Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

К. Л. Зарембо, Фазы сильной связи планарной $\mathcal{N} = 2^*$ суперсимметричной теории Янга–Миллса, *ТМФ*, 2014, том 181, номер 3, 464–474

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8765>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.164.48.24

26 апреля 2023 г., 13:12:48

© 2014 г.

К. Л. Зарембо^{*†‡}

ФАЗЫ СИЛЬНОЙ СВЯЗИ ПЛАНАРНОЙ $\mathcal{N} = 2^*$ СУПЕРСИММЕТРИЧНОЙ ТЕОРИИ ЯНГА–МИЛЛСА

$\mathcal{N} = 2^*$ теория (массивная деформация $\mathcal{N} = 4$ суперсимметричной теории Янга–Миллса) претерпевает бесконечное число квантовых фазовых переходов в пределе больших N . Фазовая структура и критическое поведение могут быть исследованы с помощью суперсимметричной локализации, которая сводит задачу к эффективной матричной модели. Модель рассмотрена в фазе сильной связи.

Ключевые слова: суперсимметрия, матричные модели, $1/N$ -разложение.

DOI: 10.4213/tmf8765

1. ВВЕДЕНИЕ

Максимально суперсимметричная $\mathcal{N} = 4$ теория Янга–Миллса математически очень богата, во многом благодаря хорошо определенному струнному описанию посредством АдС/КТП-соответствия. Ближайший аналог $\mathcal{N} = 4$ теории с явно нарушенной конформной инвариантностью известен как $\mathcal{N} = 2^*$ теория Янга–Миллса. Эта теория очевидным образом менее симметрична и обладает более сложной динамикой, но некоторые непертурбативные результаты, известные для $\mathcal{N} = 4$ теории, обобщаются и на случай $\mathcal{N} = 2^*$ суперсимметрии. Один из таких результатов состоит в точном вычислении функционального интеграла на S^4 методом суперсимметричной локализации [1]. Функциональный интеграл на S^4 сводится к нульмерной матричной модели в любой калибровочной теории с $\mathcal{N} = 2$ суперсимметрией. Простейшая гауссова модель отвечает случаю $\mathcal{N} = 4$ теории Янга–Миллса [1]–[3].

Матричная модель, отвечающая локализации в $\mathcal{N} = 2^*$ теории [1], негауссова и обладает достаточно сложной фазовой структурой в пределе больших N [4], [5] (в том режиме, когда дуальность между калибровочными полями и струнами должна упрощаться). Эту модель можно решить точно лишь в определенных предельных

^{*}Nordita, Royal Institute of Technology and Stockholm University, Stockholm, Sweden.
E-mail: zaremba@nordita.org

[†]Department of Physics and Astronomy, Uppsala University, Uppsala, Sweden

[‡]Институт теоретической и экспериментальной физики, Москва, Россия

случаях [5], [6]. В частности, известно ее асимптотическое решение в режиме сильной связи, которое позволяет нетривиальным образом проверить голографическую дуальность вне рамок АдС/КТП-соответствия [6]. Свободную энергию и вакуумное среднее вильсоновской петли, вычисленные в матричной модели, можно непосредственно сравнить с геометрическими величинами в дуальной теории супергравитации, которая тоже известна как для $\mathcal{N} = 2^*$ теории [7], так и для ее компактификации на S^4 [8].

Другой представляющий интерес режим возникает в пределе декомпактификации. Компактификацию на S^4 можно рассматривать как формальный прием, позволяющий выделить единственное вакуумное состояние и определить функциональный интеграл без наложения граничных условий (такая точка зрения отражена в работе [9]). Радиус 4-сферы R можно тогда считать параметром инфракрасной регуляризации, который должен быть устремлен к бесконечности в конце вычислений. Интересно, что в пределе бесконечного объема фазовая структура $\mathcal{N} = 2^*$ теории Янга–Миллса оказывается весьма нетривиальной. При изменении константы связи 'т Хоофта от нуля до бесконечности теория претерпевает бесконечное число фазовых переходов [4]. Сами по себе фазовые переходы – достаточно распространенное явление в матричных моделях [10], [11], но в $\mathcal{N} = 2^*$ теории имеют место переходы нового типа [5], который ранее не изучался.

