Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Мествиришвили, А. Логунов, М. А. Мествиришвили, Внешнее гравитационное поле нестатического сферически-симметричного тела в релятивистской теории гравитации, *ТМФ*, 2014, том 181, номер 2, 401–416

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8766>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.91.87.62

26 апреля 2023 г., 12:59:33

© 2014 г. А. А. Логунов*, М. А. Мествиришвили*

ВНЕШНЕЕ ГРАВИТАЦИОННОЕ ПОЛЕ НЕСТАТИЧЕСКОГО СФЕРИЧЕСКИ-СИММЕТРИЧНОГО ТЕЛА В РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИ

Показано, что внешнее гравитационное поле нестатического сферически-симметричного тела является статическим.

Ключевые слова: метрический тензор Римана, гравитон, метрика пространства Минковского, инерциальная система.

DOI: 10.4213/tmf8766

В общей теории относительности (ОТО), которая связывает гравитационное поле с метрическим тензором риманова пространства, в классе допустимых функций доказана теорема Биркгофа, согласно которой внешнее поле нестатического сферически-симметричного тела может быть только статическим. В релятивистской теории гравитации (РТГ) гравитационное поле $\phi^{\mu\nu}$ является физическим полем в пространстве Минковского, источник которого – сохраняющийся в пространстве Минковского тензор энергии-импульса всех полей материи, включая и гравитационное поле. Такой подход приводит к эффективному риманову пространству и, соответственно, к системе уравнений, которая отличается от системы уравнений ОТО. Поэтому задача о нестатическом источнике требует специального рассмотрения. Этот вопрос нами изучался в статье [1], но, к сожалению, были допущены некоторые неточности, устранение которых и является целью данной работы. К тому же, в отличие от работы [1], настоящее рассмотрение имеет более общий характер.

Полная система уравнений РТГ имеет вид [2]

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R + \frac{m^2}{2}\left[g^{\mu\nu} + \left(g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}g^{\alpha\beta}\right)\gamma_{\alpha\beta}\right] = 8\pi T^{\mu\nu}, \quad (1)$$

$$D_\nu \tilde{g}^{\nu\mu} = \partial_\nu \tilde{g}^{\nu\mu} + \gamma_{\alpha\beta}^\mu \tilde{g}^{\alpha\beta} = 0. \quad (2)$$

Физическое гравитационное поле $\phi^{\mu\nu}$ определяется равенством

$$\tilde{g}^{\mu\nu} = \gamma^{\mu\nu} + \tilde{\phi}^{\mu\nu},$$

*Институт физики высоких энергий, Протвино, Московская обл., Россия.
E-mail: Anatoly.Logunov@ihep.ru

где $\tilde{g}^{\mu\nu} = \sqrt{-g}g^{\mu\nu}$, $\tilde{\gamma}^{\mu\nu} = \sqrt{-\gamma}\gamma^{\mu\nu}$, $\tilde{\phi}^{\mu\nu} = \sqrt{-\gamma}\phi^{\mu\nu}$. Оно обладает той же симметрией, что и метрический тензор риманова пространства $g^{\mu\nu}$.

В РТГ система координат определяется метрическим тензором $\gamma_{\mu\nu}$ пространства Минковского. В уравнении (1) присутствует масса покоя гравитона. Хорошо известно (см. [3], [4]), что введение массы покоя гравитона в линейные уравнения гравитационного поля приводит к следующей трудности: в этом случае, чтобы объяснить данные наблюдений по гравитационным эффектам в Солнечной системе, необходимо допустить, что сферически-симметричный нестатический источник испускает отрицательный поток энергии скалярных гравитонов, что физически недопустимо. Именно это обстоятельство и приводило к выводу, что масса покоя гравитона должна равняться нулю. Но так обстоит дело в линейной теории гравитации. В РТГ, как нелинейной теории, наличие массы покоя гравитона не порождает подобных трудностей.

