Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. В. Капцов, Локальный алгебраический анализ дифференциальных систем, *ТМФ*, 2015, том 183, номер 3, 342–358

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8760>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.227.88.159

26 апреля 2023 г., 11:31:36

© 2015 г.

О. В. Капцов^{*†}

ЛОКАЛЬНЫЙ АЛГЕБРАИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

Предложен новый подход к исследованию совместности уравнений с частными производными. Этот подход является синтезом метода Рикье, теории базисов Грёбнера и элементов алгебраической геометрии. В качестве приложений рассмотрены системы, включающие волновое уравнение и уравнение синус-гордон.

Ключевые слова: совместность дифференциальных уравнений, редукция, базис Грёбнера.

DOI: 10.4213/tmf8760

1. ВВЕДЕНИЕ

Проблема совместности уравнений с частными производными начала активно изучаться на рубеже девятнадцатого и двадцатого веков в работах Кёнига, Рикье, Жана, Картана и других авторов. Обзор работ этого времени представлен в монографиях [1], [2]. После некоторого периода затишья интерес к этому вопросу возродился в связи с возникающими приложениями и появлением новых задач. На этом этапе в теории дифференциальных уравнений стал использоваться язык расслоений, гомологической и коммутативной алгебры [3]–[6]. В последнее время основные акценты в исследованиях сместились в сторону алгоритмических и вычислительных вопросов [7]–[9]. Это объясняется успехами в развитии компьютерной алгебры. Наибольший прогресс был достигнут в исследовании совместности систем алгебраических уравнений благодаря теории базисов Грёбнера [10], [11]. В приложениях переопределенные системы возникают в связи с исследованием симметрий и законов сохранения уравнений математической физики [12], [13]. Дифференциальные связи успешно применялись для построения решений уравнений газовой динамики [14] и квантовой механики [15]. Метод обратной задачи [16] использует условия совместности линейных систем уравнений с частными производными.

В настоящей работе предложен алгебро-аналитический подход к изучению некоторых локальных свойств уравнений с частными производными. В данном подходе

^{*}Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск, Россия.
E-mail: kaptsov@icm.krasn.ru

[†]Сибирский федеральный университет, Красноярск, Россия

используются идеи алгебраической геометрии и базисов Грёбнера. Алгебраическая структура, в рамках которой ведутся построения, состоит из локального дифференциального кольца, отношений на кольце и полугруппы, действующей на кольце.

В разделе 2 вводится бесконечномерное пространство – аналог пространства бесконечных джетов. Каждой точке a этого пространства сопоставляется локальная дифференциальная алгебра $\mathcal{F}(a)$ сходящихся рядов. Каждое подмножество $S \subset \mathcal{F}(a)$ порождает дифференциальный идеал, и основным объектом исследования становятся пассивные множества конечно порожденных дифференциальных идеалов алгебр $\mathcal{F}(a)$. Пассивное множество является подобием базиса Грёбнера идеала кольца полиномов, однако наше определение пассивности не использует порядка на кольце. В конце раздела 2 получено необходимое условие пассивности множества.

В разделе 3 доказываются утверждения, аналогичные тем, что известны в теории базисов Грёбнера. В отличие от стандартного подхода, применяемого к алгебре полиномов, мы используем разбиение алгебры $\mathcal{F}(a)$, действие полугруппы, согласованное с разбиением, и теорему Вейерштрасса о делении степенных рядов. Дается определение редукции ряда относительно некоторых подмножеств алгебры $\mathcal{F}(a)$, нормальной формы ряда, τ -ряда (аналога S -многочлена), канонического множества дифференциального идеала. Описывается способ приведения сходящегося дифференциального ряда к нормальной форме. В терминах τ -рядов получен удобный критерий пассивности. Доказано, что если дифференциальный идеал обладает пассивным множеством, то существует единственное каноническое множество, порождающее данный идеал.

В заключительном разделе 4 описывается схема построения пассивного множества заданного дифференциального идеала, которая опирается на некоторое уточнение теоремы о неявных функциях, доказанное в работе. Хотя эта схема не является универсальной, она может оказаться полезной при исследовании совместности конкретных систем уравнений с частными производными. В качестве приложения данной схемы рассматриваются два примера. В первом примере исследуется совместность системы, состоящей из уравнения синус-гордон и уравнения третьего порядка, заданного высшей симметрией. Во втором примере строятся пассивные множества, связанные с трехмерным волновым уравнением для звука в неоднородной среде. Указывается, как использовать пассивные множества при построении решений уравнений.

2. ПАССИВНЫЕ МНОЖЕСТВА

Пусть $\mathbb{N}$ обозначает множество неотрицательных целых чисел, $\mathbb{N}_m = \{1, \dots, m\}$. Тогда $\mathbb{N}^n$ – полугруппа, порожденная образующими

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0), \quad \dots, \quad e_n = (0, \dots, 0, 1).$$

Пусть $\mathbb{K}$ – поле, полное относительно некоторой нормы. Обозначим через $\mathbb{K}^\infty$ множество семейств $\{a_\alpha^i\}_{\alpha \in \mathbb{N}^n}^{i \in \mathbb{N}_m}$, $a_\alpha^i \in \mathbb{K}$. Операции сложения семейств

$$\{a_\alpha^i\} + \{b_\alpha^i\} = \{a_\alpha^i + b_\alpha^i\}$$

и умножения на элементы поля

$$c\{a_\alpha^i\} = \{ca_\alpha^i\}$$

задают структуру векторного пространства на $\mathbb{K}^\infty$. Пространство $\mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^\infty$ обозначается как $\mathbb{K}^{n+\infty}$. Часто подобные пространства называются пространствами джетов, или продолженными пространствами.

Каждой точке $a \in \mathbb{K}^{n+\infty}$ сопоставим некоторую $\mathbb{K}$ -алгебру сходящихся степенных рядов следующим образом. Если L – конечномерное координатное подпространство в $\mathbb{K}^{n+\infty}$, то $\mathbb{K}^{n+\infty}$ представляется в виде прямой суммы $L \oplus M$, где M – прямое дополнение к L . Проектор из $\mathbb{K}^{n+\infty}$ на L вдоль M обозначим через π_L . С помощью координатного изоморфизма ϕ пространство L отображается на $\mathbb{K}^s$, $s = \dim L$. Точке $a \in \mathbb{K}^{n+\infty}$ сопоставим точку $a_L = \phi(\pi_L(a)) \in \mathbb{K}^s$. Множество сходящихся степенных рядов с центром в точке a_L , зависящих от конечного числа переменных, обозначим через $\mathcal{F}(a_L)$.

Если подпространство L содержится в подпространстве L' , то мы считаем, что кольцо $\mathcal{F}(a_L)$ канонически вложено в $\mathcal{F}(a_{L'})$. Тогда объединение

$$\mathcal{F}(a) = \bigcup_{L \in \mathbb{K}^{n+\infty}} \mathcal{F}(a_L) \quad (2.1)$$

является $\mathbb{K}$ -алгеброй, соответствующей точке a . Декартовы координаты на $\mathbb{K}^{n+\infty}$ обозначаются как $x_1, \dots, x_n, \dots, u_\alpha^i, \dots$, а все множество декартовых координат обозначается через Y . Оно разбивается на два подмножества

$$X = \{x_1, \dots, x_n\}, \quad U = \{u_\alpha^i : i \in \mathbb{N}_m, \alpha \in \mathbb{N}^n\}. \quad (2.2)$$

Согласно монографии [17] алгебра $\mathcal{F}(a)$ является локальной с максимальным идеалом

$$\mathfrak{M}(a) = \{f \in \mathcal{F}(a) : f(a) = 0\}. \quad (2.3)$$

На $\mathcal{F}(a)$ действуют n операторов дифференцирования

$$D_i f = \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{\substack{j \in \mathbb{N}_m, \\ \alpha \in \mathbb{N}^n}} \frac{\partial f}{\partial u_\alpha^j} u_\alpha^j x_{\alpha+e_i}.$$

Следовательно, $\mathcal{F}(a)$ – дифференциальная алгебра. Элементы алгебры $\mathcal{F}(a)$ называются *сходящимися дифференциальными рядами*.