Точное решение локализационной матричной модели в фазе слабой связи было найдено в работе [4] методом, развитым в [12], [13], в то время как фаза сильной связи изучалась только в инфинитезимальной окрестности точки фазового перехода [5]. Цель настоящей работы состоит в более детальном исследовании фазы (точнее, фаз) сильной связи. Фазовая структура, аналогичная найденной в $\mathcal{N} = 2^*$ теории Янга–Миллса, была обнаружена в трехмерных массивных теориях, к которым тоже можно применить локализацию [14]. Причем матричную модель в этом случае можно решить аналитически [15]. Мы применим аналогичные методы в четырех измерениях. Хотя они и не приводят к полному решению задачи, вакуумная структура может быть с их помощью детально изучена на всей фазовой диаграмме.

2. ЛОКАЛИЗАЦИОННАЯ МАТРИЧНАЯ МОДЕЛЬ

Спектр полей $\mathcal{N} = 2^*$ суперсимметричной теории Янга–Миллса включает в себя калибровочные поля A_μ , их скалярные суперпартнеры Φ и Φ' , комплексные скаляры Z и $\tilde{Z}$ из гипермультиплета и четыре майорановских фермиона. Все поля лежат в присоединенном представлении калибровочной группы $SU(N)$. Лагранжиан содержит массовые члены для комплексных скаляров и их суперпартнеров. В безмассовом пределе лагранжиан $\mathcal{N} = 2^*$ теории переходит в лагранжиан $\mathcal{N} = 4$ теории Янга–Миллса.

Калибровочная $SU(N)$ симметрия $\mathcal{N} = 2^*$ теории спонтанно нарушается вакуумным средним скаляра из векторного мультиплета:

$$\langle \Phi \rangle = \text{diag}(a_1, \dots, a_N), \quad (2.1)$$

и почти все поля приобретают массу за счет механизма Хиггса. Исключение составляют калибровочные бозоны ненарушенной $U(1)^{N-1}$ симметрии. Компоненты векторного мультиплета с цветовыми индексами i и j приобретают массы, равные

$|a_i - a_j|$, в то время как массы компонент гипермультиплета несут зависимость и от массового параметра M в лагранжиане: $|a_i - a_j \pm M|$. Собственные значения a_i и a_j , находящиеся на расстоянии M друг от друга, образуют резонанс – им соответствует безмассовый гипермультиплет. Именно из-за этих резонансов в матричной модели возникают фазовые переходы.

Локализация сводит функциональный интеграл $\mathcal{N} = 2^*$ теории на S^4 к матричному интегралу по кулоновским модулям a_i из (2.1) [1]:

$$Z = \int d^{N-1}a \prod_{i < j} \frac{(a_i - a_j)^2 H^2(a_i - a_j)}{H(a_i - a_j - M)H(a_i - a_j + M)} \exp\left[-\frac{8\pi^2 N}{\lambda} \sum_i a_i^2\right], \quad (2.2)$$

где

$$H(x) \equiv \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x^2}{n^2}\right)^n e^{-x^2/n}. \quad (2.3)$$

Точная статистическая сумма содержит также инстантонный вклад, который при больших N экспоненциально подавлен [5] и потому может быть отброшен. С помощью локализации можно посчитать корреляционные функции специального вида, в том числе петлю Вильсона для большой окружности на S^4 , которая сводится к экспоненциальному среднему в матричной модели [1]:

$$W(C_{\text{ircle}}) \equiv \left\langle \frac{1}{N} \text{tr} P \exp \oint_{C_{\text{ircle}}} ds \left(iA_\mu \dot{x}^\mu + \Phi |\dot{x}| \right) \right\rangle^{\text{loc}} = \left\langle \frac{1}{N} \sum_i e^{2\pi a_i} \right\rangle. \quad (2.4)$$

В ведущем планарном приближении интеграл по собственным значениям может быть вычислен в приближении седловой точки. Если ввести плотность собственных значений

$$\rho(x) = \left\langle \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta(x - a_i) \right\rangle, \quad (2.5)$$

то уравнения седловой точки приобретают вид сингулярного интегрального уравнения:

$$\oint_{-\mu}^{\mu} dy \rho(y) \left(\frac{1}{x-y} - \mathcal{K}(x-y) + \frac{1}{2} \mathcal{K}(x-y+M) + \frac{1}{2} \mathcal{K}(x-y-M) \right) = \frac{8\pi^2}{\lambda} x, \quad (2.6)$$

где $\mathcal{K} = -H'/H$. Это уравнение изучалось в ряде работ [16], [4]–[6], [9], но его общее аналитическое решение неизвестно.