Покажем, что в РТГ внешнее гравитационное поле нестатического сферически-симметричного тела точно так же, как и в ОТО, остается статическим, т. е. такое нестатическое тело не излучает гравитационные волны. Для нестатического сферически-симметричного тела интервал эффективного риманова пространства в общем случае имеет вид

$$ds^2 = B(\tau, r) d\tau^2 - D(\tau, r) dr^2 - 2E(\tau, r) dr d\tau - W^2(\tau, r)(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (3)$$

Подберем некоторый интегрирующий множитель η так, чтобы выражение

$$dt = \eta(B d\tau - E dr) \quad (4)$$

стало полным дифференциалом. Заметим, что число таких интегрирующих множителей бесконечно. Из выражения (4) находим

$$d\tau = \frac{1}{\eta B} dt + \frac{E}{B} dr, \quad (5)$$

откуда следует, что существует функция $\alpha(t, r)$, дифференциал от которой равен

$$d\tau = \dot{\alpha} dt + \acute{\alpha} dr, \quad (6)$$

где

$$\dot{\alpha} = \frac{1}{\eta B}, \quad \acute{\alpha} = \frac{E}{B}.$$

Заметим, что при преобразовании (5) мы не изменили систему отсчета, принятую в (3). Напомним, что все физически измеряемые величины должны быть хронометрически инвариантными величинами [5]. Подставляя (5) в интервал (3), получим

$$ds^2 = \frac{1}{\eta^2 B} dt^2 - dr^2 \left(D + \frac{E^2}{B} \right) - W^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (7)$$

После введения обозначений

$$U = \frac{1}{\eta^2 B}, \quad V = \left(D + \frac{E^2}{B} \right) \quad (8)$$

выражение для ds^2 принимает вид

$$ds^2 = U(t, r) dt^2 - V(t, r) dr^2 - W^2(t, r)(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (9)$$

Функции U, V и W^2 характеризуют гравитационное поле нестатического сферически-симметричного тела.

Таким образом, благодаря существованию интегрирующего множителя интервал в римановом пространстве для нестатического сферически-симметричного тела в общем случае имеет вид (9).

Для данной задачи, определяемой интервалом (9), интервал в инерциальной системе в пространстве Минковского в сферических координатах имеет вид

$$d\sigma^2 = dt^2 - dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (10)$$

Ниже мы установим, что внешнее гравитационное поле вида (9), создаваемое нестатическим сферически-симметричным источником в инерциальной системе координат (10), может быть только статическим, т. е. метрические коэффициенты U, V, W не зависят от времени t .

Из уравнений (1) для задачи, определяемой соотношениями (9) и (10), найдем уравнения для функций U, V и W (см. приложение, формулы (II.28), (II.29) и (II.31)):

$$\begin{aligned} & \frac{1}{W^2} - \frac{1}{2V} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{W^2} \frac{\partial W^2}{\partial r} \right) - \frac{3}{4VW^4} \left(\frac{\partial W^2}{\partial r} \right)^2 - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{2VW^2} \frac{\partial W^2}{\partial r} \right) + \\ & + \frac{1}{2UW^2} \frac{\partial W^2}{\partial t} \frac{\partial \ln(VW)}{\partial t} + \frac{m^2}{2} \left[1 - \frac{r^2}{W^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{U} - \frac{1}{V} \right) \right] = 0, \\ & \frac{1}{W^2} + \frac{1}{2U} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{W^2} \frac{\partial W^2}{\partial t} \right) + \frac{3}{4UW^4} \left(\frac{\partial W^2}{\partial t} \right)^2 + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2UW^2} \frac{\partial W^2}{\partial t} \right) - \\ & - \frac{1}{2VW^2} \frac{\partial W^2}{\partial r} \frac{\partial \ln(UW)}{\partial r} + \frac{m^2}{2} \left[1 - \frac{r^2}{W^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{U} - \frac{1}{V} \right) \right] = 0, \\ & \frac{1}{W^2} \frac{\partial^2 W^2}{\partial t \partial r} - \frac{1}{2W^4} \frac{\partial W^2}{\partial r} \frac{\partial W^2}{\partial t} - \frac{1}{2VW^2} \frac{\partial V}{\partial t} \frac{\partial W^2}{\partial r} - \frac{1}{2UW^2} \frac{\partial U}{\partial r} \frac{\partial W^2}{\partial t} = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Уравнения (2) с учетом выражений (9) и (10) принимают вид (см. приложение, формулы (II.23), (II.24))