Полезно также рассматривать дизъюнктивное объединение алгебр (“пучок” локальных алгебр над $\mathbb{K}^{n+\infty}$)

$$\mathcal{F} = \bigcup_{a \in \mathbb{K}^{n+\infty}} \mathcal{F}(a). \quad (2.4)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Локальной аналитической дифференциальной системой* называется упорядоченная тройка множеств $(\mathbb{K}, Y, S)$, где S – подмножество в $\mathcal{F}$.

Локальные аналитические дифференциальные системы можно рассматривать как алгебраическую формализацию уравнений с частными производными.

Дифференциальный идеал в $\mathcal{F}(a)$, порожденный множеством S , будет обозначаться как $\langle\langle S \rangle\rangle$, произведение операторов $D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n}$ – как D^α ; пусть $\text{iv}(f)$ – множество переменных, от которых зависит ряд $f \in \mathcal{F}$. Если Y' – непустое подмножество в Y , тогда

$$\mathbb{K}[(Y')]_a = \{f \in \mathcal{F}(a) : \text{iv}(f) \subseteq Y'\} \quad (2.5)$$

является подалгеброй алгебры $\mathcal{F}(a)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Орбитой множества $S \subset \mathcal{F}$ называется множество

$$O(S) = \{D^\alpha s: \alpha \in \mathbb{N}^n, s \in S\}.$$

Используя аналогию с алгебраической геометрией и теорией локальных аналитических алгебр [18], введем следующие понятия.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Пусть $S \subset \mathcal{F}(a)$, где a – такая точка в $\mathbb{K}^{n+\infty}$, что орбита множества S содержится в максимальном идеале $\mathfrak{M}(a)$ (2.3). Тогда фактор-алгебра

$$\mathcal{O}_S(a) = \mathcal{F}(a)/\langle\langle S \rangle\rangle$$

называется *локальной алгеброй точки a* . Если $\mathcal{O}_S(a)$ изоморфна некоторой алгебре $\mathbb{K}[\langle Y' \rangle]_a$, то a называется *неособой точкой* для S .

Далее мы получим условия того, что точка является неособой. В случае локальных аналитических алгебр такие условия следуют из теоремы Якоби о неявных функциях [18].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Множество $\mathcal{B} \subset \mathcal{F}(a)$ называется *нормализованным*, если выполнены следующие условия:

1) любой элемент $f \in \mathcal{B}$ имеет вид

$$f = u_\alpha^i + g, \quad (2.6)$$

при этом переменные u_α^i образуют подмножество $\mathcal{L}$ в U , а $\text{iv}(g) \in Y \setminus \mathcal{L}$;

2) если $f_1 = u_\alpha^i + g_1$, $f_2 = u_\alpha^i + g_2 \in \mathcal{B}$, то $g_1 = g_2$.

В этом случае $\mathcal{L}$ называется множеством *главных переменных*, а $\mathcal{P} = Y \setminus \mathcal{L}$ называется множеством *параметрических переменных* системы $\mathcal{B}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В теории Жане–Рикье [19] используются понятия главных и параметрических производных ортономных систем.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Система образующих $\mathcal{B}$ идеала алгебры $\mathcal{F}(a)$ называется *нормализованной*, если $\mathcal{B}$ – нормализованное множество в $\mathcal{F}(a)$.

Всюду в дальнейшем мы будем использовать понятие системы образующих идеала в стандартном смысле [17], несмотря на то что рассматриваемые идеалы часто будут дифференциальными.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Для заданного дифференциального идеала нормализованная система образующих может быть не единственной. Достаточные условия существования нормализованной системы образующих получены в статье [20].

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Точка $a \in \mathbb{K}^{n+\infty}$ является неособой для $S \subset \mathcal{F}(a)$, если идеал $\langle\langle S \rangle\rangle$ обладает нормализованной системой образующих $\mathcal{B}$ и $\langle\langle S \rangle\rangle \neq \mathcal{F}(a)$. При этом локальная алгебра $\mathcal{O}_S(a)$ точки a изоморфна алгебре $\mathbb{K}[\langle \mathcal{P} \rangle]_a$, где $\mathcal{P}$ – множество параметрических переменных системы $\mathcal{B}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем произвольный ряд $f \in \mathcal{F}(a)$. Если f не зависит от главных переменных нормализованной системы образующих $\mathcal{B}$ идеала $\langle\langle S \rangle\rangle$, то $f \in \mathbb{K}[\langle \mathcal{P} \rangle]_a$.

Предположим, что f зависит от главных переменных $y_1, \dots, y_p$ системы образующих $\mathcal{B}$. Тогда найдутся ряды $f_1, \dots, f_p \in \mathcal{B}$ такие, что

$$f_i = y_i + h_i, \quad i = 1, \dots, p, \quad h_i \in \mathbb{K}[\langle \mathcal{P} \rangle]_a.$$

Используя теорему Вейерштрасса о делении [18], [20], [21], мы можем представить ряд f в виде

$$f = \sum_{i=1}^p q_i f_i + r, \quad r, q_i \in \mathcal{F}(a),$$

где r не зависит от главных переменных из $\mathcal{L}$ и определяется однозначно. Следовательно, r лежит в $\mathbb{K}[\langle \mathcal{P} \rangle]_a$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Сходящийся дифференциальный ряд $f \in \mathcal{F}$ вида (2.6) называется *разрешимым* относительно u_α^i , если g не зависит от элементов орбиты $O(u_\alpha^i)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Множество $S \subset \mathcal{F}(a)$ называется *пассивным* (в точке a), если:

- 1) существует нормализованная система образующих $\mathcal{B}$ дифференциального идеала $\langle\langle S \rangle\rangle$;
- 2) каждый ряд $f \in S$ разрешим относительно некоторого элемента u_α^i и при этом объединение орбит элементов u_α^i совпадает с множеством главных переменных системы $\mathcal{B}$.

В этом случае объединение орбит элементов u_α^i обозначается как $O(\text{st } S)$, а элемент, относительно которого разрешим ряд $f \in S$, обозначается через $\text{st } f$.

Ниже приведено необходимое условие пассивности множества.

ЛЕММА 1. Если S – пассивное множество, то любой элемент идеала $\langle\langle S \rangle\rangle$ зависит хотя бы от одного элемента орбиты $O(\text{st } S)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что найдется ненулевой ряд $h \in \langle\langle S \rangle\rangle$, не зависящий от элементов орбиты $O(\text{st } S)$. Так как S – пассивное множество и ряд h лежит в идеале, порожденном нормализованной системой образующих $\mathcal{B}$, мы имеем

$$h = \sum_{j=1}^p a_j b_j, \tag{2.7}$$

где $a_j \in \mathcal{F}(a)$, $b_j \in \mathcal{B}$. Поскольку $b_1, \dots, b_p$ принадлежат нормализованному множеству $\mathcal{B}$, матрица Якоби от этих рядов по переменным $\text{st } b_1, \dots, \text{st } b_p$ является единичной.