В пределе декомпактификации, когда $R \rightarrow \infty$, уравнение седловой точки немного упрощается. В уравнениях, приведенных выше, радиус явно не появляется, но лишь потому, что эти уравнения выписаны в безразмерных переменных с $R = 1$. Зависимость от R восстанавливается перемасштабированием $a_i \rightarrow a_i R$, $M \rightarrow MR$, $x \rightarrow xR$ и $y \rightarrow yR$. Аргумент функции $\mathcal{K}(Rx)$ становится большим при $R \rightarrow \infty$, и тогда саму функцию можно заменить ее асимптотикой на бесконечности: $\mathcal{K}(x) \rightarrow x \ln x^2$.

Дифференцируя получающиеся уравнения дважды, мы получаем

$$\oint_{-\mu}^{\mu} dy \rho(y) \left(\frac{2}{x-y} - \frac{1}{x-y+M} - \frac{1}{x-y-M} \right) = 0. \quad (2.7)$$

Это и есть уравнение седловой точки декомпактифицированной теории, которое мы собираемся изучать.

Для петли Вильсона (2.4) в пределе декомпактификации выполняется закон периметра:

$$\ln W(C_{\text{ircle}}) = 2\pi R\mu. \quad (2.8)$$

Закону периметра подчиняются любые контуры большого размера, а не только большая окружность на S^4 . Это утверждение можно проверить с помощью голографии. Коэффициент пропорциональности в законе периметра, вычисленный голографически, согласуется с решением матричной модели в пределе сильной связи [6].

Граничные условия на плотность в пределе декомпактификации отличаются от обычно принятых в матричных моделях [17]:

$$\rho(x) \sim \frac{\text{const}}{\sqrt{\mu \mp x}}, \quad x \rightarrow \pm\mu. \quad (2.9)$$

Плотность должна быть нормирована на единицу, что, как правило, определяет границу распределения собственных значений как функцию константы связи. В нашем случае плотность удовлетворяет однородному уравнению (2.7), и условие нормировки не налагает дополнительных ограничений. Вместо этого граница интервала μ определяется интегральной формой уравнения (2.7), получающейся из (2.6) однократным дифференцированием. Это условие, записанное при $x = 0$, имеет вид

$$\int_{-\mu}^{\mu} dy \rho(y) \ln \frac{|M^2 - y^2|}{y^2} = \frac{8\pi^2}{\lambda}. \quad (2.10)$$

На самом деле удобнее принять M и μ за независимые переменные вместо M и λ . Уравнение седловой точки, записанное в форме (2.7), имеет единственное нормированное решение при фиксированных M и μ . Вспомогательное условие (2.10) затем определяет константу связи как функцию M и μ , или, точнее, их безразмерного отношения.

Структура решения уравнения (2.7) зависит от соотношения ширины распределения собственных значений 2μ и массы M . Если $M > 2\mu$, то уравнение (2.7) имеет ядро типа ядра Гильберта, с единственным полюсом в области интегрирования, и решается в эллиптических интегралах [4] с помощью метода, разработанного в [12], [13]. Это решение наталкивается на сингулярность при $\mu = M/2$, что говорит о переходе в новую фазу. В терминах константы λ Хоффа решение слабой связи существует при $\lambda < \lambda_c$ с $\lambda_c \simeq 35.425$ [4]. Нас будет интересовать структура плотности собственных значений при $\lambda > \lambda_c$.

Структура плотности в инфинитезимальной близости от точки фазового перехода изучалась в работе [5], где показано, что у плотности возникают два пика при $x = \pm(M - \mu)$, которые находятся в резонансе с границами интервала. Пики имеют лямбдоподобную форму: плотность стремится к конечному пределу при приближении к пику изнутри распределения и имеет сингулярность, обратную квадратному

Рис. 1. Нелокальное отображение (3.1) индуцирует дополнительные сингулярности внутри интервала $(-\mu, \mu)$: вспомогательная функция $r(x)$ (а) и ее образ $\rho(x)$ (б).

