Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Э. Муминов, Н. М. Алиев, О дискретном спектре некомпактного возмущения трехчастичного оператора Шредингера на решетке, *ТМФ*, 2015, том 182, номер 3, 435–452

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8764>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.92.164.108

26 апреля 2023 г., 16:24:51

© 2015 г.

М. Э. Муминов*, Н. М. Алиев†

О ДИСКРЕТНОМ СПЕКТРЕ НЕКОМПАКТНОГО ВОЗМУЩЕНИЯ ТРЕХЧАСТИЧНОГО ОПЕРАТОРА ШРЕДИНГЕРА НА РЕШЕТКЕ

Рассмотрена система трех произвольных квантовых частиц на трехмерной решетке, взаимодействующих с помощью парных контактных потенциалов притяжения и потенциалов притяжения частиц в ближайших соседних узлах. Доказана бесконечность числа собственных значений гамильтониана соответствующей системы трех частиц. Указаны различные типы потенциалов притяжения, для которых собственные значения могут лежать левее существенного спектра, в лакуне существенного спектра, а также в существенном спектре рассматриваемого оператора.

Ключевые слова: трехчастичная система на решетке, оператор Шредингера, асимптотика числа собственных значений, бесконечность числа собственных значений в лакуне существенного спектра, бесконечность числа собственных значений в существенном спектре.

DOI: 10.4213/tmf8764

1. ВВЕДЕНИЕ

Явление существования бесконечного числа собственных значений, накапливающихся к левому краю существенного спектра оператора Шредингера (эффект Ефимова [1]), изучалось во многих работах (см., например, [2], [3]). Бесконечность числа собственных значений трехчастичного оператора Шредингера и асимптотика для их числа получены первоначально в статье [4], затем в работе [5], а также, в случае оператора на решетке, в работах [6]–[8]. В этих работах для получения указанной асимптотики построен компактный оператор $A(z)$, заданный для z , лежащих левее существенного спектра, такой, что $N(z) = n(1, A(z))$, где $N(z)$ и $n(\lambda, A)$ – число собственных значений оператора Шредингера и оператора $A(z)$, лежащих соответственно левее z и правее λ .

*Faculty of Science, Universiti Teknologi Malaysia, Johor Bahru, Malaysia.
E-mail: mmuminov@mail.ru

†Механико-математический факультет, Самаркандский государственный университет, Самарканд, Узбекистан. E-mail: nialiyev@mail.ru

Заметим, что в работах [6]–[9] бесконечное число собственных значений появляется ниже существенного спектра в случае, когда два из трех двухчастичных подгамильтонианов имеют виртуальные уровни в нуле и нуль является регулярной точкой для третьего гамильтониана или когда все двухчастичные подгамильтонианы имеют виртуальные уровни в нуле.

Непрерывный спектр трехчастичного (непрерывного) оператора Шредингера совпадает с полуосью $[-\kappa^2, \infty)$, $\kappa \geq 0$ [10]. В отличие от существенного спектра трехчастичного непрерывного оператора Шредингера существенный спектр $\sigma_{\text{ess}}(H(K))$ трехчастичного дискретного оператора Шредингера $H(K)$ может содержать лакуны, т. е. существует интервал (a, b) ,

$$\inf \sigma_{\text{ess}}(H(K)) \leq a < b \leq \sup \sigma_{\text{ess}}(H(K)),$$

такой, что $(a, b) \cap \sigma_{\text{ess}}(H(K)) = \emptyset$.

В работе [11] рассматривается система трех произвольных квантовых частиц на трехмерной решетке, взаимодействующих с помощью парных контактных потенциалов притяжения. Рассмотрен случай, когда два двухчастичных подгамильтониана имеют виртуальные уровни в нуле и нуль является регулярной точкой для третьего подгамильтониана. Найдено условие появления лакуны существенного спектра, и при нулевом значении полного квазиимпульса K доказано существование бесконечного числа собственных значений оператора $H(\mathbf{0})$ в лакуне существенного спектра. В работе [12] для системы трех произвольных квантовых частиц на трехмерной решетке, взаимодействующих с помощью короткодействующих потенциалов притяжения, построен самосопряженный компактный оператор $\mathbf{T}(z)$, определенный при z , лежащих левее существенного спектра оператора $H(K)$ (соответствующего трехчастичной системе) и в лакуне существенного спектра, если такая лакуна существует. Получена формула для числа собственных значений, лежащих в произвольном интервале вне существенного спектра этого оператора, и, в частности, доказано равенство $N(z) = n(1, \mathbf{T}(z))$ при $z < \inf \sigma_{\text{ess}}(H(K))$, а также найдено достаточное условие конечности дискретного спектра.

В настоящей работе рассматриваются возмущения системы трех произвольных квантовых частиц на трехмерной решетке, взаимодействующих с помощью парных контактных потенциалов притяжения, где в качестве возмущений берутся потенциалы притяжения частиц, взаимодействующих только в ближайших соседних узлах. Изучаются спектральные свойства соответствующего трехчастичного оператора Шредингера на решетке

$$\bar{H}^\lambda(K) = H(K) - \bar{V}^\lambda, \quad K \in \mathbb{T}^3 = (-\pi, \pi]^3, \quad \lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3),$$

при нулевом значении квазиимпульса $K = \mathbf{0}$. Сначала доказывается бесконечность числа точек дискретного спектра невозмущенного оператора $\bar{H}^0(\mathbf{0}) := H(\mathbf{0})$, накапливающихся в нуле, т. е. на левом краю существенного спектра $\sigma_{\text{ess}}(H(\mathbf{0}))$. Затем показывается, что пространство $\mathcal{H}$ собственных функций оператора $H(\mathbf{0})$, соответствующих собственным значениям, лежащим в дискретном спектре, является подпространством ядра оператора возмущения $\bar{V}^\lambda$.

Отметим, что существенный спектр $\sigma_{\text{ess}}(\bar{H}^\lambda(K))$ оператора $\bar{H}^\lambda(K)$ представляет собой объединение спектров канальных операторов $\bar{H}_\alpha^\lambda(K)$, $\alpha = 1, 2, 3$. Мы находим

(см. доказательство леммы 4) такие значения $\lambda_\alpha^0 > 0$, что при положительных λ_α , меньших этих значений, спектр оператора $\bar{H}_\alpha^\lambda(\mathbf{0})$ не меняется и совпадает со спектром невозмущенного канального оператора $\bar{H}_\alpha^0(\mathbf{0})$, а при некоторых положительных значениях λ_α , больших этих значений, в спектре оператора $\bar{H}_\alpha^\lambda(\mathbf{0})$ появляется некоторый отрезок, который находится слева от существенного спектра $\sigma_{\text{ess}}(H(\mathbf{0}))$ и удаляется от него по мере увеличения λ_α . При этом наблюдается интересная картина: при некоторых значениях λ бесконечное число собственных значений оператора $\bar{H}^\lambda(\mathbf{0})$ появляется в существенном спектре (или на левом краю существенного спектра), а при больших значениях $|\lambda|$ найденные собственные значения могут находиться в лакуне существенного спектра оператора Шредингера $\bar{H}^\lambda(\mathbf{0})$.

2. ОПИСАНИЕ ТРЕХЧАСТИЧНОГО ОПЕРАТОРА И ФОРМУЛИРОВКА ОСНОВНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Пусть $\mathbb{Z}^3$ – трехмерная целочисленная решетка и $\ell_2((\mathbb{Z}^3)^3)$ – гильбертово пространство квадратично-суммируемых функций, определенных на $(\mathbb{Z}^3)^3$.

Рассмотрим свободный гамильтониан $\hat{H}_0$ системы трех произвольных квантовых частиц на решетке $\mathbb{Z}^3$, определенный как ограниченный самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве $\ell_2((\mathbb{Z}^3)^3)$, действующий по правилу

$$\begin{aligned} (\hat{H}_0 \hat{\psi})(n_1, n_2, n_3) &= \\ &= \sum_{s \in \mathbb{Z}^3} [\hat{\varepsilon}_1(s) \hat{\psi}(n_1 + s, n_2, n_3) + \hat{\varepsilon}_2(s) \hat{\psi}(n_1, n_2 + s, n_3) + \hat{\varepsilon}_3(s) \hat{\psi}(n_1, n_2, n_3 + s)]. \end{aligned}$$

Здесь $\hat{\varepsilon}_\alpha(s)$, $\alpha = 1, 2, 3$, – вещественнозначные четные функции, описывающие перенос частицы с узла на соседний узел:

$$\hat{\varepsilon}_\alpha(s) = \begin{cases} \frac{3}{m_\alpha} & \text{при } s = 0, \\ -\frac{1}{2m_\alpha} & \text{при } s = \pm 2e_j, j = 1, 2, 3, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

где $m_\alpha > 0$ – масса частицы с номером $\alpha = 1, 2, 3$ и e_j , $j = 1, 2, 3$, – единичные орты.