$$W^2 = \sqrt{\frac{U}{V}} q(r), \quad \frac{\partial}{\partial r} \left(W^2 \sqrt{\frac{U}{V}} \right) = 2r \sqrt{UV}, \quad (12)$$

где $q(r)$ – произвольная положительная функция.

Так как согласно принципу причинности Гильберта $U > 0$, $V > 0$, $W^2 > 0$, для дальнейшего удобно перейти к новым обозначениям:

$$U(t, r) = e^{\mu(t, r)}, \quad V(t, r) = e^{\nu(t, r)}, \quad W^2(t, r) = e^{\lambda(t, r)}, \quad q(r) = e^{\sigma(r)}.$$

В переменных $\mu, \nu, \lambda, \sigma$ уравнения (11) имеют вид

$$e^{-\lambda} - e^{-\nu} \left(\lambda'' + \frac{3}{4}(\lambda')^2 - \frac{1}{2}\lambda'\nu' \right) + \frac{1}{2}e^{-\mu}\dot{\lambda} \left(\dot{\nu} + \frac{1}{2}\dot{\lambda} \right) + \frac{m^2}{2} \left[1 - r^2 e^{-\lambda} + \frac{1}{2}(e^{-\mu} - e^{-\nu}) \right] = 0, \quad (13)$$

$$e^{-\lambda} + e^{-\mu} \left(\ddot{\lambda} + \frac{3}{4}(\dot{\lambda})^2 - \frac{1}{2}\dot{\lambda}\dot{\mu} \right) - \frac{1}{2}e^{-\nu}\lambda' \left(\mu' + \frac{1}{2}\lambda' \right) + \frac{m^2}{2} \left[1 - r^2 e^{-\lambda} - \frac{1}{2}(e^{-\mu} - e^{-\nu}) \right] = 0, \quad (14)$$

$$\dot{\lambda}' + \frac{1}{2}\dot{\lambda}\lambda' - \frac{1}{2}\dot{\nu}\lambda' - \frac{1}{2}\dot{\lambda}\mu' = 0, \quad (15)$$

где, например, $\dot{\lambda} = \partial\lambda/\partial t$, $\lambda' = \partial\lambda/\partial r$. Уравнения (12) принимают вид

$$\lambda - \frac{1}{2}(\mu - \nu) = \sigma(r), \quad (16)$$

$$\mu' - \nu' + \sigma' = 2re^{\nu-\lambda}. \quad (17)$$

Введем следующие обозначения:

$$2\omega = \mu + \nu, \quad (18)$$

$$f = \lambda - \sigma(r). \quad (19)$$

Согласно (16) имеем

$$\mu - \nu = 2f. \quad (20)$$

Из (18) и (20) находим

$$\mu = \omega + f, \quad \nu = \omega - f. \quad (21)$$

Запишем уравнение (17) через функции ω, f и σ :

$$2f' + \sigma' = 2re^{\omega-2f-\sigma}. \quad (22)$$

Дифференцируя (22) по t , находим

$$2\dot{f}' = (2f' + \sigma')(\dot{\omega} - 2\dot{f}).$$

Подставляя это выражение в уравнение (15) и учитывая (19), (21), получим следующее неоднородное линейное уравнение в частных производных:

$$\frac{\partial\omega}{\partial t}f' - \frac{\partial\omega}{\partial r}\dot{f} = 3\dot{f}f'. \quad (23)$$

