новым геометрическим подходом к электродинамике Уилер ввел непрерывный дуальный поворот электрических и магнитных компонент поля. В случае электромагнитной волны этот дуальный поворот описывает вращение плоскости ее поляризации. Однако при наличии заряженных частиц прозрачной физической интерпретации дуальных поворотов не существует. Уилер же предпринял попытку рассмотреть даже дуальные повороты с фазой, зависящей от точки. В этом случае одна и та же риманова геометрия V_4 может давать в разных областях Вселенной то электрические, то магнитные компоненты поля, переходящие друг в друга постепенно.

Обобщение геометродинамики Уилера на калибровочные поля приводит к системе уравнений

$$F^{\mu\nu}{}_{a;\nu} = 0, \\ R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \kappa_2 \left(F_{\mu\tau}^a F_a{}^{\tau}{}_{\nu} - \frac{1}{4}g_{\mu\nu} F_{\alpha\beta}^a F_a{}^{\alpha\beta} \right).$$

Как и в случае геометродинамики Уилера, эта система уравнений позволяет выразить напряженности калибровочного поля через производные тензора кривизны Римана с точностью до дуального поворота. Поэтому в разных областях пространства-времени при одной и той же римановой геометрии возможно попеременное существование электрических и магнитных компонент калибровочного поля.

В рамках геометродинамики Уилера благодаря объединению электромагнитного и гравитационного полей становятся возможными решения, описывающие чисто полевые образования, которые на большом расстоянии от их центра выглядят как массивные или заряженные частицы, хотя ни обычной тяжелой массы, ни заряда у них нет. Уилер назвал их “массой без массы” и “зарядом без заряда”. Масса и заряд таких полевых образований создаются за счет нетривиальной топологии силовых линий поля.

По-видимому такой же механизм способен объяснить появление массы у любого калибровочного поля без введения массового члена или механизма Хиггса.

Система уравнений геометродинамики Уилера и ее обобщение на неабелевы калибровочные поля показывают, что все инстантонные решения, описывающие электромагнитное поле и произвольные неабелевы калибровочные поля, соответствуют вакуумным уравнениям Эйнштейна в силу своего определения:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 0.$$

Гиперболические гравитационные инстантоны. Рассматривая $SO(3, 1)$ -гравитацию как частный случай неабелева калибровочного поля, из обобщенных уравнений геометродинамики получим следующую систему уравнений:

$$R_{(ik); \nu}^{\mu\nu} = 0,$$

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \kappa_3 \left(R_{\mu\sigma}^{(ik)} R_{\nu(i k)}^{\sigma} - \frac{1}{4}g_{\mu\nu} R_{(ik)}^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta}^{(ik)} \right).$$

Наложим условие двойной самодуальности тензора напряженности гравитационного поля, роль которого в данном случае играет тензор кривизны Римана:

$$R_{\mu\tau}{}^{\rho\sigma} = \pm * R_{\mu\tau}^{*}{}^{\rho\sigma},$$

и свернем эти условия с метрическим тензором $g_{\mu\nu}$. Тогда получим

$$R_{\mu\nu} = \pm * R_{\mu\nu}^{*}.$$

Отсюда следуют две возможности:

- 1) $R_{\mu\nu} = + * R_{\mu\nu}^{*}$ и, следовательно, $R = 0$;
- 2) $R_{\mu\nu} = - * R_{\mu\nu}^{*}$ и, следовательно, $R_{\mu\nu} = 0$.

Первая возможность не дает нам новой информации о полях, поскольку след рассматриваемых тензоров энергии-импульса равен нулю и условие $R = 0$ вытекает уже из него. Однако вторая возможность указывает на новую интерпретацию уравнений Эйнштейна в вакууме, а именно, они могут рассматриваться как свернутые условия двойной самодуальности тензора кривизны Римана.

Итак, благодаря обобщенным уравнениям геометродинамики уравнения Эйнштейна определяют структуру вакуума для всех калибровочных полей, включая гравитацию. При этом решения уравнений калибровочного поля во всех случаях становятся инстантонами. И обратно, инстантоны любого калибровочного поля могут принимать участие в формировании вакуума пространства-времени.

Автор благодарит за поддержку профессоров С. П. Новикова, В. Г. Кадышевского, А. М. Балдина, В. В. Бурова, Н. А. Черникова, а также И. И. Десятникова и С. Я. Куцакова. Работа поддержана также Российским фондом фундаментальных исследований.

Список литературы

- [1] *Н. П. Коноплева*. Вариационный формализм для бесконечных групп и теория поля. В сб.: Гравитация и теория относительности. Вып. 4–5. Казань: КГУ, 1968. С. 67.
- [2] *Н. П. Коноплева, В. Н. Попов*. Калибровочные поля. М.: Атомиздат, 1972.
- [3] *N. P. Konopleva, V. N. Popov*. Gauge fields. Chur–London–New York: Harwood Academic Publishers, 1981.
- [4] *Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц*. Теория поля. М.: Наука, 1973. С. 324.
- [5] *R. Rajaraman*. Solitons and instantons. Amsterdam–New York–Oxford: North-Holland Publishing Company, 1982.
- [6] *А. И. Вайнштейн, В. И. Захаров, В. А. Новиков, М. А. Шифман*. УФН. 1982. Т. 136. № 4. С. 553.
- [7] *Дж. Уилер*. Гравитация, нейтрино и Вселенная. М.: ИИЛ, 1962.
- [8] *Н. П. Коноплева*. О геометродинамике и компенсирующих полях. В сб.: Проблемы теории гравитации и элементарных частиц. Вып. 3. М.: Атомиздат, 1970. С. 103.
- [9] *N. P. Konopleva*. Instantons and gravity. In: Comm. JINR E2–96–459. Dubna: JINR, 1996.

Поступила в редакцию 7.X.1997 г.