Заметим, что свободный гамильтониан $\hat{H}_0$ системы трех произвольных частиц в пространстве $\ell_2((\mathbb{Z}^3)^3)$ можно представить в виде

$$\hat{H}_0 = \frac{1}{2m_1} P_2(\Delta) \times E \times E + \frac{1}{2m_2} E \times P_2(\Delta) \times E + \frac{1}{2m_3} E \times E \times P_2(\Delta),$$

где E – единичный оператор в $\ell_2(\mathbb{Z}^3)$, Δ – решеточный лапласиан,

$$(\Delta \hat{\psi})(x) = \sum_{|s|=1} [\hat{\psi}(x) - \hat{\psi}(x + s)], \quad \hat{\psi} \in \ell_2(\mathbb{Z}^3),$$

и $P_2(\Delta) = \Delta^2 - 4\Delta$.

Трехчастичный гамильтониан $\hat{H}$ системы трех квантовых частиц с парными контактными потенциалами определяется как ограниченное возмущение свободного гамильтониана $\hat{H}_0$:

$$\hat{H} = \hat{H}_0 - \mu_1 \hat{V}_1 - \mu_2 \hat{V}_2 - \mu_3 \hat{V}_3,$$

где

$$(\widehat{V}_\alpha \psi)(n_1, n_2, n_3) = \delta_{n_\beta n_\gamma} \psi(n_1, n_2, n_3), \quad \alpha \neq \beta \neq \gamma.$$

Здесь $\mu_\alpha > 0$ – энергия взаимодействия двух частиц, δ_{nm} – символ Кронекера.

Пусть $\lambda_\alpha > 0$ для $\alpha = 1, 2, 3$ и $\tilde{V}^\lambda = \lambda_1 \tilde{V}_1 + \lambda_2 \tilde{V}_2 + \lambda_3 \tilde{V}_3$ – сумма потенциалов притяжения двух частиц, взаимодействующих только в ближайших соседних узлах:

$$(\tilde{V}_\alpha \psi)(n_1, n_2, n_3) = \tilde{v}(n_\beta - n_\gamma) \psi(n_1, n_2, n_3), \quad \alpha \neq \beta \neq \gamma,$$

где

$$\tilde{v}(s) = \begin{cases} 4\pi^3 & \text{при } s = \pm e_j, \quad j = 1, 2, 3, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

В дальнейшем мы будем рассматривать возмущения $\hat{H} - \tilde{V}^\lambda$ трехчастичного гамильтониана $\hat{H}$ потенциалом $-\tilde{V}^\lambda$.

Пусть $L_2((\mathbb{T}^3)^n)$ – гильбертово пространство квадратично-интегрируемых функций, определенных на $(\mathbb{T}^3)^n$, где $\mathbb{T} = (-\pi, \pi]$, $n = 1, 2, 3$. При использовании преобразования Фурье и разложения в прямой операторный интеграл [12], [13] изучение спектральных свойств оператора $\hat{H} - \tilde{V}^\lambda$ сводится к исследованию спектральных свойств семейства самосопряженных ограниченных операторов $\bar{H}^\lambda(K)$, $K \in \mathbb{T}^3$, действующих в гильбертовом пространстве $L_2((\mathbb{T}^3)^2)$ по формуле

$$\bar{H}^\lambda(K) = H(K) - \bar{V}^\lambda,$$

где

$$H(K) = H_0(K) - V, \quad V = \mu_1 V_1 + \mu_2 V_2 + \mu_3 V_3, \quad \bar{V}^\lambda = \lambda_1 \bar{V}_1 + \lambda_2 \bar{V}_2 + \lambda_3 \bar{V}_3.$$

Здесь $H_0(K)$ – оператор умножения на функцию

$$E_K(p, q) = \frac{1}{m_1} \varepsilon(p) + \frac{1}{m_2} \varepsilon(q) + \frac{1}{m_3} \varepsilon(K - p - q), \quad \varepsilon(p) = \sum_{i=1}^3 (1 - \cos 2p_i),$$

а операторы V_α и $\bar{V}_\alpha$, $\alpha = 1, 2, 3$, заданы следующим образом:

$$\begin{aligned} (V_1 f)(p, q) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{T}^3} f(p, s) ds, & (V_2 f)(p, q) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{T}^3} f(s, q) ds, \\ (V_3 f)(p, q) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{T}^3} f(s, p + q - s) ds, \\ (\bar{V}_1 f)(p, q) &= \int_{\mathbb{T}^3} v(s - p) f(s, p) ds, & (\bar{V}_2 f)(p, q) &= \int_{\mathbb{T}^3} v(s - q) f(s, q) ds, \\ (\bar{V}_3 f)(p, q) &= \int_{\mathbb{T}^3} v(s - p) f(s, p + q - s) ds, & v(p) &= \sum_{i=1}^3 \cos p_i. \end{aligned}$$

Здесь $f \in L_2((\mathbb{T}^3)^2)$.

Введем оператор Шредингера $\bar{h}_\alpha(k)$, $k \in \mathbb{T}^3$, соответствующий гамильтониану системы двух частиц на решетке, который действует в пространстве $L_2(\mathbb{T}^3)$ по формуле

$$\bar{h}_\alpha(k) = h_\alpha(k) - \lambda_\alpha \bar{v}, \quad \alpha = 1, 2, 3, \quad (1)$$

где $h_\alpha(k) = h_0^\alpha(k) - \mu_\alpha \mathbf{v}$ и $h_0^\alpha(k)$ – оператор умножения на функцию

$$\mathcal{E}_k^{(\alpha)}(p) = \frac{1}{m_\beta} \varepsilon(p) + \frac{1}{m_\gamma} \varepsilon(k - p),$$

а $\bar{\mathbf{v}}$ и $\mathbf{v}$ – интегральные операторы с ядрами $v(p - s)$ и $t(p, s) = 1/(2\pi)^3$ соответственно.

Пусть $C(\mathbb{T}^3)$ – банахово пространство непрерывных (периодических) функций на $\mathbb{T}^3$ и G_α – интегральный оператор (Бирмана–Швингера) с ядром

$$G_\alpha(p, q) = \frac{1}{8\pi^3} \frac{1}{\mathcal{E}_0^{(\alpha)}(q)}, \quad p, q \in \mathbb{T}^3.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Если единица является собственным значением оператора G_α и соответствующая собственная функция ψ удовлетворяет условию

$$\frac{\psi(\cdot)}{\mathcal{E}_0^{(\alpha)}(\cdot)} \in L_1(\mathbb{T}^3) \setminus L_2(\mathbb{T}^3),$$

то говорят, что оператор $h_\alpha(\mathbf{0})$ имеет *виртуальный уровень* в нуле (на левом краю существенного спектра).

Простое вычисление показывает, что оператор $h_\alpha(\mathbf{0})$ имеет виртуальный уровень в нуле тогда и только тогда, когда $\mu_\alpha = \mu_\alpha^0$, где

$$\mu_\alpha^0 = 8\pi^3 \frac{m_\beta + m_\gamma}{m_\beta m_\gamma} \left(\int_{\mathbb{T}^3} \frac{ds}{\varepsilon(s)} \right)^{-1}.$$

Оператор $\bar{H}_\alpha^\lambda(K) = H_0(K) - \mu_\alpha V_\alpha - \lambda_\alpha \bar{V}_\alpha$ называется канальным оператором и представляется в виде прямого интеграла [12], [13]:

$$\bar{H}_\alpha^\lambda(K) = \int_{\mathbb{T}^3} \bigoplus \left[\hat{h}_\alpha(K - p) + \frac{\varepsilon(p)}{m_\alpha} \right] dp,$$

где оператор $\hat{h}_\alpha(p)$ унитарно эквивалентен оператору $\bar{h}_\alpha(p)$. Из этого представления и в силу теоремы о спектре тензорных произведений операторов имеем

$$\sigma(\bar{H}_\alpha^\lambda(K)) = \bigcup_{p \in \mathbb{T}^3} \left[\sigma \left(\bar{h}_\alpha(K - p) + \frac{\varepsilon(p)}{m_\alpha} \right) \right]. \quad (2)$$