Система обыкновенных дифференциальных уравнений, соответствующая уравнению (23), имеет вид

$$\frac{dt}{f'} = \frac{dr}{-\dot{f}} = \frac{d\omega}{3\dot{f}f'}.$$

Отсюда находим

$$d\omega = 3\dot{f} dt, \quad d\omega = -3f' dr.$$

Складывая эти равенства, получим

$$d\omega = \frac{3}{2} \frac{\partial f}{\partial t} dt - \frac{3}{2} \frac{\partial f}{\partial r} dr.$$

Из свойств полного дифференциала находим

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial r} = 0,$$

но это равенство означает, что функция f представима в виде

$$f(t, r) = \psi(t) + \varphi(r). \quad (24)$$

Общее решение уравнения (23) имеет вид

$$\omega(t, r) = \frac{3}{2}(\psi(t) - \varphi(r)) + F(f), \quad (25)$$

где F – произвольная функция.

С учетом выражений (24) и (25) уравнение (22) принимает следующий вид:

$$2\varphi' + \sigma' = 2r \exp \left[-\frac{1}{2}\psi(t) - \frac{7}{2}\varphi(r) + F(f) - \sigma \right]. \quad (26)$$

Левая часть этого уравнения не зависит от t , поэтому правая часть также не должна зависеть от t . Это возможно, если $\psi(t) = \text{const}$; тогда функции μ, ν, λ не будут зависеть от времени. В этом случае гравитационное поле вида (9) является статическим. Но возможен и другой случай, когда $F = f/2$. Тогда

$$\omega(t, r) = 2\psi(t) - \varphi(r),$$

а функции μ, ν, λ согласно (21) и (19) будут иметь вид

$$\mu = 3\psi(t), \quad \nu(t, r) = \psi(t) - 2\varphi(r), \quad \lambda(t, r) = \psi(t) + \varphi(r) + \sigma(r) = f + \sigma. \quad (27)$$

Так мы пришли к интервалу, в котором в метрических коэффициентах переменные t и r разделены, а метрический коэффициент U зависит только от времени. В этом случае уравнение (26) принимает вид

$$2\varphi' + \sigma' = 2re^{-3\varphi(r) - \sigma(r)}.$$

Для анализа данного случая нам необходимо обратиться к уравнениям (13) и (14). Разность этих уравнений дает

$$e^{-\nu} \left[-\lambda'' - \frac{1}{2}(\lambda')^2 + \frac{1}{2}\lambda'(\mu' + \nu') \right] + e^{-\mu} \left[-\ddot{\lambda} - \frac{1}{2}(\dot{\lambda})^2 + \frac{1}{2}\dot{\lambda}(\dot{\mu} + \dot{\nu}) \right] + \frac{m^2}{2}(e^{-\mu} - e^{-\nu}) = 0, \quad (28)$$

а их сумма –

$$2e^{-\lambda} - e^{-\nu} \left[\lambda'' + (\lambda')^2 - \frac{1}{2}\lambda'(\nu' - \mu') \right] + e^{-\mu} \left[\ddot{\lambda} + (\dot{\lambda})^2 - \frac{1}{2}\dot{\lambda}(\dot{\mu} - \dot{\nu}) \right] + m^2(1 - r^2 e^{-\lambda}) = 0. \quad (29)$$

Согласно (16) имеем

$$(\dot{\lambda})^2 - \frac{1}{2}\dot{\lambda}(\dot{\mu} - \dot{\nu}) = 0,$$

поэтому уравнение (29) несколько упрощается:

$$2e^{-\lambda} - e^{-\nu} \left[\lambda'' + (\lambda')^2 - \frac{1}{2}\lambda'(\nu' - \mu') \right] + e^{-\mu} \ddot{\lambda} + m^2(1 - r^2 e^{-\lambda}) = 0. \quad (30)$$