Теперь обозначим переменные, от которых зависят ряды $a_1, \dots, a_p, b_1, \dots, b_p$, через $y_1, \dots, y_r$, полагая при этом $y_1 = \text{st } b_1, \dots, y_p = \text{st } b_p$. Выполним замену переменных

$$z_1 = b_1, \quad \dots, \quad z_p = b_p.$$

По теореме о неявных функциях последние соотношения можно разрешить относительно $y_1, \dots, y_p$. Подставляя найденные $y_1, \dots, y_p$ в (2.7), получаем представление

$$h = \sum_{j=1}^p \tilde{a}_j z_j,$$

где h может зависеть только от $y_{p+1}, \dots, y_r$. Поскольку правая часть последнего соотношения зависит хотя бы от одной из переменных $z_1, \dots, z_p$, мы приходим к противоречию.

Хотелось бы обратить внимание на следующий вопрос: верно ли утверждение, что если a – неособая точка для $S \subset \mathcal{F}(a)$, то идеал $\langle\langle S \rangle\rangle$ обладает пассивным множеством? Положительный ответ на этот вопрос означал бы, что пассивность равносильна регулярности.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Пассивное множество является аналогом базиса Грёбнера идеала кольца многочленов. Однако в нашем определении не используется порядок. С другой стороны, порядок и другие алгебраические структуры полезны для получения критерия пассивности множества.

3. СТРАТИФИЦИРОВАННЫЕ МНОЖЕСТВА И РЕДУКЦИИ

Введем сначала определения, которые нам скоро понадобятся. В дальнейшем $(\Gamma, \leq)$ обозначает вполне упорядоченное множество. Пусть на множестве A действует полугруппа G , т.е. задано отображение $(g, a) \rightarrow ga$ множества $G \times A$ в A , удовлетворяющее условию

$$g_1(g_2a) = (g_1g_2)a \quad \text{для всех } a \in A, \quad g_1, g_2 \in G.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. Пусть $\{A_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ – разбиение множества A . Полугруппа G , действующая на A , *сохраняет разбиение*, если для любого $g \in G$, для любого $\gamma \in \Gamma$ и для всех $a, b \in A_\gamma$ найдется γ' такое, что $ga, gb \in A_{\gamma'}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9. Пусть задано разбиение $\{A_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ множества A , полугруппа G , действующая на A и сохраняющая это разбиение. Множество A называется *стратифицированным G -множеством*, если на нем задано рефлексивное (иррефлексивное) транзитивное отношение $\prec$, для всех $g \in G$ удовлетворяющее условиям:

- 1) $a \prec b$ влечет $ga \prec gb$;
- 2) $a \prec ga$ для любого $a \in A$.

Введем множества

$$\hat{\mathcal{F}}(a) = \mathcal{F}(a) \setminus \mathbb{K}[\langle X \rangle]_a, \quad \hat{\mathcal{F}} = \bigcup_{a \in \mathbb{K}^{n+\infty}} \hat{\mathcal{F}}(a),$$

где $\mathbb{K}[\langle X \rangle]_a$ задано формулой (2.5). Любое разбиение $\{U_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ множества U порождает разбиения множеств $\hat{\mathcal{F}}(a)$, $\hat{\mathcal{F}}$ следующим образом. Рассмотрим семейство множеств

$$Y_\gamma = X \cup \left(\bigcup_{\gamma' \leq \gamma} U_{\gamma'} \right).$$

Возьмем точку $a \in \mathbb{K}^{n+\infty}$ и подалгебру

$$\mathcal{F}_\gamma(a) = \{f \in \mathcal{F}(a) : \text{iv}(f) \in Y_\gamma\}.$$

Тогда семейства $\{\mathcal{F}_\gamma(a)\}_{\gamma \in \Gamma}$, $\{\mathcal{F}_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$, где

$$\mathcal{F}_\gamma = \bigcup_{a \in \mathbb{K}^{n+\infty}} \mathcal{F}_\gamma(a),$$

порождают разбиения $\{\Phi_\gamma(a)\}_{\gamma \in \Gamma}$, $\{\mathcal{F}_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ множеств $\widehat{\mathcal{F}}(a)$, $\widehat{\mathcal{F}}$ на блоки:

$$\Phi_\gamma(a) = \mathcal{F}_\gamma(a) \setminus \left(\bigcup_{\gamma' < \gamma} \mathcal{F}_{\gamma'}(a) \right), \quad \Phi_\gamma = \mathcal{F}_\gamma \setminus \left(\bigcup_{\gamma' < \gamma} \mathcal{F}_{\gamma'} \right). \quad (3.1)$$

Разбиение $\{\Phi_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ индуцирует иррефлексивное транзитивное отношение на $\widehat{\mathcal{F}}$

$$f \prec g \iff \exists \gamma, \gamma': f \in \Phi_\gamma, g \in \Phi_{\gamma'}, \gamma < \gamma' \quad (3.2)$$

и рефлексивное транзитивное отношение

$$f \preceq g \iff \exists \gamma, \gamma': f \in \Phi_\gamma, g \in \Phi_{\gamma'}, \gamma \leq \gamma'. \quad (3.3)$$

Аналогичным образом вводят отношения $\prec$ и $\preceq$ на $\widehat{\mathcal{F}}(a)$.

На множествах U , $\widehat{\mathcal{F}}(a)$, $\widehat{\mathcal{F}}$ действие полугруппы $\mathbb{N}_{-0}^n = \mathbb{N}^n \setminus \vec{0}$, где $\vec{0}$ – кортеж из нулей, задается формулами

$$\alpha u_\beta^i = u_{\alpha+\beta}^i, \quad \alpha f = D^\alpha(f). \quad (3.4)$$

Всюду в дальнейшем предполагается, что $\widehat{\mathcal{F}}$ и $\widehat{\mathcal{F}}(a)$ являются стратифицированными $\mathbb{N}_{-0}^n$ -множествами с отношением (3.2). В работе [20] показано, что если U является стратифицированным $\mathbb{N}_{-0}^n$ -множеством, то $\widehat{\mathcal{F}}$ – также стратифицированное $\mathbb{N}_{-0}^n$ -множество.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10. Подмножество S в $\mathcal{F}$ называется *слабо разрешимым*, если каждый ряд $f \in S$ имеет вид $f = u_\alpha^i + h$ с некоторыми $u_\alpha^i \in U$, $h \in \mathcal{F}$ такими, что $h \prec u_\alpha^i$. При этом элемент u_α^i называется *старшим членом* f и обозначается как $\text{lt } f$.

Следующее утверждение позволяет ввести “частичное деление” в алгебре $\mathcal{F}(a)$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Пусть f – произвольный ряд из алгебры $\mathcal{F}(a)$ и $u_\alpha^i \in \text{iv}(f)$. Предположим, что ряд $g \in \mathcal{F}(a)$ имеет вид $g = u_\beta^i + h$, где $u_\beta^i \in U$, $h \prec u_\beta^i$, и найдется элемент $\delta \in \mathbb{N}^n$ такой, что $u_\alpha^i = u_{\beta+\delta}^i$. Тогда существуют единственные ряды $q, r \in \mathcal{F}(a)$, удовлетворяющие соотношениям

$$f = qD^\delta g + r, \quad (3.5)$$

$$q \preceq f, \quad r \preceq f, \quad u_\alpha^i \notin \text{iv}(r). \quad (3.6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из теоремы Вейерштрасса о делении [18], [21] следует существование и единственность рядов $q, r \in \mathcal{F}(a)$, удовлетворяющих (3.5) и соотношениям

$$\text{iv}(q) \subseteq (\text{iv}(f) \cup \text{iv}(D^\delta g)), \quad \text{iv}(r) \subset (\text{iv}(f) \cup \text{iv}(D^\delta g)), \quad u_\alpha^i \notin \text{iv}(r). \quad (3.7)$$

Поскольку $\text{lt}(D^\delta g) = u_\alpha^i \in \text{iv}(f)$, мы имеем

$$D^\delta g \preceq f. \quad (3.8)$$

Тогда из формул (3.7) и (3.8) следует (3.6).