Из теоремы Вейля о существенном спектре [14] следует, что существенный спектр $\sigma_{\text{ess}}(\bar{h}_\alpha(k))$ оператора $\bar{h}_\alpha(k)$ не меняется при компактном возмущении $\mu_\alpha \mathbf{v}_\alpha + \lambda_\alpha \bar{\mathbf{v}}$ и совпадает со спектром невозмущенного оператора $h_0^\alpha(k)$. При этом $\sigma_{\text{ess}}(\bar{h}_\alpha(k))$ совпадает с областью значений функции $\mathcal{E}_k^{(\alpha)}(\cdot)$, т. е.

$$\sigma_{\text{ess}}(\bar{h}_\alpha(k)) = \sigma(h_0^\alpha(k)) = [m^{(\alpha)}(k), M^{(\alpha)}(k)],$$

где

$$m^{(\alpha)}(k) = \min_p \mathcal{E}_k^{(\alpha)}(p), \quad M^{(\alpha)}(k) = \max_p \mathcal{E}_k^{(\alpha)}(p).$$

Поэтому из (2) вытекает, что

$$\begin{aligned} \sigma(\bar{H}_\alpha^\lambda(K)) &= \\ &= \bigcup_{p \in \mathbb{T}^3} \left\{ \left[m^{(\alpha)}(K-p) + \frac{\varepsilon(p)}{m_\alpha}, M^{(\alpha)}(K-p) + \frac{\varepsilon(p)}{m_\alpha} \right] \cup \sigma_{\text{disc}} \left(\bar{h}_\alpha(K-p) + \frac{\varepsilon(p)}{m_\alpha} \right) \right\} \end{aligned}$$

или, эквивалентно,

$$\sigma(\bar{H}_\alpha^\lambda(K)) = \left\{ \bigcup_{p \in \mathbb{T}^3} \sigma_{\text{disc}} \left(\bar{h}_\alpha(K-p) + \frac{\varepsilon(p)}{m_\alpha} \right) \right\} \cup [m_K, M_K], \quad (3)$$

где

$$m_K = \min_{p,q} E_K(p, q), \quad M_K = \max_{p,q} E_K(p, q).$$

Следующая лемма является частным случаем теоремы 3.2 из работы [13].

ЛЕММА 1. *Для любого $K \in \mathbb{T}^3$ существенный спектр $\sigma_{\text{ess}}(\bar{H}^\lambda(K))$ оператора $\bar{H}^\lambda(K)$ представляет собой объединение спектров канальных операторов $\bar{H}_\alpha^\lambda(K)$:*

$$\sigma_{\text{ess}}(\bar{H}^\lambda(K)) = \sigma(\bar{H}_1^\lambda(K)) \cup \sigma(\bar{H}_2^\lambda(K)) \cup \sigma(\bar{H}_3^\lambda(K)).$$

Теперь сформулируем основные результаты настоящей работы.

ЛЕММА 2. *Пусть $\mu_\alpha \leq \mu_\alpha^0$ для $\alpha = 1, 2, 3$. Тогда*

$$\sigma_{\text{ess}}(H(\mathbf{0})) = \sigma_{\text{ess}}(H_0(\mathbf{0})).$$

При этом $\inf \sigma_{\text{ess}}(H(\mathbf{0})) = 0$ при всех $\mu_\alpha \leq \mu_\alpha^0$, $\alpha = 1, 2, 3$.

Данная лемма следует из спектральных свойств оператора $h_\alpha(k)$ и из равенства (3) при $\lambda_\alpha = 0$ (см. лемму 7 из работы [11]).

Пусть $N(z)$ – число собственных значений оператора $H(\mathbf{0})$ (с учетом кратности), лежащих левее $z < 0$. Следующая теорема утверждает существование бесконечного дискретного спектра оператора $H(\mathbf{0})$ и описывает асимптотику для $N(z)$ при $z \rightarrow -0$.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть $\mu_\alpha = \mu_\alpha^0$, $\mu_\beta = \mu_\beta^0$ и $\mu_\gamma \leq \mu_\gamma^0$ при $\alpha \neq \beta \neq \gamma$. Тогда существует*

$$\lim_{z \rightarrow -0} \left(-\frac{1}{\ln(-z)} N(z) \right) = \mathcal{U}_0, \quad \mathcal{U}_0 > 0.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Положительное число $\mathcal{U}_0$ есть число, найденное в работах [4], [8], которое зависит от числа виртуальных уровней двухчастичных подгамильтонианов и от отношений масс частиц. В работе [8] функция, определяющая оператор умножения, имеет вид $E_0(p/2, q/2)$, и она обладает единственной невырожденной точкой минимума. Отметим, что функция $E_0(\cdot, \cdot)$ имеет 64 точки минимума. Теорема 1 показывает, что асимптотика для $N(z)$ при $z \rightarrow -0$ та же, что в работе [4], и она не зависит от числа точек минимума функции $E_0(\cdot, \cdot)$.

ЛЕММА 3. *Для любого $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ каждое собственное значение z оператора $H(\mathbf{0})$, лежащее левее его существенного спектра, является собственным значением оператора $\bar{H}^\lambda(\mathbf{0})$ с кратностью, не меньшей чем его кратность как собственного значения оператора $H(\mathbf{0})$.*

В следующей лемме описано местоположение существенного спектра оператора $\bar{H}^\lambda(\mathbf{0})$. Найдено условие, при котором существенный спектр оператора $\bar{H}^\lambda(\mathbf{0})$ содержит точку 0 (левый край спектра свободного гамильтониана) как внутреннюю точку, а также найдено условие появления лакуны.

В дальнейшем будем предполагать, что $\mu_\alpha \leq \mu_\alpha^0$ для всех $\alpha = 1, 2, 3$.

ЛЕММА 4. *Справедливы следующие утверждения.*

1. *Существует $\lambda^0 > 0$ такое, что для всех $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ с $\lambda_{1,2,3} \leq \lambda^0$ имеет место равенство*

$$\sigma(\bar{H}^\lambda(\mathbf{0})) = \sigma_{\text{ess}}(H_0(\mathbf{0})).$$

2. *Существуют $\bar{\lambda} = (\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \bar{\lambda}_3)$ с $\bar{\lambda}_{1,2,3} > 0$ и число $\bar{\rho} = \bar{\rho}(\bar{\lambda}) > 0$ такие, что имеет место включение*

$$[-\bar{\rho}, 0] \subset \sigma_{\text{ess}}(\bar{H}^\lambda(\mathbf{0})) \quad \text{при} \quad \lambda = \bar{\lambda}.$$

3. *Существуют числа $\lambda^* > 0$ и $\rho = \rho(\lambda^*) > 0$ такие, что при всех $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ с $\lambda_{1,2,3} \geq \lambda^*$*

$$\sigma_{\text{ess}}(\bar{H}^\lambda(\mathbf{0})) \cap (-\rho, 0) = \emptyset \quad \text{и} \quad \sigma_{\text{ess}}(\bar{H}^\lambda(\mathbf{0})) \cap (-\infty, -\rho) \neq \emptyset,$$

точнее, существенный спектр $\sigma_{\text{ess}}(\bar{H}^\lambda(\mathbf{0}))$ содержит лакуну $(-\rho, 0)$.

Из лемм 3, 4 и теоремы 1 вытекает следующая

ТЕОРЕМА 2. *Пусть $\mu_\alpha = \mu_\alpha^0$, $\mu_\beta = \mu_\beta^0$ и $\mu_\gamma \leq \mu_\gamma^0$ для $\alpha \neq \beta \neq \gamma$. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Если $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ таково, что $\lambda_{1,2,3} \leq \lambda^0$, то оператор $\bar{H}^\lambda(\mathbf{0})$ имеет бесконечное число собственных значений, лежащих левее существенного спектра.*

2. *Если $\lambda = \bar{\lambda}$, то оператор $\bar{H}^\lambda(\mathbf{0})$ имеет бесконечное число собственных значений, лежащих на отрезке $[-\bar{\rho}, 0] \subset \sigma_{\text{ess}}(\bar{H}^\lambda(\mathbf{0}))$.*

3. *Если $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ таково, что $\lambda_{1,2,3} \geq \lambda^*$, то оператор $\bar{H}^\lambda(\mathbf{0})$ имеет бесконечное число собственных значений, лежащих в лакуне существенного спектра, точнее, на интервале $(-\rho, 0)$.*

Обозначим через $\mathcal{V}$ множество функций, квадратично-интегрируемых на $\mathbb{T}^3$ и периодических по каждому аргументу с периодом π . Ясно, что $\mathcal{V}$ является подпространством пространства $L_2(\mathbb{T}^3)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Собственные функции невозмущенного оператора $H(\mathbf{0})$ принадлежат ядру возмущающего оператора $\bar{V}^\lambda$ (см. ниже доказательство леммы 3). Класс таких возмущающих операторов является широким. Например, если в качестве v взять функцию из $\mathcal{V}$, ортогональную функции, тождественно равной единице, то можно проверить, что собственные функции невозмущенного оператора $H(\mathbf{0})$ принадлежат ядру соответствующего возмущающего оператора $\bar{V}^\lambda$, определенного с помощью v . При этом результаты теоремы 2 верны для более общего случая, когда возмущающий оператор $\bar{V}^\lambda$ определен с помощью $v \in \mathcal{V}$.