В уравнениях (28) и (30) переменные t и r разделяются:

$$-\varphi'' - \sigma'' - \frac{3}{2}\dot{\varphi}^2 - \frac{1}{2}\dot{\sigma}^2 - 2\dot{\varphi}\dot{\sigma} - \frac{m^2}{2} = ke^{-2\varphi}, \quad (31)$$

$$\ddot{\psi} - \frac{3}{2}\dot{\psi}^2 - \frac{m^2}{2} = ke^{2\psi}, \quad (32)$$

$$\varphi'' + \sigma'' + 2\dot{\varphi}^2 + \dot{\sigma}^2 + 3\dot{\varphi}\dot{\sigma} - 2e^{-3\varphi-\sigma} \left(1 - \frac{m^2 r^2}{2} \right) = pe^{-2\varphi}, \quad (33)$$

$$\ddot{\psi} + m^2 e^{3\psi} = pe^{2\psi}. \quad (34)$$

Заметим, что системе уравнений (22), (31) и (33) удовлетворяет следующее решение:

$$\varphi = 0, \quad \sigma = \ln r^2, \quad k = -\frac{m^2}{2}, \quad p = m^2. \quad (35)$$

Обратимся к уравнениям (32) и (34). Введем новую переменную $\psi(t) = \ln a^2$. Уравнения (32) и (34) принимают вид

$$2a\ddot{a} - 8\dot{a}^2 - \frac{m^2}{2}a^2 = ka^6, \quad (36)$$

$$2a\ddot{a} - 2\dot{a}^2 + m^2 a^8 = pa^6. \quad (37)$$

Отсюда находим

$$\dot{a}^2 = -\frac{1}{12}[m^2 a^2 + 2m^2 a^8 + 2(k-p)a^6]. \quad (38)$$

Дифференцируя, получим

$$\ddot{a} = -\frac{1}{24}[2m^2a + 16m^2a^7 + 12(k-p)a^5]. \quad (39)$$

Подставляя (38) и (39) в уравнение (36), находим соотношение между постоянными разделения переменных:

$$p = -2k. \quad (40)$$

Введем новую переменную времени $d\tau = a^3 dt$, тогда уравнение (38) принимает вид

$$\frac{1}{a^2} \left(\frac{da}{d\tau} \right)^2 = \frac{m^2}{12} \left(-\frac{1}{a^6} - 2 + \frac{3}{\beta^4 a^2} \right), \quad (41)$$

где принято обозначение

$$|k| = \frac{m^2}{2\beta^4}. \quad (42)$$

Уравнение (39) при этом принимает вид

$$\frac{1}{a} \frac{d^2 a}{d\tau^2} = -\frac{m^2}{6} \left(1 - \frac{1}{a^6} \right). \quad (43)$$

Уравнение (41) имеет нетривиальное решение при условии $\beta < 1$. Решение это будет иметь осциллирующий характер, и масштабный фактор a будет изменяться в пределах $a_{\min} \leq a \leq a_{\max}$. Поскольку в точке останки $a_{\max}$ ускорение должно быть отрицательным, то согласно (43) имеет место неравенство $a_{\max} > 1$.

С учетом выражений (27) интервал для нашего случая принимает вид

$$ds^2 = a^2[a^4 dt^2 - e^{-2\varphi} dr^2 - e^{\varphi+\sigma}(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)]. \quad (44)$$

Заметим, что для интервала (44) гармоническое уравнение (12) вне тела не зависит от временной переменной. Оно имеет вид

$$\frac{d}{dr}(e^{2\varphi+\sigma}) = 2re^{-\varphi}. \quad (45)$$

В интервале (44) в квадратных скобках трехмерная пространственная часть определяется только функциями $\varphi(r)$ и $\sigma(r)$. Поскольку интервал (44) выражает внешнее гравитационное поле нестатического сферически-симметричного тела в отсутствие волнового процесса и потока энергии, физическое решение для функций φ и σ на пространственной бесконечности, где статическое поле также отсутствует, должно приводить к геометрии Евклида в сферических координатах, т. е. должны иметь место пределы

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \varphi(r) = 0, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} e^{\sigma(r)} = r^2. \quad (46)$$