Будем говорить, что $f \in \mathcal{F}(a)$ *одношагово редуцируется* к ряду $r \in \mathcal{F}(a)$ относительно g , если выполнены условия утверждения 2. Одношаговая редукция обозначается как $f \xrightarrow[g]{} r$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 11. Пусть $f \in \mathcal{F}(a)$, а $S = \{f_1, \dots, f_k\} \subset \mathcal{F}(a)$ – слабо разрешимое подмножество. Ряд f *редуцируется к ряду $r \in \mathcal{F}(a)$ относительно S* , если существует конечная последовательность одношаговых редукций вида

$$f \xrightarrow[f_{i_1}]{} r_1 \xrightarrow[f_{i_2}]{} r_2 \xrightarrow[f_{i_3}]{} \dots \xrightarrow[f_{i_p}]{} r, \quad (3.9)$$

где $f_{i_j} \in S$. Эта последовательность редукций кратко обозначается как $f \xrightarrow[S]{} r$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 12. Будем говорить, что ряд $f \in \mathcal{F}(a)$ *не редуцируемый* относительно слабо разрешимого множества S , если $\text{iv}(f) \cap O(\text{lt } S) = \emptyset$, где

$$\text{lt } S = \{\text{lt } f : f \in S\}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 13. Ряд $r \in \mathcal{F}(a)$ называется *нормальной формой ряда $f \in \mathcal{F}(a)$ относительно слабо разрешимого подмножества $S \subset \mathcal{F}(a)$* , если $f \xrightarrow[S]{} r$ и r – ряд, не редуцируемый относительно S .

Нормальная форма ряда f относительно S обозначается через $\text{NF}(f \downarrow S)$.

ЛЕММА 2. Пусть S – слабо разрешимое подмножество в $\mathcal{F}(a)$. Тогда ряд $f \in \mathcal{F}(a)$ либо редуцируется к нормальной форме $\text{NF}(f \downarrow S)$ относительно S , либо является не редуцируемым относительно S .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\text{iv}(f) \cap O(\text{lt } S) = \emptyset$, то f не редуцируется относительно S . Предположим теперь, что $\text{iv}(f) \cap O(\text{lt } S) \neq \emptyset$, и покажем, что f редуцируется к нормальной форме $\text{NF}(f \downarrow S)$ относительно S .

Для каждого $\gamma \in \Gamma$ и каждого $\phi \in \mathcal{F}(a)$ вводится множество

$$V_\gamma(\phi) = O(\text{lt } S) \cap \text{iv}(\phi) \cap U_\gamma.$$

Это множество конечно или пусто, так как $\text{iv}(\phi)$ конечно. Определим элемент

$$\gamma_1 = \max\{\gamma \in \Gamma : V_\gamma(f) \neq \emptyset\}.$$

Пусть множество $V_{\gamma_1}(f)$ состоит из m_{γ_1} элементов. Рассмотрим произвольный элемент $y \in V_{\gamma_1}(f)$. Согласно предположению найдется $g \in S$ такой, что $y \in O(\text{lt } g)$. Следовательно, f одношагово редуцируется к некоторому $r \in \mathcal{F}_{\gamma_1}(a)$ относительно g , причем r не зависит от y и $V_{\gamma_1}(r) \subset V_{\gamma_1}(g)$, поскольку S – слабо разрешимое множество.

Если $V_{\gamma_1}(r) \neq \emptyset$, то выбираем произвольный элемент $\tilde{y} \in V_{\gamma_1}(r)$, ряд $\tilde{g} \in S$ такой, что $\tilde{y} \in O(\text{lt } \tilde{g})$, и одношагово редуцируем r относительно $\tilde{g}$ к некоторому $\tilde{r}$ такому, что $\tilde{y} \notin \text{iv}(\tilde{r})$ и $V_{\gamma_1}(\tilde{r}) \subset V_{\gamma_1}(r)$. За m_{γ_1} шагов мы редуцируем f к некоторому $r_{m_{\gamma_1}}$ относительно S , и при этом множество $V_{\gamma_1}(r_{m_{\gamma_1}})$ будет пустым.

Если найдется элемент γ такой, что $V_\gamma(r_{m_{\gamma_1}}) \neq \emptyset$, то положим

$$\gamma_2 = \max\{\gamma \in \Gamma : V_\gamma(r_{m_{\gamma_1}}) \neq \emptyset\}.$$

Поступая описанным выше способом, редуцируем $r_{m_{\gamma_1}}$ к некоторому $r_{m_{\gamma_2}}$ относительно S , при этом $V_{\gamma_2}(r_{m_{\gamma_2}}) = \emptyset$. Продолжая этот процесс, получаем строго убывающую последовательность элементов $\gamma_1 > \gamma_2 > \dots$. Эта последовательность не может быть бесконечной, так как любое подмножество во вполне упорядоченном множестве Γ имеет минимальный элемент. Следовательно, в этом случае f редуцируется к нормальной форме $\text{NF}(f \downarrow S)$.

Доказательство леммы 2 включает способ приведения сходящегося дифференциального ряда к нормальной форме. В общем случае нормальная форма ряда f не единственна, однако для пассивных множеств справедливо следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть S – слабо разрешимое пассивное множество в $\mathcal{F}(a)$ такое, что $\text{lt } S = \text{st } S$. Если $f \in \mathcal{F}(a)$ и $\text{iv}(f) \cap O(\text{lt } S) \neq \emptyset$, то f редуцируется к единственной нормальной форме относительно S .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $\text{iv}(f) \cap O(\text{lt } S) \neq \emptyset$, существование редукции к нормальной форме следует из леммы 2. Покажем единственность нормальной формы. Пусть r_1, r_2 – две различные нормальные формы ряда f относительно S . Тогда разности $f - r_1, f - r_2$ и $r_1 - r_2$ лежат в идеале $\langle\langle S \rangle\rangle$. Согласно лемме 1 разность $r_1 - r_2$ зависит хотя бы от одного элемента орбиты $O(\text{lt } S)$. С другой стороны, поскольку r_1, r_2 являются нормальными формами, они не зависят от элементов из орбиты $O(\text{lt } S)$. Следовательно, $\text{iv}(r_1 - r_2) \cap O(\text{lt } S) = \emptyset$, и мы приходим к противоречию.

Заметим, что подобное свойство единственности нормальной формы в случае кольца полиномов Бухбергер [10] использует в определении базиса Грёбнера.