корню, при приближении снаружи. В этой работе также показано, что плотность может быть выражена через вспомогательную функцию, у которой нет сингулярностей в резонансных точках. В следующем разделе мы обобщим эти рассуждения на случай конечного расстояния от точки фазового перехода. После этого мы найдем более общий анзац, верный в любой фазе с произвольным количеством резонансов.

3. ФАЗА С ДВУМЯ РЕЗОНАНСАМИ

Сначала предположим, что $2\mu > M$, но при этом $\mu < M$, так что имеются только два резонанса при $x = M - \mu$ и при $x = -M + \mu$. Для плотности мы выбираем следующий анзац¹⁾, обобщающий структуру плотности, найденную вблизи фазового перехода при $2\mu - M \ll M$:

$$\frac{1}{C}\rho(x) = \begin{cases} r(x), & x \in (-M + \mu, M + \mu), \\ \frac{4}{3}r(x) + \frac{2}{3}r(x - M), & x \in (M - \mu, \mu), \\ \frac{4}{3}r(x) + \frac{2}{3}r(x + M), & x \in (-\mu, -M + \mu). \end{cases} \quad (3.1)$$

Общий множитель C введен для удобства и будет в дальнейшем зафиксирован условием нормировки. Важное свойство этого анзаца заключается в его нелокальности. Вследствие нелокальности сингулярности $r(x)$ на концах интервала индуцируют разрывы плотности в середине распределения собственных значений. Даже если $r(x)$ — гладкая функция между $-\mu$ и μ , плотность $\rho(x)$ будет иметь сингулярности в точках $M - \mu$ и $-M + \mu$. Эти сингулярности возникают как проекции концов интервала при отображении $x \rightarrow x \pm M$ и связаны с резонансами на почти безмассовых гипермультиплетях.

Коэффициенты в (3.1) подобраны так, что при подстановке анзаца в интегральное уравнение (2.7) резонансные члены (те, которые имеют полюсы при $y = x \pm M$)

¹⁾Этот анзац изначально был предложен нам Д. Волиным.

сокращаются между различными частями уравнения. Собирая оставшиеся вклады, мы получаем для $r(x)$ интегральное уравнение типа уравнения Гильберта:

$$\begin{aligned} \int_{-\mu}^{\mu} dy r(y) \frac{2}{x-y} = \int_{-M+\mu}^{M-\mu} dy r(y) \left(\frac{1}{x-y-M} + \frac{1}{x-y+M} \right) + \\ + \frac{2}{3} \int_{M-\mu}^{\mu} dy r(y) \left(\frac{2}{x-y-M} + \frac{1}{x-y+2M} \right) + \\ + \frac{2}{3} \int_{-\mu}^{M+\mu} dy r(y) \left(\frac{2}{x-y+M} + \frac{1}{x-y-2M} \right). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Все три интеграла в правой части собственные и, следовательно, определяют гладкую функцию на интервале $(-\mu, \mu)$. Тогда из общей теории сингулярных интегральных уравнений следует, что решение с граничными условиями

$$r(x) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{\mu \mp x}}, \quad x \rightarrow \pm\mu, \quad (3.3)$$

существует, единственно и не имеет сингулярностей в области интегрирования. Функция $r(x)$ имеет форму, проиллюстрированную на рис. 1а.

Из анзаца (3.1) следует, что плотность на границах интервала ведет себя как

$$\rho(x) \rightarrow \frac{4C}{3\sqrt{\mu \mp x}}, \quad x \rightarrow \pm\mu. \quad (3.4)$$

Когда x приближается к одной из резонансных точек снаружи, плотность расходится как

$$\rho(x) \rightarrow \frac{2C}{3\sqrt{\pm x - M \pm \mu}}, \quad x \rightarrow \pm M \mp \mu \pm 0. \quad (3.5)$$

При подходе к резонансной точке изнутри плотность имеет конечный предел $C r(M - \mu)$. Такое поведение проиллюстрировано на рис. 1б.