3. О СПЕКТРЕ ДВУХЧАСТИЧНОГО ОПЕРАТОРА ШРЕДИНГЕРА

Рассмотрим самосопряженный оператор $\bar{h}_\alpha(k)$, $k \in \mathbb{T}^3$, $\alpha = 1, 2, 3$, действующий в $L_2(\mathbb{T}^3)$ по формуле (1):

$$\bar{h}_\alpha(k) = h_0^\alpha(k) - \mu_\alpha \mathbf{v} - \lambda_\alpha \bar{\mathbf{v}};$$

здесь $h_0^\alpha(k)$ – оператор умножения на функцию

$$\mathcal{E}_k^{(\alpha)}(p) = \frac{\varepsilon(p)}{m_\beta} + \frac{\varepsilon(k-p)}{m_\gamma}$$

и $\mathbf{v}_\alpha := \mu_\alpha \bar{\mathbf{v}} + \lambda_\alpha \mathbf{v}$ – интегральный оператор с ядром

$$v_\alpha(p-s) = \frac{\mu_\alpha}{8\pi^3} + \lambda_\alpha \sum_{i=1}^3 \cos(p_i - s_i).$$

Введем оператор $\tilde{h}_\alpha(k)$, действующий в $L_2(\mathbb{T}^3)$,

$$\tilde{h}_\alpha(k) = \tilde{h}_0^\alpha(k) - \mathbf{v}_\alpha,$$

где $\tilde{h}_0^\alpha(k)$ – оператор умножения на функцию

$$\tilde{E}_k^{(\alpha)}(p) = \sum_{i=1}^3 \left(\frac{1}{m_\beta} + \frac{1}{m_\gamma} - \sqrt{\frac{1}{m_\beta^2} + \frac{2}{m_\beta m_\gamma} \cos 2k_i + \frac{1}{m_\gamma^2} \cos 2p_i} \right).$$

Пусть $u: L_2(\mathbb{T}^3) \rightarrow L_2(\mathbb{T}^3)$ – унитарный оператор, определенный формулой

$$(uf)(p) = f\left(p - \frac{\theta(k)}{2}\right),$$

где

$$\theta(k) = (\theta_1(k_1), \theta_2(k_2), \theta_3(k_3)), \quad \theta_i(k_i) = \arccos \frac{\frac{1}{m_\beta} + \frac{1}{m_\gamma} \cos 2k_i}{\sqrt{\frac{1}{m_\beta^2} + \frac{2}{m_\beta m_\gamma} \cos 2k_i + \frac{1}{m_\gamma^2}}}.$$

Тогда

$$(u^{-1}f)(p) = f\left(p + \frac{\theta(k)}{2}\right), \quad f \in L_2(\mathbb{T}^3).$$

ЛЕММА 5. Оператор $\bar{h}_\alpha(k)$ унитарно эквивалентен оператору $\tilde{h}_\alpha(k)$:

$$\tilde{h}_\alpha(k) = u^{-1} \bar{h}_\alpha(k) u.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку имеет место представление

$$\mathcal{E}_k^{(\alpha)}(p) = \sum_{i=1}^3 \left[\frac{1}{m_\beta} + \frac{1}{m_\gamma} - \sqrt{\frac{1}{m_\beta^2} + \frac{2}{m_\beta m_\gamma} \cos 2k_i + \frac{1}{m_\gamma^2} \cos \left(2p_i - \frac{\theta_i(k_i)}{2}\right)} \right],$$

справедливо равенство

$$\begin{aligned} (\bar{h}_0^{(\alpha)}(k)uf)(p) &= \\ &= \sum_{i=1}^3 \left(\frac{1}{m_\beta} + \frac{1}{m_\gamma} - \sqrt{\frac{1}{m_\beta^2} + \frac{2}{m_\beta m_\gamma} \cos 2k_i + \frac{1}{m_\gamma^2} \cos \left(2p_i - \frac{\theta_i(k_i)}{2}\right)} \right) f\left(p - \frac{\theta(k)}{2}\right). \end{aligned}$$

Отсюда легко получаем, что

$$(u^{-1}\bar{h}_0^\alpha(k)uf)(p) = \sum_{i=1}^3 \left(\frac{1}{m_\beta} + \frac{1}{m_\gamma} - \sqrt{\frac{1}{m_\beta^2} + \frac{2}{m_\beta m_\gamma} \cos 2k_i + \frac{1}{m_\gamma^2} \cos(2p_i)} \right) f(p),$$

т. е. $u^{-1}h_0^\alpha(k)u = \tilde{h}_0^\alpha(k)$. Ясно, что

$$\begin{aligned} (u^{-1}\mathbf{v}_\alpha uf)(p) &= u^{-1} \left(\int_{\mathbb{T}^3} v_\alpha(s-p) f\left(s - \frac{\theta(k)}{2}\right) ds \right) = \\ &= \int_{\mathbb{T}^3} v_\alpha\left(s - \left(p + \frac{\theta(k)}{2}\right)\right) f\left(s - \frac{\theta(k)}{2}\right) ds. \end{aligned}$$

В последнем интеграле, сделав замену $s - \theta(k)/2 = t$, имеем

$$(u^{-1}\mathbf{v}_\alpha uf)(p) = \int_{\mathbb{T}^3} v_\alpha(t-p) f(t) dt,$$

таким образом, $u^{-1}\mathbf{v}_\alpha u = \mathbf{v}_\alpha$. Лемма доказана.

ЛЕММА 6. Пусть либо $m_\beta \neq m_\gamma$ и $k \in \mathbb{T}^3$, либо $m = m_\beta = m_\gamma$ и $|k_i| \neq \pi/2$ для всех $i = 1, 2, 3$. Тогда интеграл

$$\int_{\mathbb{T}^3} \frac{\varphi(s) ds}{\tilde{E}_k^{(\alpha)}(s) - m^{(\alpha)}(k)} \quad (4)$$

сходится для всех $\varphi \in C(\mathbb{T}^3)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В обоих случаях, сформулированных в условии леммы,

$$\frac{1}{m_\beta^2} + \frac{2}{m_\beta m_\gamma} \cos 2k_i + \frac{1}{m_\gamma^2} = \left(\frac{1}{m_\beta} - \frac{1}{m_\gamma} \right)^2 + \frac{2}{m_\beta m_\gamma} (1 + \cos 2k_i) \neq 0.$$

Поэтому функция $\tilde{E}_k^{(\alpha)}(\cdot)$ достигает своего минимального значения $m^{(\alpha)}(k)$ в точках $p \in \Pi$, где Π – множество векторов $k = (k_1, k_2, k_3) \in \mathbb{T}^3$ таких, что координаты вектора k принимают значения 0 или π . При этом точки минимума являются невырожденными. Так как точки минимума функции $\tilde{E}_k^{(\alpha)}(\cdot)$ невырожденные и этих точек восемь, интеграл (4) существует для всех $\varphi \in C(\mathbb{T}^3)$. Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Если $m = m_\beta = m_\gamma$ и $|k_i| = \pi/2$ для каждого $i = 1, 2, 3$, то

$$\tilde{E}_k^{(\alpha)}(s) - m^{(\alpha)}(k) = 0 \quad \text{для всех } k \in \mathbb{T}^3.$$

В этом случае, если $\varphi(s) \neq 0$ и $\varphi \in C(\mathbb{T}^3)$, то

$$\int_{\mathbb{T}^3} \frac{|\varphi(s)| ds}{\tilde{E}_k^{(\alpha)}(s) - m^{(\alpha)}(k)} \rightarrow +\infty \quad \text{при } (|k_1|, |k_2|, |k_3|) \rightarrow (\pi/2, \pi/2, \pi/2).$$