Введем на полугруппе $\mathbb{N}^n$ бинарную операцию

$$\alpha \diamond \beta = (\mu_1, \dots, \mu_n), \quad \text{где} \quad \mu_i = \max(\alpha_i, \beta_i) - \alpha_i.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 14. Пусть даны два сходящихся дифференциальных ряда из $\mathcal{F}(a)$ вида

$$f_1 = u_\alpha^i + h_1, \quad f_2 = u_\beta^i + h_2, \quad (3.10)$$

где $u_\alpha^i = \text{lt } f_1, u_\beta^i = \text{lt } f_2$. Тогда разность

$$D^{\alpha \diamond \beta} f_1 - D^{\beta \diamond \alpha} f_2 \quad (3.11)$$

называется τ -рядом от f_1, f_2 и обозначается как $\tau(f_1, f_2)$.

С помощью τ -рядов получается критерий пассивности.

ЛЕММА 3. Пусть S – слабо разрешимое подмножество в $\mathcal{F}(a)$. Множество S пассивно, а $\text{st } S = \text{lt } S$ тогда и только тогда, когда для всех пар $f_1, f_2 \in S$ ряд $\tau(f_1, f_2)$ редуцируется к нулю относительно S .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что S – пассивное множество. Поскольку $f_1, f_2 \in S$, то $\tau(f_1, f_2) \in \langle\langle S \rangle\rangle$. Если ряд $\tau(f_1, f_2)$ не равен нулю, то согласно лемме 1 он зависит от элементов орбиты $O(\text{lt } S)$. В соответствии с предложением 1 данный τ -ряд редуцируется к нормальной форме относительно S . Эта нормальная форма не зависит от элементов орбиты $O(\text{lt } S)$ и принадлежит идеалу $\langle\langle S \rangle\rangle$. Следовательно, она равна нулю.

Пусть теперь для всех пар $f_1, f_2 \in S$ ряд $\tau(f_1, f_2)$ редуцируется к нулю относительно S . Согласно соотношениям (3.5), (3.6), (3.9) это означает, что существует конечная последовательность рядов $\{r_i\}_{i=1}^{p+1} \in \mathcal{F}(a)$, связанных равенствами

$$r_i = q_i D^{\delta_i} g_i + r_{i+1}, \quad (3.12)$$

причем ряды $q_i, g_i, r_i \in \mathcal{F}(a)$ удовлетворяют условиям

$$r_0 = \tau(f_1, f_2), \quad r_{p+1} = 0, \quad q_i \preceq r_i, \quad D^{\delta_i} g_i \preceq r_i, \quad r_{i+1} \preceq r_i. \quad (3.13)$$

Таким образом, ряд $\tau(f_1, f_2)$ представляется в виде

$$\tau(f_1, f_2) = \sum_{i=1}^p q_i D^{\delta_i} g_i. \quad (3.14)$$

Легко видеть, что в силу (3.3) отношение $\preceq$ таково, что $h_1 \preceq h$ и $h_2 \preceq h$ влечет $h_1 h_2 \preceq h$, где $h_1, h_2, h \in \mathcal{F}(a)$. Тогда из формул (3.13), (3.14), (3.3) следует, что

$$q_i D^{\delta_i} g_i \preceq r_i, \quad q_i D^{\delta_i} g_i \preceq \tau(f_1, f_2).$$

Следовательно, в соответствии с теоремой 1 работы [20] S – пассивное множество.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 15. Пассивное множество $S \subset \mathcal{F}(a)$ называется *каноническим*, если каждый ряд $f \in S$ не редуцируется относительно $S \setminus f$.

ЛЕММА 4. Пусть S – слабо разрешимое пассивное множество в $\mathcal{F}(a)$ и $\text{lt } S = \text{st } S$. Тогда существует единственное каноническое множество R в $\mathcal{F}(a)$ такое, что $\langle\langle S \rangle\rangle = \langle\langle R \rangle\rangle$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Существование канонического множества доказывается непосредственным построением. Поскольку S – конечное множество, найдутся элементы $\gamma_1 < \gamma_2 < \dots < \gamma_p$ такие, что

$$S = S_{\gamma_1} \cup S_{\gamma_2} \cup \dots \cup S_{\gamma_p},$$

где $S_{\gamma_j} = S \cap \Phi_{\gamma_j}$, а блоки Φ_{γ_j} задаются формулой (3.1). Рассмотрим множество S_{γ_1} . Поскольку S – пассивное множество и $\gamma_1 = \min\{\gamma \in \Gamma: S \cap \Phi_{\gamma} \neq \emptyset\}$, любой $f \in S_{\gamma_1}$ не зависит от элементов орбиты $O(\text{lt}(S \setminus f))$.

Для каждого j (где $2 \leq j \leq p$) введем два множества

$$Q_j = R_{\gamma_1} \cup \dots \cup R_{\gamma_j}, \\ R_{\gamma_j} = \{\text{NF}(f_i \downarrow Q_{j-1}) \neq \emptyset: f_i \in S_{\gamma_j}\} \cup \{f_i \in S_{\gamma_j}: f_i \nrightarrow_{Q_{j-1}}\}.$$

Здесь запись $f_i \nrightarrow_{Q_{j-1}}$ означает, что f_i не редуцируется относительно Q_{j-1} . Кроме того, мы полагаем $R_{\gamma_1} = S_{\gamma_1}$. Покажем, что Q_p является каноническим множеством в $\mathcal{F}(a)$. Нужно показать, что любой $g \in Q_p$ не редуцируется относительно $Q_p \setminus g$.

Пусть ряд g принадлежит R_{γ_j} . Очевидно, этот ряд не редуцируется относительно $R \setminus R_{\gamma_j}$. Заметим, что если ряд $r_i = \text{NF}(f_i \downarrow Q_{j-1})$, где $f_i \in S_j$, не равен нулю, то он принадлежит Φ_{γ_j} . Действительно, если $r_i \in \Phi_{\gamma'}$ (где $\gamma' < \gamma_j$), то $\text{iv}(r_i) \cap O(\text{lt } S) = \emptyset$. С другой стороны, согласно лемме 1 любой элемент из $\langle\langle S \rangle\rangle$ зависит хотя бы от одного элемента из $O(\text{lt } S)$. Мы приходим к противоречию. Значит, $R_{\gamma_j} \subset \Phi_{\gamma_j}$.

Покажем, что если $g, h \in R_{\gamma_j}$ и $\text{lt } g = \text{lt } h$, то $g = h$. Предположим, что это не так. Тогда $g - h \neq 0$ и $g - h \in \Phi_{\gamma'}$, где $\gamma' < \gamma_j$. Поскольку ряды g, h не редуцируются относительно Q_{j-1} , их разность тоже не редуцируется относительно Q_{j-1} . По лемме 1 любой элемент из $\langle\langle S \rangle\rangle$ зависит хотя бы от одного элемента из $O(\text{lt } S)$. Поэтому $g - h = 0$, и существование доказано.

Остается доказать единственность. Предположим, что существует каноническое множество $\tilde{R}$, не совпадающее с R . По условию S является пассивным множеством и $\langle\langle R \rangle\rangle = \langle\langle \tilde{R} \rangle\rangle = \langle\langle S \rangle\rangle$. Следовательно, верны равенства

$$O(\text{lt } S) = O(\text{lt } R) = O(\text{lt } \tilde{R}), \quad \text{lt } R = \text{lt } \tilde{R}.$$

Возьмем два элемента $g \in R, \tilde{g} \in \tilde{R}$ таких, что $\text{lt } g = \text{lt } \tilde{g}$. Покажем, что $g = \tilde{g}$. Предположим, что это неверно. Тогда $g - \tilde{g} \neq 0$ и $\text{iv}(g - \tilde{g}) \cap O(\text{lt } S) \neq \emptyset$ согласно лемме 1. Поскольку множества $R, \tilde{R}$ канонические, ряды $g, \tilde{g}$ не зависят от элементов из орбит $O(\text{lt}(R \setminus g)) = O(\text{lt}(\tilde{R} \setminus \tilde{g}))$. Следовательно, разность $g - \tilde{g}$ не зависит от элементов орбиты $O(\text{lt}(R \setminus g))$. Очевидно, верны формулы

$$O(\text{lt } S) = O(\text{lt } R) = O(\text{lt}(R \setminus g)) \cup O(\text{lt } g), \quad \text{iv}(g - \tilde{g}) \cap O(\text{lt } g) = \emptyset.$$

Таким образом, $\text{iv}(g - \tilde{g}) \cap O(\text{lt } S) = \emptyset$.