Постоянная нормировки C определяется условием

$$C \left(\int_{-\mu}^{\mu} + \int_{-M+\mu}^{M-\mu} + \int_{M-\mu}^{\mu} \right) dx r(x) = 1. \quad (3.6)$$

4. ОБЩАЯ СТРУКТУРА

При увеличении μ появляется все больше и больше резонансов, что приводит к вторичным фазовым переходам каждый раз, когда 2μ сравнивается с целым кратным M . Таким образом, существует бесконечно много фаз, при этом каждая фаза характеризуется различным числом пиков в плотности собственных значений. В n -й фазе имеется $2n$ пиков. Для перечисления различных фаз удобно ввести переменные

$$n = \left[\frac{2\mu}{M} \right], \quad \Delta = \left\{ \frac{2\mu}{M} \right\}, \quad 2\mu = nM + \Delta, \quad (4.1)$$

где $[\cdot]$ и $\{\cdot\}$ обозначают целую и дробную части соответственно.

Рис. 2. Резонансные точки разделяют распределение собственных значений на подынтервалы a_k и b_k , на которых плотность не сингулярна.

Пики плотности расположены в резонансных точках $-\mu + kM$ и $\mu - kM = -\mu + (n - k)M + \Delta$, которые разделяют интервал $(-\mu, \mu)$ на $2n + 1$ подынтервалов a_k и b_k , как показано на рис. 2:

$$\begin{aligned} a_k &= (-\mu + (k - 1)M, -\mu + (k - 1)M + \Delta), \quad k = 1, \dots, n + 1, \\ b_k &= (-\mu + (k - 1)M + \Delta, -\mu + kM), \quad k = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Наше основное предположение состоит в том, что плотность на каждом из подынтервалов может быть получена применением некоторого оператора сдвига к единственной аналитической функции $r(x)$. Таким образом, мы выбираем следующий анзац, который обобщает (3.1) на случай произвольного числа подынтервалов:

$$\rho(x) = \begin{cases} \sum_{l=-k+1}^{n+1-k} A_{k+l,l} r(x + lM), & x \in a_k, \\ \sum_{l=-k+1}^{n-k} B_{k+l,l} r(x + lM), & x \in b_k, \end{cases} \quad (4.3)$$

где A_{mp} , B_{mp} – численные коэффициенты, которые мы определим ниже.

Подстановка этого анзаца в уравнение седловой точки (2.7) приводит к линейной комбинации интегралов вида

$$I_{mp} = \oint_{a_k} \frac{dy r(y)}{x - y + pM}, \quad J_{mp} = \oint_{b_k} \frac{dy r(y)}{x - y + pM}, \quad (4.4)$$

а именно:

$$\begin{aligned} \oint_{-\mu}^{\mu} dy \rho(y) & \left(\frac{2}{x - y} - \frac{1}{x - y + M} - \frac{1}{x - y - M} \right) = \\ &= \sum_{m=1}^{n+1} \sum_{l=m-n-1}^{m-1} A_{ml} (2I_{ml} - I_{m,l+1} - I_{m,l+1}) + \\ &+ \sum_{m=1}^n \sum_{l=m-n}^{m-1} B_{ml} (2J_{ml} - J_{m,l+1} - J_{m,l+1}). \end{aligned}$$

Мы получаем, таким образом, сингулярное интегральное уравнение на $r(x)$. Наша цель – подстройкой коэффициентов A_{mp} и B_{mp} добиться того, чтобы в результате получалось уравнение типа уравнения Гильберта. Для этого нужно избавиться от всех интегралов с сингулярными ядрами помимо ядра Гильберта $1/(x - y)$. “Опасными” являются интегралы I_{mp} с $m - n - 1 \leq p \leq m - 1$, $p \neq 0$ и J_{mp} с $m - n \leq p \leq m - 1$, $p \neq 0$. Приравнивая коэффициенты перед “опасными” интегралами к нулю и норми-

руя коэффициент при интеграле с ядром Гильберта на двойку, мы получаем систему линейных уравнений на A_{mp} , B_{mp} :

$$\begin{aligned} 2A_{mp} - A_{m,p+1} - A_{m,p-1} &= 2\delta_{p0}, & p = m - n - 1, \dots, m - 1, \\ 2B_{mp} - B_{m,p+1} - B_{m,p-1} &= 2\delta_{p0}, & p = m - n, \dots, m - 1. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Решая эту систему, мы получим

$$A_{mp} = \begin{cases} \frac{2(n+2-m)(m-p)}{n+2}, & p \geq 0, \\ \frac{2m(n+2-m+p)}{n+2}, & p \leq 0, \end{cases} \quad (4.6)$$

и

$$B_{mp} = \begin{cases} \frac{2(n+1-m)(m-p)}{n+1}, & p \geq 0, \\ \frac{2m(n+1-m+p)}{n+1}, & p \leq 0. \end{cases} \quad (4.7)$$

Легко проверить, что в случае $n = 1$ мы возвращаемся к анзацу (3.1).