Поэтому в силу неравенства $m^{(\alpha)}(k) \geq 0$ для всех $k \in \mathbb{T}^3$ имеют место оценки

$$\left(\min_{k \in \mathbb{T}^3} \int_{\mathbb{T}^3} \frac{|\varphi(s)| ds}{\tilde{E}_k^{(\alpha)}(s)} \right)^{-1} < \infty, \quad \left(\max_{k \in \mathbb{T}^3} \int_{\mathbb{T}^3} \frac{|\varphi(s)| ds}{\tilde{E}_k^{(\alpha)}(s)} \right)^{-1} < \infty.$$

Введем обозначение

$$\Delta_\alpha(k; z) = \prod_{i=0}^6 \Delta_\alpha^{(i)}(k; z),$$

где

$$\begin{aligned} \Delta_\alpha^{(0)}(k; z) &= 1 - \frac{\mu_\alpha}{8\pi^3} \int_{\mathbb{T}^3} \frac{ds}{\widetilde{E}_k^{(\alpha)}(s) - z}, \\ \Delta_\alpha^{(i)}(k; z) &= 1 - \lambda_\alpha \int_{\mathbb{T}^3} \frac{\cos^2 s_i ds}{\widetilde{E}_k^{(\alpha)}(s) - z}, \quad i = 1, 2, 3, \\ \Delta_\alpha^{(i)}(k; z) &= 1 - \lambda_\alpha \int_{\mathbb{T}^3} \frac{\sin^2 s_{i-3} ds}{\widetilde{E}_k^{(\alpha)}(s) - z}, \quad i = 4, 5, 6. \end{aligned}$$

ЛЕММА 7. Число $z < m^{(\alpha)}(k)$ является собственным значением оператора $\tilde{h}^{(\alpha)}(k)$ тогда и только тогда, когда

$$\Delta_\alpha(k; z) = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $z < m^{(\alpha)}(k)$ – собственное значение оператора $\tilde{h}^{(\alpha)}(k)$ и f – соответствующий собственный вектор, т. е. уравнение

$$(\tilde{h}_\alpha(k)f)(p) = \widetilde{E}_k^{(\alpha)}(p)f(p) - \frac{\mu_\alpha}{8\pi^3} \int_{\mathbb{T}^3} f(s) ds - \lambda_\alpha \sum_{i=1}^3 \int_{\mathbb{T}^3} \cos(p_i - s_i) f(s) ds \quad (5)$$

имеет нетривиальное решение f . Поскольку $z < m^{(\alpha)}(k)$, то $\widetilde{E}_k^{(\alpha)}(p) - z > 0$ для всех $p \in \mathbb{T}^3$. Поэтому из (5) имеем

$$f(p) = \frac{1}{\widetilde{E}_k^{(\alpha)}(p) - z} \left[\frac{\mu_\alpha}{8\pi^3} \int_{\mathbb{T}^3} f(s) ds - \lambda_\alpha \sum_{i=1}^3 \int_{\mathbb{T}^3} \cos(p_i - s_i) f(s) ds \right].$$

Отсюда

$$f(p) = \frac{1}{\widetilde{E}_k^{(\alpha)}(p) - z} \left[\mu_\alpha c_0 + \lambda_\alpha \sum_{i=1}^3 (c_i \cos p_i + r_i \sin p_i) \right], \quad (6)$$

где

$$c_0 = \frac{\mu_\alpha}{8\pi^3} \int_{\mathbb{T}^3} f(s) ds, \quad c_i = \int_{\mathbb{T}^3} \cos s_i f(s) ds, \quad r_i = \int_{\mathbb{T}^3} \sin s_i f(s) ds. \quad (7)$$

Подставив выражение (6) в (7), получим

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{\mu_\alpha}{8\pi^3} \int_{\mathbb{T}^3} \frac{1}{\widetilde{E}_k^{(\alpha)}(s) - z} \left[\mu_\alpha c_0 + \lambda_\alpha \sum_{i=1}^3 (c_i \cos s_i + r_i \sin s_i) \right] ds, \\ c_i &= \int_{\mathbb{T}^3} \frac{\cos s_i}{\widetilde{E}_k^{(\alpha)}(s) - z} \left[\mu_\alpha c_0 + \lambda_\alpha \sum_{i=1}^3 (c_i \cos s_i + r_i \sin s_i) \right] ds, \\ r_i &= \int_{\mathbb{T}^3} \frac{\sin s_i}{\widetilde{E}_k^{(\alpha)}(s) - z} \left[\mu_\alpha c_0 + \lambda_\alpha \sum_{i=1}^3 (c_i \cos s_i + r_i \sin s_i) \right] ds. \end{aligned} \quad (8)$$

В силу четности функции $\tilde{E}_k^{(\alpha)}(\cdot)$ для всех $i, j, \gamma = 1, 2, 3, i \neq j$ имеют место формулы

$$\int_{\mathbb{T}^3} \frac{\sin s_i \sin s_j ds}{\tilde{E}_k^{(\alpha)}(s) - z} = \int_{\mathbb{T}^3} \frac{\sin s_i \cos s_\gamma ds}{\tilde{E}_k^{(\alpha)}(s) - z} = 0. \quad (9)$$

Равенства

$$\int_{\mathbb{T}^3} \frac{\cos s_i ds}{\tilde{E}_k^{(\alpha)}(s) - z} = 0, \quad \int_{\mathbb{T}^3} \frac{\cos s_i \cos s_j ds}{\tilde{E}_k^{(\alpha)}(s) - z} = 0, \quad (10)$$

также справедливы для всех $i, j, \gamma = 1, 2, 3, i \neq j$, следуют из периодичности функции $\tilde{E}_k^{(\alpha)}(\cdot)$ по каждой переменной с периодом π и получаются с помощью замены переменных $t_i = s_i + \pi$ в интегралах левых частей равенств (10).

С учетом соотношений (9), (10) система уравнений (8) приобретает вид

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{\mu_\alpha}{8\pi^3} \int_{\mathbb{T}^3} \frac{ds}{\tilde{E}_k^{(\alpha)}(s) - z} c_0, \\ c_i &= \lambda_\alpha \int_{\mathbb{T}^3} \frac{\cos^2 s_i ds}{\tilde{E}_k^{(\alpha)}(s) - z} c_i, \\ r_i &= \lambda_\alpha \int_{\mathbb{T}^3} \frac{\sin^2 s_i ds}{\tilde{E}_k^{(\alpha)}(s) - z} r_i. \end{aligned} \quad (11)$$

Известно, что линейная система (11) имеет ненулевое решение $(c_0, c_1, c_2, c_3, r_1, r_2, r_3)$ тогда и только тогда, когда $\Delta_\alpha(k; z) = 0$.

Обратно, если $\Delta_\alpha(k; z) = 0$, то хотя бы одно уравнение из системы (11) имеет ненулевое решение c_i или r_α . Легко проверить, что функция $f(\cdot)$, определенная по формуле (6), является собственной функцией оператора $\tilde{h}_\alpha(k)$, соответствующей собственному значению $z < m^{(\alpha)}(k)$. Лемма доказана.

ЛЕММА 8. *Справедливы следующие утверждения.*

1. Существует число $\lambda_\alpha^0 > 0$ такое, что для всех $\lambda_\alpha \leq \lambda_\alpha^0$ и $k \in \mathbb{T}^3$ имеет место неравенство $\Delta_\alpha(k; z) > 0$ для каждого $z < 0$.
2. Существуют числа $\bar{\lambda}_\alpha^0$ и $\bar{\rho} = \bar{\rho}(\bar{\lambda}_\alpha^0)$ такие, что для каждого $z \in [-\bar{\rho}, 0)$ имеет место равенство $\Delta_\alpha(k; z) = 0$ при $\lambda_\alpha = \bar{\lambda}_\alpha^0$ и для некоторого $k = k(z) \in \mathbb{T}^3$.
3. Для любого $\rho > 0$ существует число $\lambda_\alpha^* = \lambda_\alpha^*(\rho)$ такое, что для всех $\lambda_\alpha > \lambda_\alpha^*$ и $k \in \mathbb{T}^3$ имеет место неравенство $\Delta_\alpha(k; z) \neq 0$ для каждого $z \in [-\rho, 0)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отметим, что из условия $\mu_\alpha \leq \mu_\alpha^0$ вытекает, что $\Delta_\alpha^{(0)}(k; z) > 0$ для всех $k \in \mathbb{T}^3$ и $z < 0$.