4. ПОСТРОЕНИЕ ПАССИВНЫХ МНОЖЕСТВ И ПРИМЕРЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

Если множество $S \subset \mathcal{F}(a)$ не является пассивным, то возникает проблема построения такого пассивного множества $P \subset \mathcal{F}(a)$, что $\langle\langle S \rangle\rangle = \langle\langle P \rangle\rangle$. Необходимо иметь удобный критерий существования пассивного множества для данного дифференциального идеала. Эти вопросы рассматривались в классических и современных работах, но, по-видимому, не нашли окончательного решения. Мы опишем схему построения пассивного множества, укажем на проблемы ее реализации и приведем некоторые примеры.

Сначала докажем утверждение, которое можно использовать при исследовании пассивности. Обозначим через $\mathbb{K}_n(c)$ алгебру сходящихся степенных рядов (с центром в точке $c \in \mathbb{K}^n$), зависящих от n переменных $x_1, \dots, x_n$. Множество

$$\mathfrak{m}_n(c) = \{f \in \mathbb{K}_n(c) : f(c) = 0\}$$

образует максимальный идеал алгебры $\mathbb{K}_n(c)$. Нам понадобится следующее уточнение теоремы о неявных функциях.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть $f_1, \dots, f_k \in \mathfrak{m}_n(c)$ и якобиан $\frac{\partial(f_1, \dots, f_k)}{\partial(x_1, \dots, x_k)}(c)$ не равен нулю. Тогда существуют ряды $g_1, \dots, g_k \in \mathfrak{m}_n(c)$ вида

$$g_i = x_i + h_i \tag{4.1}$$

и квадратная матрица A k -го порядка с элементами из $\mathbb{K}_n(c)$ такая, что

$$(f_1, \dots, f_k) = (g_1, \dots, g_k)A, \quad A(c) = \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_l} \right)(c), \tag{4.2}$$

где $j, l \in \mathbb{N}_k$, и при этом ряды h_i не зависят от $x_1, \dots, x_k$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условий предложения и теоремы о неявных функциях следует, что существуют ряды $g_1, \dots, g_k \in \mathfrak{m}_n(c)$ вида (4.1) такие, что

$$f_i(-h_1, \dots, -h_k, x_{k+1}, \dots, x_n) = 0, \quad i \in \mathbb{N}_k. \quad (4.3)$$

Из теоремы Вейерштрасса о делении [18] вытекает представление [20]

$$f_j = \sum_{i=1}^k g_i a_{ji} + r_j, \quad j \in \mathbb{N}_k, \quad (4.4)$$

где $r_j, a_{i,j} \in \mathbb{K}_n(c)$ и $\text{iv}(r_j) \cap \{x_1, \dots, x_k\} = \emptyset$. Подставим в (4.4) вместо $x_1, \dots, x_k$ ряды $-h_1, \dots, -h_k$. Тогда из соотношений (4.1), (4.3) следует, что ряды r_j нулевые. Следовательно, первая формула в (4.2) верна.

Докажем, что верна вторая формула в (4.2). Дифференцируя равенство (4.4) по x_l (при $r = 0$, $l \in \mathbb{N}_k$), получим

$$\frac{\partial f_j}{\partial x_l} = \sum_{i=1}^k \frac{\partial g_i}{\partial x_l} a_{ji} + \sum_{i=1}^k g_i \frac{\partial a_{ji}}{\partial x_l}. \quad (4.5)$$

Поскольку для всех $i, l \in \mathbb{N}_k$ выполняются равенства

$$g_i(c) = 0, \quad \frac{\partial g_i}{\partial x_l}(c) = \delta_l^i,$$

где δ_l^i – символ Кронекера, из (4.5) следует, что $\frac{\partial f_j}{\partial x_l}(c) = a_{jl}(c)$. Это доказывает вторую формулу в (4.2).

Вернемся к изучению свойств алгебры $\mathcal{F}(a)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 16. Будем говорить, что кортежи $\bar{f}^1, \bar{f}^2 \in \mathcal{F}^k(a)$ подобны, если существует невырожденная в точке a квадратная матрица A k -го порядка с элементами из $\mathcal{F}(a)$ такая, что $\bar{f}^1 = \bar{f}^2 A$. Два множества $R_1, R_2 \subset \mathcal{F}(a)$ из k элементов называются эквивалентными, если кортежи $\bar{f}^1, \bar{f}^2 \in \mathcal{F}^k(a)$, составленные из элементов множеств R_1, R_2 соответственно, являются подобными.

Очевидно, эквивалентные множества порождают совпадающие дифференциальные идеалы. Используя эквивалентные множества, можно в определенных случаях решить проблему построения пассивного множества для данного дифференциального идеала, порожденного конечным подмножеством в $\mathcal{F}(a)$. Приведем схему построения пассивного множества.

Пусть $\widehat{\mathcal{F}}$ является стратифицированным $\mathbb{N}_{>0}^n$ -множеством. Предположим, что $S = \{f_1, \dots, f_k\}$ не является слабо разрешимым множеством в $\mathcal{F}$ и существует точка c , в которой обращаются в ноль все ряды из S , а ранг матрицы Якоби $(\frac{\partial f_j}{\partial z_i})(c)$ равен $p > 0$ (здесь z_i – переменные, от которых зависят ряды $f_j \in S$). Тогда найдется минор $\frac{\partial(f_{i_1}, \dots, f_{i_p})}{\partial(z_{i_1}, \dots, z_{i_p})}(c)$, не равный нулю. Согласно предложению 2 существуют ряды вида

$$g_1 = z_{i_1} + h_1, \quad \dots, \quad g_p = z_{i_p} + h_p$$

такие, что кортежи $(f_{i_1}, \dots, f_{i_p}), g_1, \dots, g_p$ подобны. Если $h_1 \prec z_{i_1}, \dots, h_p \prec z_{i_p}$, то множество $\tilde{S} = \{g_1, \dots, g_p\}$ слабо разрешимо. Проверяем, что любой ряд $f \in S$

редуцируется к нулю относительно $\tilde{S}$. Затем редуцируем все τ -ряды вида (3.11), составленные из всех пар $f_1, f_2 \in \tilde{S}$, к нормальным формам относительно $\tilde{S}$. Обозначим через S_1 множество нормальных форм, не равных нулю. Если множество S_1 не является слабо разрешимым, то к нему применяем описанную выше процедуру и получаем слабо разрешимое множество $\tilde{S}_1$. Далее проверяем множество $\tilde{S} \cup \tilde{S}_1$ на пассивность, редуцируя τ -ряды к нормальным формам относительно $\tilde{S} \cup \tilde{S}_1$. Если $\tilde{S} \cup \tilde{S}_1$ не пассивно, то, поступая описанным выше способом, получаем множество $\tilde{S}_2$ и множество $\tilde{S} \cup \tilde{S}_1 \cup \tilde{S}_2$. Проверяем последнее множество на пассивность и так далее. Как будет показано ниже, после конечного числа шагов мы получим пассивное множество.