Эти два условия связаны между собой уравнением (45). Запишем уравнения (31) и (33) в более компактной форме, выразив их через компоненты тензора кривизны трехмерного пространства. Они принимают вид (см. приложение, формулы (П.39) и (П.40))

$$\begin{aligned} R_{121}^2 &= \frac{1}{2} e^{-2\varphi} \left(k + \frac{m^2}{2} e^{2\varphi} \right), \\ R_{212}^1 + R_{232}^3 &= e^{\varphi+\sigma} \left(k + \frac{m^2 r^2}{2} e^{-(\varphi+\sigma)} \right). \end{aligned} \quad (47)$$

Поскольку на пространственной бесконечности компоненты тензора кривизны равны нулю, из выражений (47) с учетом (46) находим параметр разделения переменных

$$k = -\frac{m^2}{2}. \quad (48)$$

Тогда из (42) следует, что $\beta = 1$. Но согласно этому равенству уравнение (41) имеет только тривиальное решение $a = 1$. Следовательно, мы опять пришли к статическому решению.

Таким образом, мы приходим к общему выводу: для *нестатического* сферически-симметричного источника в инерциальной системе координат метрические коэффициенты интервала внешнего *гравитационного поля* могут быть только *статическими*. Поэтому такой источник не излучает гравитационные волны [2]–[4], [6]–[9].

ПРИЛОЖЕНИЕ

Интервал эффективного риманова пространства-времени для нестатического сферически-симметричного тела имеет общий вид (9). Отличные от нуля коэффициенты связности, соответствующие интервалу (9), даются выражениями

$$\begin{aligned} \Gamma_{00}^0 &= \frac{1}{2U} \frac{\partial U}{\partial t}, & \Gamma_{01}^0 &= \frac{1}{2U} \frac{\partial U}{\partial r}, & \Gamma_{11}^0 &= \frac{1}{2U} \frac{\partial V}{\partial t}, & \Gamma_{22}^0 &= \frac{1}{2U} \frac{\partial W^2}{\partial t}, \\ \Gamma_{33}^0 &= \frac{1}{2U} \frac{\partial W^2}{\partial t} \sin^2 \theta, & \Gamma_{00}^1 &= \frac{1}{2V} \frac{\partial U}{\partial r}, & \Gamma_{01}^1 &= \frac{1}{2V} \frac{\partial V}{\partial t}, & \Gamma_{11}^1 &= \frac{1}{2V} \frac{\partial V}{\partial r}, \\ \Gamma_{22}^1 &= -\frac{1}{2V} \frac{\partial W^2}{\partial r}, & \Gamma_{33}^1 &= -\frac{1}{2V} \frac{\partial W^2}{\partial r} \sin^2 \theta, & \Gamma_{02}^2 &= \frac{1}{2W^2} \frac{\partial W^2}{\partial t}, \\ \Gamma_{12}^2 &= \frac{1}{2W^2} \frac{\partial W^2}{\partial r}, & \Gamma_{33}^2 &= -\sin \theta \cos \theta, & \Gamma_{03}^3 &= \frac{1}{2W^2} \frac{\partial W^2}{\partial t}, \\ \Gamma_{13}^3 &= \frac{1}{2W^2} \frac{\partial W^2}{\partial r}, & \Gamma_{23}^3 &= \operatorname{ctg} \theta. \end{aligned} \quad (\text{П.1})$$

Интервал пространства Минковского в инерциальной системе в сферических координатах имеет вид (10), а отличные от нуля коэффициенты связности таковы:

$$\gamma_{22}^1 = -r, \quad \gamma_{33}^1 = -r \sin^2 \theta, \quad \gamma_{12}^2 = \gamma_{13}^3 = \frac{1}{r}, \quad \gamma_{33}^2 = -\sin \theta \cos \theta, \quad \gamma_{23}^3 = \operatorname{ctg} \theta. \quad (\text{П.2})$$