1. Положим (см. замечание 2)

$$\lambda_\alpha^0 = \left(\max_{k, i} \int_{\mathbb{T}^3} \frac{\cos^2 s_i ds}{\tilde{E}_k^{(\alpha)}(s)} \right)^{-1}.$$

Пусть $\lambda_\alpha \leq \lambda_\alpha^0$. Тогда для всех $z < 0$ имеем

$$\Delta_\alpha^{(i)}(k; z) = 1 - \lambda_\alpha \int_{\mathbb{T}^3} \frac{\cos^2 s_i ds}{\tilde{E}_k^{(\alpha)}(s) - z} ds > 1 - \lambda_\alpha^0 \max_{k, i} \int_{\mathbb{T}^3} \frac{\cos^2 s_i ds}{\tilde{E}_k^{(\alpha)}(s)} = 0.$$

Отсюда и из неравенства [15]

$$\int_{\mathbb{T}^3} \frac{\cos^2 s_i ds}{\widetilde{E}_k^{(\alpha)}(s) - z} \geq \int_{\mathbb{T}^3} \frac{\sin^2 s_i ds}{\widetilde{E}_k^{(\alpha)}(s) - z} ds \quad (12)$$

следует, что $\Delta_\alpha^{(3+i)}(k; z) \geq \Delta_\alpha^{(i)}(k; z) > 0$ для всех $i = 1, 2, 3$ и $z < 0$, любых $\lambda_\alpha \leq \lambda_\alpha^0$ и $k \in \mathbb{T}^3$. Следовательно, $\Delta_\alpha(k; z) > 0$ для всех $z < 0$, $\lambda_\alpha \leq \lambda_\alpha^0$ и $k \in \mathbb{T}^3$.

2. Положим (см. замечание 2)

$$\begin{aligned} \lambda_\alpha^*(i) &= \left(\min_k \int_{\mathbb{T}^3} \frac{\cos^2 s_i ds}{\widetilde{E}_k^{(\alpha)}(s)} \right)^{-1} = \left(\int_{\mathbb{T}^3} \frac{\cos^2 s_i ds}{\widetilde{E}_{k^*}^{(\alpha)}(s)} \right)^{-1}, \\ \lambda_\alpha^0(i) &= \left(\max_k \int_{\mathbb{T}^3} \frac{\cos^2 s_i ds}{\widetilde{E}_k^{(\alpha)}(s)} \right)^{-1} = \left(\int_{\mathbb{T}^3} \frac{\cos^2 s_i ds}{\widetilde{E}_{k^0}^{(\alpha)}(s)} \right)^{-1}. \end{aligned}$$

Пусть $\lambda_\alpha(i) \in [\lambda_\alpha^0(i), \lambda_\alpha^*(i)]$. Тогда

$$\Delta_\alpha^{(i)}(k^0; 0) = 1 - \lambda_\alpha(i) \int_{\mathbb{T}^3} \frac{\cos^2 s_i ds}{\widetilde{E}_{k^0}^{(\alpha)}(s)} \leq 1 - \lambda_\alpha^0(i) \int_{\mathbb{T}^3} \frac{\cos^2 s_i ds}{\widetilde{E}_{k^0}^{(\alpha)}(s)} = 0.$$

Поскольку $\lim_{z \rightarrow -\infty} \Delta_\alpha^{(i)}(k^0; 0) = 1$, в силу непрерывности функции $\Delta_\alpha^{(i)}(k^0; \cdot)$ существует $z_0 \in (-\infty, 0)$ такое, что $\Delta_\alpha^{(i)}(k^0; z_0) = 0$. Положим $\bar{\rho} = -z_0$. Пусть $z \in (-\bar{\rho}, 0)$. Тогда

$$\begin{aligned} \Delta_\alpha^{(i)}(k^0; z) &= 1 - \lambda_\alpha(i) \int_{\mathbb{T}^3} \frac{\cos^2 s_i ds}{\widetilde{E}_{k^0}^{(\alpha)}(s) - z} < 1 - \lambda_\alpha(i) \int_{\mathbb{T}^3} \frac{\cos^2 s_i ds}{\widetilde{E}_{k^0}^{(\alpha)}(s) + \bar{\rho}} = \Delta_\alpha^{(i)}(k^0; -\bar{\rho}) = 0, \\ \Delta_\alpha^{(i)}(k^*; z) &= 1 - \lambda_\alpha(i) \int_{\mathbb{T}^3} \frac{\cos^2 s_i ds}{\widetilde{E}_{k^*}^{(\alpha)}(s) - z} > 1 - \lambda_\alpha^*(i) \int_{\mathbb{T}^3} \frac{\cos^2 s_i ds}{\widetilde{E}_{k^*}^{(\alpha)}(s)} = 0. \end{aligned}$$

Поэтому в силу непрерывности функции $\Delta_\alpha^{(i)}(\cdot; z)$ существует $k \in \mathbb{T}^3$ такое, что $\Delta_\alpha^{(i)}(k; z) = 0$. Отсюда для выполнения утверждения 2 достаточно взять $\bar{\lambda}_\alpha^0 = \lambda_\alpha(i)$ для одного $i \in \{1, 2, 3\}$.

3. Положим

$$\lambda_\alpha^* = \left(\min_{k, i} \int_{\mathbb{T}^3} \frac{\sin^2 s_i ds}{\widetilde{E}_k^{(\alpha)}(s) - \rho} \right)^{-1}.$$

Пусть $\lambda_\alpha > \lambda_\alpha^*$. Тогда из (12) получим

$$\begin{aligned} \Delta_\alpha^{(i)}(k; \rho) &\leq \Delta_\alpha^{(3+i)}(k; \rho) = 1 - \lambda_\alpha \int_{\mathbb{T}^3} \frac{\sin^2 s_i ds}{\widetilde{E}_k^{(\alpha)}(s) - \rho} < \\ &< 1 - \lambda_\alpha^* \min_{k, i} \int_{\mathbb{T}^3} \frac{\sin^2 s_i ds}{\widetilde{E}_k^{(\alpha)}(s) - \rho} = 0. \end{aligned}$$

Поэтому в силу монотонного убывания функции $\Delta_\alpha^{(i)}(k; \cdot)$ имеет место неравенство $\Delta_\alpha^{(i)}(k; z) \leq \Delta_\alpha^{(3+i)}(k; z) < 0$ для всех $z \in [-\rho, 0)$ и $i = 1, 2, 3$. Отсюда следует утверждение 3.

Теперь докажем леммы 4 и 3 из раздела 2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 4. Докажем каждое из трех утверждений леммы.

1. Пусть $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ таков, что

$$\lambda_i \leq \lambda^0 = \min_{\alpha \in \{1,2,3\}} \lambda_\alpha^0, \quad i = 1, 2, 3.$$

Тогда согласно утверждению 1 леммы 8 для всех $z < 0$ и $k \in \mathbb{T}^3$ имеет место неравенство $\Delta_\alpha(k; z) > 0$ при каждом $\alpha = 1, 2, 3$. Отсюда с учетом леммы 7 каждый из операторов $\tilde{h}_\alpha(k)$, $\alpha = 1, 2, 3$, не имеет отрицательных собственных значений для всех $k \in \mathbb{T}^3$. Поэтому из равенства (3) получаем, что $\sigma(\bar{H}_\alpha^\lambda(\mathbf{0})) = [0, M_0]$ для всех $\alpha = 1, 2, 3$. В силу леммы 1 отсюда имеем первое утверждение леммы 4.

2. Положим $\bar{\lambda} = (\bar{\lambda}_1^0, \lambda_2, \lambda_3)$, где $\bar{\lambda}_1^0$ – число, найденное в лемме 8. Тогда согласно утверждению 3 леммы 8, принимая во внимание лемму 7, получаем, что для каждого $z \in [-\bar{\rho}, 0)$ существует $k = k(\bar{\rho}) \in \mathbb{T}^3$ такое, что число z является собственным значением оператора $\tilde{h}_1(k)$. Согласно равенству (3) имеем $[-\bar{\rho}, 0) \subset \sigma(\bar{H}_1^\lambda(\mathbf{0}))$. Отсюда и из леммы 1 получаем второе утверждение леммы 4.