Чтобы доказать конечность числа шагов в описанной выше схеме, рассмотрим кольцо $\mathcal{M}$ многочленов $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ и векторное пространство $\mathbb{K}U$ над $\mathbb{K}$, порожденное множеством U (2.2). Несложно доказать [20], что $\mathbb{K}U$ можно наделить структурой левого $\mathcal{M}$ -модуля, и этот модуль изоморфен нётерову модулю M^n . Обозначим объединение $\tilde{S} \cup \tilde{S}_1 \dots \cup \tilde{S}_i$ через Q_i , а $\tilde{S}$ – через Q_0 . Предположим, что для любого i множество Q_i строго содержится в Q_{i+1} . Этой строго возрастающей цепочке множеств соответствует строго возрастающая цепочка старших членов

$$\text{lt } Q_0 \subset \text{lt } Q_1 \subset \dots \subset \text{lt } Q_i \subset \dots.$$

Включения в этой цепочке строгие, так как $\tilde{S}_i$ состоит из нормальных форм относительно Q_{i-1} . В свою очередь, последней цепочке соответствует цепочка подмодулей

$$[\text{lt } Q_0] \subset [\text{lt } Q_1] \subset \dots \subset [\text{lt } Q_i] \subset \dots,$$

где $[\text{lt } Q_i]$ – подмодуль $\mathcal{M}$ -модуля $\mathbb{K}U$, порожденный множеством Q_i . Поскольку модуль $\mathbb{K}U$ нётеров, у него не может существовать строго возрастающей бесконечной цепочки подмодулей. Мы пришли к противоречию.

В общем случае мы не можем гарантировать, что описанная выше схема работает, поскольку могут не выполняться условия предложения 2.

Приведем примеры построения пассивных множеств.

ПРИМЕР 1. Пусть $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ – поле вещественных чисел, $m = 1$, $n = 2$. Рассмотрим множество $S = \{f_1, f_2\} \subset \mathcal{F}$, состоящее из двух сходящихся дифференциальных рядов

$$f_1 = u_{(1,1)} - \sin u_{(0,0)}, \quad f_2 = u_{(0,3)} + \frac{1}{2}u_{(0,1)}^3.$$

Множество U разбивается на подмножества $U_i = \{u_\alpha : |\alpha| = i\}$ и становится стратифицированным $\mathbb{N}_{-0}^2$ -множеством. Мы хотим найти пассивное множество $Q \subset \mathcal{F}(a)$ такое, что $\langle\langle Q \rangle\rangle = \langle\langle S \rangle\rangle$. Ограничения на точку $a \in \mathbb{K}^{n+\infty}$ возникают в процессе вычислений.

Далее будут использоваться более привычные обозначения

$$D_t = D_1, \quad D_x = D_2, \quad u = u_{(0,0)}, \quad u_t = u_{(1,0)}, \quad u_x = u_{(0,1)}, \quad u_{tx} = u_{(1,1)}.$$

Множеству S соответствует система уравнений с частными производными

$$u_{tx} - \sin u = 0, \quad u_{xxx} + \frac{1}{2}u_x^3 = 0. \quad (4.6)$$

Вычисляем τ -ряд от f_1, f_2 :

$$\tau(f_1, f_2) = D_x^2 f_1 - D_t f_2 = u_x^2 \sin u - u_{xx} \cos u - \frac{3}{2} u_{tx} u_x^2.$$

Очевидно, ряд $\tau(f_1, f_2)$ редуцируется к нормальной форме

$$f_3 = -u_{xx} \cos u - \frac{1}{2} u_x^2 \sin u$$

относительно S . Следовательно, согласно лемме 1 множество S не является пассивным. Если $\cos u \neq 0$, то f_3 эквивалентен ряду $\tilde{f}_3 = u_{xx} + u_x^2 \operatorname{tg}(u)/2$.

Теперь нужно проверить на пассивность множество $S_1 = \{f_1, f_2, \tilde{f}_3\}$. Вычисляя τ -ряд

$$\tau(f_1, \tilde{f}_3) = D_x(u_{tx} - \sin u) - D_t\left(u_{xx} + \frac{u_x^2}{2} \operatorname{tg} u\right) = -u_x \cos u - u_{tx} u_x \operatorname{tg} u - \frac{u_t u_x^2}{2 \cos^2 u}$$

и редуцируя его к нормальной форме относительно S_1 , получаем

$$f_4 = -\frac{u_x}{2 \cos^2 u} (u_t u_x + 2 \cos u).$$

Если $u_x \neq 0$, то f_4 эквивалентен ряду

$$\tilde{f}_4 = u_t + \frac{2 \cos u}{u_x}.$$

Несложно вычислить, что ряды f_1, f_2 лежат в идеале $\langle\langle f_3, f_4 \rangle\rangle$ и ряд $\tau(\tilde{f}_3, \tilde{f}_4)$ редуцируется к нулю относительно множества $\{\tilde{f}_3, \tilde{f}_4\}$.

Таким образом, $\{\tilde{f}_3, \tilde{f}_4\}$ является искомым пассивным множеством. Это пассивное множество порождает тот же дифференциальный идеал, что и первоначальное множество $\{f_1, f_2\}$. Его можно использовать, чтобы найти решения системы (4.6). Для этого достаточно проинтегрировать систему

$$\tilde{f}_3 = 0, \quad \tilde{f}_4 = 0. \quad (4.7)$$

Сначала рассмотрим первое уравнение

$$u_{xx} + \frac{u_x^2}{2} \operatorname{tg} u = 0$$

системы (4.7). Разделим данное уравнение на u_x и найдем первый интеграл

$$\frac{u_x}{\sqrt{\cos u}} = c,$$

где c – пока произвольная функция от t . Подставляя первый интеграл во второе уравнение системы (4.7), получим систему первого порядка

$$u_x - c \sqrt{\cos u} = 0, \quad u_t + \frac{2 \sqrt{\cos u}}{c} = 0. \quad (4.8)$$

Составляя τ -ряд от левых частей системы (4.8) и редуцируя его к нормальной форме, видим, что нормальная форма равна нулю только при $c = \text{const}$. В этом случае неявное решение системы (4.8) имеет вид

$$\int \frac{du}{\sqrt{\cos u}} = cx - \frac{2t}{c} + c_1,$$

где c_1 – произвольная константа. Полученное решение уравнения синус-гордон инвариантно относительно преобразований растяжений и переносов.

ПРИМЕР 2. В качестве второго примера рассмотрим уравнение акустики в неоднородной среде [22]

$$\frac{p_{tt}}{\rho c^2} = \left(\frac{p_x}{\rho} \right)_x + \left(\frac{p_y}{\rho} \right)_y + \left(\frac{p_z}{\rho} \right)_z, \quad (4.9)$$

где p – давление, ρ – плотность, c – скорость звука. Давление является искомой функцией, а плотность и скорость звука – заданными функциями от x, y, z . Будем считать сначала, что ρ и c – произвольные положительные функции. Если ввести новую функцию $P = p/\sqrt{\rho}$, то уравнение (4.9) принимает вид

$$P_{tt} = c^2(\Delta P + qP). \quad (4.10)$$

Здесь Δ – трехмерный оператор Лапласа, а функция q выражается через ρ :

$$q = -\frac{\Delta(\sqrt{\rho})}{\sqrt{\rho}}.$$

Мы хотим найти некоторые решения уравнения (4.10). Предположим, что P удовлетворяет дополнительному уравнению

$$P_t = aP_x + bP_y, \quad (4.11)$$

считая, что a, b, c являются функциями только переменной x .