Получающееся в результате интегральное уравнение на $r(x)$ имеет вид

$$\begin{aligned} \int_{-\mu}^{\mu} dy r(y) \frac{2}{x-y} &= \\ &= \frac{1}{n+2} \sum_{m=1}^{n+1} \int_{a_m} dy r(y) \left[\frac{m}{x-y-(n+2-m)M} + \frac{n+2-m}{x-y+mM} \right] + \\ &+ \frac{1}{n+1} \sum_{m=1}^n \int_{b_m} dy r(y) \left[\frac{m}{x-y-(n+1-m)M} + \frac{n+1-m}{x-y+mM} \right], \end{aligned} \quad (4.8)$$

и его правая часть действительно представляет собой аналитическую функцию на интервале $(-\mu, \mu)$, так что решение этого уравнения с асимптотикой (3.3) существует и единственно. Аналог условия (3.6) теперь имеет вид

$$C \left[\sum_{m=1}^{n+1} m(n+2-m) \int_{a_m} + \sum_{m=1}^n m(n+1-m) \int_{b_m} \right] dx r(x) = 1. \quad (4.9)$$

Хотя мы и не знаем, как решить уравнение на $r(x)$ при $n > 0$, качественная структура плотности собственных значений и основные черты критического поведения определяются конкретной формой этой функции в меньшей степени, чем отображением (4.3) и явным видом коэффициентов A_{mp} и B_{mp} , приведенным в (4.6) и (4.7). Поэтому мы можем изучать критическое поведение, не зная явного вида функции $r(x)$. Нетрудно видеть, что плотность несингулярна на всех b -интервалах и имеет особенности на обоих концах a -интервалов, а именно:

$$\begin{aligned} \rho(x) &\simeq \frac{2C(n+1-l)}{(n+2)\sqrt{\varepsilon}}, & x = -\mu + lM + \varepsilon, \\ \rho(x) &\simeq \frac{2Cl}{(n+2)\sqrt{\varepsilon}}, & x = -\mu + lM + \Delta - \varepsilon, \end{aligned} \quad (4.10)$$

при $\varepsilon \rightarrow 0$, как показано на рис. 3.

Рис. 3. Плотность собственных значений для $n = 2$. Рис. 4. Два типа критического поведения в $\mathcal{N} = 2^*$ теории Янга–Миллса: a -интервалы схлопываются до нулевого размера (а); b -интервалы схлопываются (б).

В фазе с нечетным n (см. рис. 1б) a -интервалы растут с увеличением μ , а b -интервалы уменьшаются. Когда n четно (см. рис. 3), наоборот, a -интервалы сжимаются, а b -интервалы растут. Следовательно, существуют два типа фазовых переходов, связанных с тем, что либо a -интервалы, либо b -интервалы сжимаются до нулевого размера, как показано на рис. 4.

Константа связи растет с ростом μ , и, когда константа связи велика, ширина распределения собственных значений становится параметрически больше шкалы масс: $\mu \gg M$. Плотность собственных значений имеет в этом пределе очень сложную форму, с множеством сингулярностей. С другой стороны, сингулярности возникают на малых масштабах порядка M . При усреднении по достаточно широкому интервалу плотность должна приближаться к гладкому решению задачи в сильной связи,

Рис. 5. Плотность собственных значений в пределе сильной связи. На малых масштабах плотность имеет сложную, нерегулярную структуру со множеством сингулярностей. Однако усредненная плотность в хорошем приближении описывается вигнеровским полукругом, изображенным штриховой линией.

а именно к вигнеровскому полукругу [6]²⁾:

$$\rho_{\infty}(x) = \frac{2\sqrt{\mu^2 - x^2}}{\pi\mu^2}. \quad (4.11)$$

Из рис. 5 хорошо видно, что это действительно так.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

$\mathcal{N} = 2^*$ суперсимметричная теория Янга–Миллса обладает богатой фазовой структурой, которую можно изучать с помощью суперсимметричной локализации. Хотя в настоящий момент и неизвестно, как решить локализационную матричную модель точно в фазе сильной связи, можно получить достаточно подробную картину плотности собственных значений. Критическое поведение связано с мутациями сингулярностей плотности, которые происходят при увеличении ширины распределения собственных значений.