3. Пусть $\lambda^* = \max_{\alpha \in \{1,2,3\}} \lambda_\alpha^*$ и $\lambda^* = \lambda^*(\rho)$ – число, найденное в лемме 8, а ρ – соответствующее положительное число. Пусть $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ таков, что $\lambda_i > \lambda^*$ для всех $i = 1, 2, 3$. Тогда согласно утверждению 2 леммы 8 при всех $z \in [-\rho, 0)$ и $k \in \mathbb{T}^3$ имеет место неравенство $\Delta_\alpha(k; z) \neq 0$ для каждого $\alpha = 1, 2, 3$. Следовательно, по лемме 7 оператор $\tilde{h}_\alpha(k)$ не имеет собственных значений на отрезке $[-\rho, 0)$. Поэтому из равенства (3) получаем соотношение

$$\sigma(\bar{H}^\lambda(\mathbf{0})) \cap (-\rho, 0) = \emptyset.$$

Для всех $\lambda_\alpha > \lambda^*$ и $k \in \mathbb{T}^3$ имеет место неравенство $\Delta_\alpha(k; z) < 0$ при каждом $z \in [-\rho, 0)$. Отсюда, с учетом того что $\lim_{z \rightarrow -\infty} \Delta_\alpha^{(i)}(k; 0) = 1$, в силу непрерывности функции $\Delta_\alpha^{(i)}(k; \cdot)$ существует $z = z(k) < -\rho$ такое, что $\Delta_\alpha^{(i)}(k; z) = 0$ для всех $\lambda_\alpha > \lambda^*$ и $k \in \mathbb{T}^3$. Следовательно, по лемме 7 оператор $\tilde{h}_\alpha(k)$ имеет собственные значения на полуоси $(-\infty, -\rho)$ для всех $\lambda_\alpha > \lambda^*$ и $k \in \mathbb{T}^3$. Отсюда и из равенства (3) вытекает, что

$$\sigma(\bar{H}_\alpha^\lambda(\mathbf{0})) \cap (-\infty, -\rho) \neq \emptyset.$$

Следовательно, с учетом леммы 1 мы получаем

$$\sigma(\bar{H}^\lambda(\mathbf{0})) \cap (-\infty, -\rho) \neq \emptyset.$$

Лемма 4 полностью доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 3. Для доказательства достаточно показать, что каждая собственная функция f оператора $H(\mathbf{0})$, соответствующая собственному числу, лежащему левее существенного спектра, принадлежит ядру оператора V^λ , т. е. $V^\lambda f = 0$.

Пусть $z < 0$ – собственное значение оператора $H(\mathbf{0})$ и f – соответствующий собственный вектор, т. е. уравнение

$$H(\mathbf{0})f = zf \tag{13}$$

имеет нетривиальное решение f . Поскольку $z < 0$, то $E_0(p, q) - z > 0$ для всех $p, q \in \mathbb{T}^3$. Поэтому из (13) имеем

$$f(p, q) = \frac{1}{E_0(p, q) - z} \left[\frac{\mu_1}{8\pi^3} \int_{\mathbb{T}^3} f(s, q) ds + \frac{\mu_2}{8\pi^3} \int_{\mathbb{T}^3} f(p, s) ds + \frac{\mu_3}{8\pi^3} \int_{\mathbb{T}^3} f(s, p + q - s) ds \right].$$

Отсюда

$$f(p, q) = \frac{1}{E_0(p, q) - z} [\varphi_1(q) + \varphi_2(p) + \varphi_3(p + q)], \quad (14)$$

где

$$\begin{aligned} \varphi_1(q) &= \frac{\mu_1}{8\pi^3} \int_{\mathbb{T}^3} f(s, q) ds, \\ \varphi_2(p) &= \frac{\mu_2}{8\pi^3} \int_{\mathbb{T}^3} f(p, s) ds, \\ \varphi_3(p + q) &= \frac{\mu_3}{8\pi^3} \int_{\mathbb{T}^3} f(s, p + q - s) ds. \end{aligned} \quad (15)$$

Подставляя (14) в (15), получим

$$\begin{aligned} \varphi_1(q) &= \frac{\mu_1}{8\pi^3} \int_{\mathbb{T}^3} \frac{1}{E_0(s, q) - z} [\varphi_1(q) + \varphi_2(s) + \varphi_3(s + q)] ds, \\ \varphi_2(p) &= \frac{\mu_2}{8\pi^3} \int_{\mathbb{T}^3} \frac{1}{E_0(p, s) - z} [\varphi_1(s) + \varphi_2(p) + \varphi_3(p + s)] ds, \\ \varphi_3(p + q) &= \frac{\mu_3}{8\pi^3} \int_{\mathbb{T}^3} \frac{1}{E_0(s, p + q - s) - z} [\varphi_1(p + q - s) + \varphi_2(s) + \varphi_3(p + q)] ds \end{aligned}$$

или, эквивалентно,

$$\begin{aligned} \varphi_1(q) \Delta_1(q; z) &= \frac{\mu_1}{8\pi^3} \int_{\mathbb{T}^3} \frac{\varphi_2(s) ds}{E_0(s, q) - z} + \frac{\mu_1}{8\pi^3} \int_{\mathbb{T}^3} \frac{\varphi_3(s + q) ds}{E_0(s, q) - z}, \\ \varphi_2(p) \Delta_2(p; z) &= \frac{\mu_2}{8\pi^3} \int_{\mathbb{T}^3} \frac{\varphi_1(s) ds}{E_0(p, s) - z} + \frac{\mu_2}{8\pi^3} \int_{\mathbb{T}^3} \frac{\varphi_3(p + s) ds}{E_0(p, s) - z}, \\ \varphi_3(p + q) \Delta_3(p + q; z) &= \frac{\mu_3}{8\pi^3} \int_{\mathbb{T}^3} \frac{\varphi_2(s) ds}{E_0(s, p + q - s) - z} + \frac{\mu_3}{8\pi^3} \int_{\mathbb{T}^3} \frac{\varphi_1(p + q - s) ds}{E_0(s, p + q - s) - z}, \end{aligned} \quad (16)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta_1(q; z) &= 1 - \frac{\mu_1}{8\pi^3} \int_{\mathbb{T}^3} \frac{ds}{E_0(s, q) - z}, \\ \Delta_2(p; z) &= 1 - \frac{\mu_2}{8\pi^3} \int_{\mathbb{T}^3} \frac{ds}{E_0(p, s) - z}, \\ \Delta_3(p + q; z) &= 1 - \frac{\mu_3}{8\pi^3} \int_{\mathbb{T}^3} \frac{ds}{E_0(s, p + q - s) - z}. \end{aligned}$$

В последних интегралах правых частей уравнений системы (16), совершая замены переменных $s + p = t$, $s + q = t$, $p + q - s = t$, с учетом периодичности подынтегральных

функций и неравенств $\Delta_\alpha(p; z) > 0$, справедливых при $z < 0$ и $\mu_\alpha \leq \mu_\alpha^0$, имеем

$$\begin{aligned}\varphi_1(q) &= \frac{\mu_1}{8\pi^3} \frac{1}{\Delta_1(q; z)} \int_{\mathbb{T}^3} \frac{\varphi_2(s) ds}{E_0(s, q) - z} + \frac{\mu_1}{8\pi^3} \int_{\mathbb{T}^3} \frac{\varphi_3(s) ds}{E_0(s - q, q) - z}, \\ \varphi_2(p) &= \frac{\mu_2}{8\pi^3} \frac{1}{\Delta_2(p; z)} \int_{\mathbb{T}^3} \frac{\varphi_1(s) ds}{E_0(p, s) - z} + \frac{\mu_2}{8\pi^3} \int_{\mathbb{T}^3} \frac{\varphi_3(s) ds}{E_0(p, s - p) - z}, \\ \varphi_3(p + q) &= \frac{\mu_3}{8\pi^3} \frac{1}{\Delta_3(p + q; z)} \int_{\mathbb{T}^3} \frac{\varphi_2(s) ds}{E_0(s, p + q - s) - z} + \frac{\mu_3}{8\pi^3} \int_{\mathbb{T}^3} \frac{\varphi_1(s) ds}{E_0(p + q - s, s) - z}.\end{aligned}$$

Поскольку $E_0(\cdot, \cdot)$ является функцией, периодической по каждому аргументу с периодом π , такой же является и функция $\Delta_\alpha(\cdot; z)$ для каждого $\alpha = 1, 2, 3$. Поэтому каждая из функций $\varphi_\alpha(\cdot)$, $\alpha = 1, 2, 3$, определенных на $\mathbb{T}^3$, является периодической функцией по каждому аргументу с периодом π . Таким образом, из (14) вытекает, что собственная функция f оператора $H(\mathbf{0})$ является функцией, периодической по каждому аргументу с периодом π .

Покажем, что $(\bar{V}_\alpha f)(p, q) = 0$ для каждого $\alpha = 1, 2, 3$. Запишем $\bar{V}_1 f$ в виде

$$(\bar{V}_1 f)(p, q) = \sum_{i=1}^3 \cos p_i \int_{\mathbb{T}^3} \cos s_i f(s, p) ds + \sum_{i=1}^3 \sin p_i \int_{\mathbb{T}^3} \sin s_i f(s, p) ds.$$

Совершая здесь замену переменных $s_i = t_i + \pi$, имеем $\bar{V}_1 f = -\bar{V}_1 f$, т. е. $\bar{V}_1 f = 0$.