Уравнениям (4.10), (4.11) соответствуют два дифференциальных ряда

$$e_0 = P_{tt} - c^2(\Delta P + qP), \quad e_1 = P_t - aP_x - bP_y.$$

Множество $S = \{e_0, e_1\}$ не является пассивным при произвольных функциях a, b, c . Получим условия, при выполнении которых множество S становится пассивным. Для этого редуцируем e_0 относительно e_1 к нормальной форме, т. е. избавимся от слагаемого P_{tt} в e_0 . Несложно видеть, что нормальная форма имеет вид

$$\begin{aligned} e_2 &= e_0 - D_t e_1 - a D_x e_1 - b e_1 = \\ &= (a^2 - c^2) P_{xx} + a(a' + 2b) P_x - c^2(P_{yy} + P_{zz}) + (ab' + b^2 - qc^2) P. \end{aligned}$$

Предположим теперь, что $c = a, b = -a'/2$. Тогда e_2 заметно упрощается:

$$e_2 = -a^2(P_{yy} + P_{zz}) + \left(-\frac{aa''}{2} + \frac{(a')^2}{4} - qa^2 \right) P.$$

При $a \neq 0$ ряд e_2 эквивалентен

$$\tilde{e}_3 = P_{yy} + P_{zz} + \left(\frac{aa''}{2a} + \frac{(a')^2}{4a^2} - q \right) P.$$

Предположим теперь, что

$$q = -\frac{aa''}{2a} + \frac{(a')^2}{4a^2} + h,$$

где h зависит только от y и z . Тогда ряд $\tilde{e}_3$ будет иметь вид

$$\tilde{e}_3 = P_{yy} + P_{zz} + hP.$$

Несложно видеть, что множество $S_1 = \{e_1, \tilde{e}_3\}$ пассивное и

$$e_0 = D_t e_1 + a D_x e_1 + b e_1 - a^2 \tilde{e}_3.$$

Следовательно, некоторые решения уравнения (4.10) можно найти, решив систему

$$e_1 = 0, \quad \tilde{e}_3 = 0. \quad (4.12)$$

Решение первого уравнения

$$P_t - aP_x + a' \frac{P}{2} = 0 \quad (4.13)$$

системы (4.12) сводится к интегрированию обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx}{a} = -2 \frac{dP}{a'P}.$$

Следовательно, общее решение уравнения (4.13) имеет вид

$$P = \sqrt{a(x)} f \left(t - \int \frac{dx}{a(x)}, y, z \right).$$

Согласно второму уравнению системы (4.12) функция f должна удовлетворять уравнению

$$f_{yy} + f_{zz} + hf = 0. \quad (4.14)$$

Если $h = 0$, то получаем уравнение Лапласа. При специальном выборе функции h уравнение (4.14) сводится к уравнению Лапласа [23]. Если функции f и h не зависят от z , то (4.14) становится линейным обыкновенным уравнением

$$f'' + hf = 0,$$

которое при специальном выборе h может быть проинтегрировано в явном виде [24].

Благодарности. Автор благодарен рецензенту за полезные замечания, позволившие улучшить изложение результатов статьи. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты № 12-01-00648_а, 10-01-00435_а), а также при поддержке гранта Правительства РФ для проведения исследований под руководством ведущих ученых в Сибирском федеральном университете (договор № 14.Y26.31.0006).

Список литературы

- [1] J. Molk (ed.), *Encyclopédie des sciences mathématiques*. II, v.4: *Équations aux dérivées partielles*, Jacques Gabay, Paris, 1916.
- [2] M. E. Goursat, *Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second order à deux variables indépendantes*, v. II, Librairie scientifique A. Hermann, Paris, 1898.
- [3] M. Kuranishi, *Lectures on Involutive Systems of Partial Differential Equations*, Publ. Soc. Mat., São Paulo, 1967.
- [4] Д. Спенсер, "Переопределенные системы линейных дифференциальных уравнений в частных производных", Сб. переводов, Математика, **14**, вып. 3, Мир, М., 1970, 99–126.
- [5] Ж.-Ф. Поммаре, *Системы уравнений с частными производными и псевдогруппы Ли*, Мир, М., 1983.
- [6] А. М. Виноградов, "Геометрия нелинейных дифференциальных уравнений", Итоги науки и техн. Сер. Пробл. геом., **11**, ВИНТИ, М., 1980, 89–134.
- [7] A. D. Wittkopf, *Algorithms and implementations for differential elimination*, PhD. Thesis, Simon Fraser University, Burnaby, British Columbia, Canada, 2004.
- [8] M. Marvan, *Found. Comput. Math.*, **9**:6 (2009), 651–674.
- [9] V. P. Gerdts, Yu. A. Blinkov, "Janet-like monomial division", *Computer Algebra in Scientific Computing/CASC 2005* (Kalamata, Greece, September 12–16, 2005), Lecture Notes in Computer Science, **3718**, Springer, Berlin, 2005, 174–183; "Janet-like Gröbner bases", *Computer Algebra in Scientific Computing/CASC 2005* (Kalamata, Greece, September 12–16, 2005), Lecture Notes in Computer Science, **3718**, Springer, Berlin, 2005, 184–195.
- [10] Б. Бухбергер, "Базисы Грёбнера. Алгоритмический метод в теории полиномиальных идеалов", *Компьютерная алгебра. Символьные и алгебраические вычисления*, ред. Б. Бухбергер, Дж. Коллинз, Р. Лоос, Мир, М., 1986, 331–372.
- [11] Д. Кокс, Дж. Литтл, Д. О'Ши, *Идеалы, многообразия и алгоритмы*, Мир, М., 2000.
- [12] Л. В. Овсянников, *Групповой анализ дифференциальных уравнений*, Наука, М., 1978.
- [13] Н. Х. Ибрагимов, *Группы преобразований в математической физике*, Наука, М., 1983.
- [14] А. Ф. Сидоров, В. П. Шапеев, Н. Н. Яненко, *Метод дифференциальных связей и его приложения в газовой динамике*, Наука, Новосибирск, 1984.
- [15] В. И. Фулич, А. Г. Никитин, *Симметрия уравнений квантовой механики*, Наука, М., 1990.
- [16] М. Абловиц, Х. Сигур, *Солитоны и метод обратной задачи*, Мир, М., 1987.
- [17] М. Атья, И. Макдональд, *Введение в коммутативную алгебру*, Мир, М., 1972.
- [18] Г. Грауэрт, Р. Реммерт, *Аналитические локальные алгебры*, Наука, М., 1988.
- [19] J. Ritt, *Differential Algebra*, AMS, New York, 1950.
- [20] О. В. Капцов, *Программирование*, **40**:2 (2014), 32–40.
- [21] О. Зарисский, П. Самюэль, *Коммутативная алгебра*, т. 2, ИЛ, М., 1963.
- [22] Л. М. Бреховских, *Волны в слоистых средах*, Наука, М., 1973.
- [23] О. В. Капцов, *Методы интегрирования уравнений с частными производными*, Физматлит, М., 2009.
- [24] V. B. Matveev, M. A. Salle, *Darboux Transformations and Solitons*, Springer, New York, 1991.

Поступила в редакцию 2.07.2014