Наибольший интерес представляет описание такого поведения в рамках голографической дуальности. Поскольку большинство фазовых переходов происходит в области сильной связи, квантовый режим дуальной теории струн для этого может быть и не нужен. В принципе плотность собственных значений можно исследовать в рамках голографии более или менее напрямую, помещая D-брану в дуальную геометрию [19], [20]. Однако классическая D-брана чувствительна к изменениям

²⁾Альтернативный вывод полукругового распределения, не опирающийся на локализацию на S^4 , приведен в работе [18].

усредненной плотности и, по-видимому, не может разрешить сложную сингулярную структуру, возникающую на малых расстояниях [19], [6]. Струнное описание фазовых переходов, которые наблюдаются в матричной модели, остается открытой проблемой.

Благодарности. Работа поддержана коллаборацией Marie Curie GATIS программы FP7 Евросоюза (грант REA № 317089), ERC Advanced (грант № 341222) и Шведским фондом научных исследований (VR) (грант № 2013-4329).

Список литературы

- [1] V. Pestun, *Commun. Math. Phys.*, **313**:1 (2012), 71–129, arXiv: 0712.2824.
- [2] J. K. Erickson, G. W. Semenoff, K. Zarembo, *Nucl. Phys. B*, **582**:1 (2000), 155–175, arXiv: hep-th/0003055.
- [3] N. Drukker, D. J. Gross, *J. Math. Phys.*, **42**:7 (2001), 2896–2914, arXiv: hep-th/0010274.
- [4] J. G. Russo, K. Zarembo, *JHEP*, **04** (2013), 065, 25 pp., arXiv: 1302.6968.
- [5] J. G. Russo, K. Zarembo, *JHEP*, **11** (2013), 130, 51 pp., arXiv: 1309.1004.
- [6] A. Buchel, J. G. Russo, K. Zarembo, *JHEP*, **03** (2013), 062, 12 pp., arXiv: 1301.1597.
- [7] K. Pilch, N. P. Warner, *Nucl. Phys. B*, **594**:1–2 (2001), 209–228, arXiv: hep-th/0004063.
- [8] N. Bobev, H. Elvang, D. Z. Freedman, S. S. Pufu, *Holography for $\mathcal{N} = 2^*$ on S^4* , arXiv: 1311.1508.
- [9] J. G. Russo, K. Zarembo, *Localization at large N* , arXiv: 1312.1214.
- [10] D. J. Gross, E. Witten, *Phys. Rev. D*, **21**:2 (1980), 446–453.
- [11] S. R. Wadia, *A study of $U(N)$ lattice gauge theory in 2-dimensions*, arXiv: 1212.2906.
- [12] J. Hoppe, not published.
- [13] V. A. Kazakov, I. K. Kostov, N. A. Nekrasov, *Nucl. Phys. B*, **557**:3 (1999), 413–442, arXiv: hep-th/9810035.
- [14] A. Kapustin, B. Willett, I. Yaakov, *JHEP*, **03** (2010), 089, 29 pp., arXiv: 0909.4559.
- [15] L. Anderson, K. Zarembo, *Quantum phase transitions in mass-deformed ABJM matrix model*, arXiv: 1406.3366.
- [16] J. G. Russo, *JHEP*, **06** (2012), 038, 25 pp., arXiv: 1203.5061.
- [17] J. G. Russo, K. Zarembo, *JHEP*, **10** (2012), 082, 25 pp., arXiv: 1207.3806.
- [18] M. Billó, M. Frau, F. Fucito, A. Lerda, J. Morales, R. Poghossian, D. Ricci Pacifici, “Modular anomaly equations in $N = 2^*$ theories and their large- N limit”, arXiv: 1406.7255.
- [19] A. Buchel, A. W. Peet, J. Polchinski, *Phys. Rev. D*, **63** (2001), 044009, 11 pp., arXiv: hep-th/0008076.
- [20] N. J. Evans, C. V. Johnson, M. Petrini, *JHEP*, **10** (2000), 022, 21 pp., arXiv: hep-th/0008081.

Поступила в редакцию 6.07.2014