Совершенно аналогично показывается, что $\bar{V}_2 f = \bar{V}_3 f = 0$.

4. АСИМПТОТИКА ДЛЯ ЧИСЛА СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ОПЕРАТОРА $H(\mathbf{0})$

Пусть $U: L_2((\mathbb{T}^3)^2) \rightarrow L_2((2\mathbb{T})^3)^2$ – унитарный оператор, определенный по формуле

$$(Uf)(p, q) = 8f(2p, 2q),$$

где $2\mathbb{T} := (-2\pi, 2\pi]$. Тогда

$$(U^{-1}f)(p, q) = \frac{1}{8}f\left(\frac{p}{2}, \frac{q}{2}\right).$$

Обозначим через $\bar{H}$ самосопряженный оператор, действующий в гильбертовом пространстве $L_2((2\mathbb{T})^3)^2$ по формуле

$$\bar{H} = \bar{H}_0 - \mu_1 \tilde{V}_1 + \mu_2 \tilde{V}_2 + \mu_3 \tilde{V}_3,$$

где $\bar{H}_0$ – оператор умножения на функцию

$$E_0\left(\frac{p}{2}, \frac{q}{2}\right) = \frac{1}{m_1} \varepsilon\left(\frac{p}{2}\right) + \frac{1}{m_2} \varepsilon\left(\frac{q}{2}\right) + \frac{1}{m_3} \varepsilon\left(\frac{p+q}{2}\right), \quad (17)$$

а операторы $\tilde{V}$, $\alpha = 1, 2, 3$, заданы формулами

$$\begin{aligned}(\tilde{V}_1 f)(p, q) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{T}^3} f(p, 2s) ds, \\(\tilde{V}_2 f)(p, q) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{T}^3} f(2s, q) ds, \quad f \in L_2((2\mathbb{T})^3)^2), \\(\tilde{V}_3 f)(p, q) &= \int_{\mathbb{T}^3} f(2s, p + q - 2s) ds.\end{aligned}$$

Легко доказывается следующая

ЛЕММА 9. Оператор $H(\mathbf{0})$ унитарно эквивалентен оператору $\bar{H}$:

$$\bar{H} = U^{-1} H(\mathbf{0}) U.$$

ЛЕММА 10. Каждая собственная функция $f \in L_2(((2\mathbb{T})^3)^2)$ оператора $\bar{H}$, соответствующая собственному значению $z < 0$, является периодической функцией по каждому аргументу с периодом 2π .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пользуясь периодичностью функции $E_0(\cdot, \cdot)$ по каждому аргументу с периодом π , рассуждая аналогично доказательству леммы 3, получим утверждение леммы.

Обозначим через H самосопряженный оператор, действующий в гильбертовом пространстве $L_2((\mathbb{T}^3)^2)$ по формуле

$$H = H_0 - \mu_1 V_1 + \mu_2 V_2 + \mu_3 V_3,$$

где H_0 – оператор умножения на функцию (17).

ЛЕММА 11. Каждое собственное значение оператора $H(\mathbf{0})$, лежащее левее существенного спектра, является собственным значением оператора H с той же кратностью, и обратно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f \in L_2((2\mathbb{T})^3)^2$ – собственная функция оператора $\bar{H}$, соответствующая собственному значению $z < 0$. Тогда по лемме 10 функция f является периодической каждому аргументу с периодом 2π . Отсюда имеем

$$\int_{\mathbb{T}^3} f(p, 2s) ds = \frac{1}{8} \int_{(2\mathbb{T})^3} f(p, t) dt = \int_{\mathbb{T}^3} f(p, t) dt,$$

другими словами,

$$(\tilde{V}_1 f)(p, q) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{T}^3} f(p, s) ds.$$

Проводя аналогичные вычисления, получим

$$\begin{aligned}(\tilde{V}_2 f)(p, q) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{T}^3} f(s, q) ds, \\(\tilde{V}_3 f)(p, q) &= \int_{\mathbb{T}^3} f(s, p + q - s) ds,\end{aligned} \quad f \in L_2((2\mathbb{T})^3)^2).$$

Эти представления показывают, что функция $g \in L_2((\mathbb{T})^3)^2$, заданная как сужение функции $f \in L_2((2\mathbb{T})^3)^2$ на $((\mathbb{T})^3)^2$, является собственной функцией оператора H , а число z – соответствующим собственным числом.

Обратно, если $g \in L_2((\mathbb{T})^3)^2$ – собственная функция оператора H , соответствующая собственному значению $z < 0$, то функция, периодическая по каждому аргументу с периодом 2π , заданная как $g \in L_2((2\mathbb{T})^3)^2$, является собственной функцией оператора $\bar{H}$, а число z – соответствующим собственным значением. При этом каждое собственное значение оператора $\bar{H}$, лежащее левее существенного спектра, является собственным значением оператора H с той же кратностью, и обратно. Отсюда и из леммы 9 получим доказательство леммы 3.

Простое вычисление показывает, что

$$\int_{\mathbb{T}^3} \frac{ds}{\varepsilon(s)} = \int_{\mathbb{T}^3} \frac{ds}{\varepsilon(s/2)}.$$

Поэтому

$$\mu_\alpha^0 = 8\pi^3 \frac{m_\beta + m_\gamma}{m_\beta m_\gamma} \left(\int_{\mathbb{T}^3} \frac{ds}{\varepsilon(s/2)} \right)^{-1}.$$

Следующая теорема доказана в работе [8].

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\mu_\alpha = \mu_\alpha^0$, $\mu_\beta = \mu_\beta^0$ и $\mu_\gamma \leq \mu_\gamma^0$ при $\alpha \neq \beta \neq \gamma$. Тогда существует предел

$$\lim_{z \rightarrow -0} \left(-\frac{1}{\ln(-z)} \bar{N}(z) \right) = \mathcal{U}_0, \quad \mathcal{U}_0 > 0,$$

где $\bar{N}(z)$ – число собственных значений оператора H (с учетом кратности), лежащих левее $z < 0$.

Доказательство теоремы 1 вытекает из леммы 11 и теоремы 3.

Заметим, что положительное число $\mathcal{U}_0$ есть число, найденное в работе [4], которое зависит от числа виртуальных уровней двухчастичных подгамильтонианов и от отношений масс частиц.

Благодарности. Авторы выражают благодарность рецензенту за чтение работы и полезные замечания.

Список литературы

- [1] В. Н. Ефимов, *ЯФ*, **12**:5 (1970), 1080–1091.
- [2] R. D. Amado, J. V. Noble, *Phys. Rev. D*, **5**:8 (1972), 1992–2002.
- [3] С. П. Меркурьев, Л. Д. Фаддеев, *Квантовая теория рассеяния для систем нескольких частиц*, Наука, М., 1985.
- [4] A. V. Sobolev, *Commun. Math. Phys.*, **156**:1 (1993), 101–126.
- [5] Н. Tamura, *Nagoya Math. J.*, **130** (1993), 55–83.
- [6] С. Н. Лакаев, З. Э. Муминов, *Функц. анализ и его прил.*, **37**:3 (2003), 80–84.
- [7] Ж. И. Абдуллаев, С. Н. Лакаев, *ТМФ*, **136**:2 (2003), 231–245.
- [8] S. Albeverio, S. N. Lakaev, Z. I. Muminov, *Ann. Henri Poincaré*, **5**:4 (2004), 743–772.
- [9] С. Н. Лакаев, М. Э. Муминов, *ТМФ*, **135**:3 (2003), 478–503.

- [10] Г. М. Жислин, Тр. ММО, **9**, 1960, 81–120.
- [11] М. Э. Муминов, *ТМФ*, **159**:2 (2009), 299–317.
- [12] М. Э. Муминов, *ТМФ*, **164**:1 (2010), 46–61.
- [13] S. Albeverio, S. N. Lakaev, Z. I. Muminov, *Math. Nachr.*, **280**:7 (2007), 699–716.
- [14] М. Рид, Б. Саймон, *Методы современной математической физики*, т. 4: *Анализ операторов*, Мир, М., 1982.
- [15] М. Э. Муминов, А. М. Хуррамов, *ТМФ*, **177**:3 (2013), 482–496.

Поступила в редакцию 4.07.2014,
после доработки 4.09.2014