Используя для тензора Риччи представление

$$R_{\sigma\nu} = \partial_\lambda \Gamma_{\sigma\nu}^\lambda - \partial_\nu \Gamma_{\sigma\lambda}^\lambda + \Gamma_{\sigma\nu}^\tau \Gamma_{\tau\lambda}^\lambda - \Gamma_{\sigma\lambda}^\tau \Gamma_{\nu\tau}^\lambda \quad (\text{П.3})$$

и учитывая (П.1), можно установить, что отличные от нуля компоненты $R_{\sigma\nu}$ имеют вид

$$\begin{aligned} R_{00} = & -\frac{1}{2V} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + \frac{1}{2V} \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{4V^2} \left(\frac{\partial V}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{4UV} \left(\frac{\partial U}{\partial r} \right)^2 - \\ & - \frac{1}{4V^2} \frac{\partial U}{\partial r} \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{4UV} \frac{\partial V}{\partial t} \frac{\partial U}{\partial t} - \frac{1}{W^2} \frac{\partial^2 W^2}{\partial t^2} + \frac{1}{2W^4} \left(\frac{\partial W^2}{\partial t} \right)^2 + \\ & + \frac{1}{2UW^2} \frac{\partial U}{\partial t} \frac{\partial W^2}{\partial t} + \frac{1}{2VW^2} \frac{\partial U}{\partial r} \frac{\partial W^2}{\partial r}, \end{aligned} \quad (\text{П.4})$$

$$\begin{aligned} R_{11} = & \frac{1}{2U} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - \frac{1}{4U^2} \frac{\partial U}{\partial t} \frac{\partial V}{\partial t} - \frac{1}{2U} \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{4U^2} \left(\frac{\partial U}{\partial r} \right)^2 - \\ & - \frac{1}{W^2} \frac{\partial^2 W^2}{\partial r^2} + \frac{1}{2W^4} \left(\frac{\partial W^2}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{2UW^2} \frac{\partial V}{\partial t} \frac{\partial W^2}{\partial t} + \frac{1}{4UV} \frac{\partial V}{\partial r} \frac{\partial U}{\partial r} + \\ & + \frac{1}{2VW^2} \frac{\partial V}{\partial r} \frac{\partial W^2}{\partial r} - \frac{1}{4UV} \left(\frac{\partial V}{\partial t} \right)^2, \end{aligned} \quad (\text{П.5})$$

$$\begin{aligned} R_{22} = & -\frac{1}{2V} \frac{\partial^2 W^2}{\partial r^2} + \frac{1}{4UV} \frac{\partial V}{\partial t} \frac{\partial W^2}{\partial t} + \frac{1}{4V^2} \frac{\partial V}{\partial r} \frac{\partial W^2}{\partial r} + \\ & + \frac{1}{2U} \frac{\partial^2 W^2}{\partial t^2} - \frac{1}{4U^2} \frac{\partial U}{\partial t} \frac{\partial W^2}{\partial t} - \frac{1}{4UV} \frac{\partial U}{\partial r} \frac{\partial W^2}{\partial r} + 1, \end{aligned} \quad (\text{П.6})$$

$$R_{33} = R_{22} \sin^2 \theta, \quad (\text{П.7})$$

$$\begin{aligned} R_{01} = & -\frac{1}{W^2} \frac{\partial^2 W^2}{\partial r \partial t} + \frac{1}{2W^4} \frac{\partial W^2}{\partial t} \frac{\partial W^2}{\partial r} + \frac{1}{2UW^2} \frac{\partial U}{\partial r} \frac{\partial W^2}{\partial t} + \\ & + \frac{1}{2VW^2} \frac{\partial V}{\partial t} \frac{\partial W^2}{\partial r}, \end{aligned} \quad (\text{П.8})$$

а скалярная кривизна $R = g^{\sigma\nu} R_{\sigma\nu}$ имеет вид

$$\begin{aligned} R = & \frac{1}{UV} \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} - \frac{1}{2V^2 U} \frac{\partial V}{\partial r} \frac{\partial U}{\partial r} - \frac{1}{UV} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + \frac{1}{2UV^2} \left(\frac{\partial V}{\partial t} \right)^2 - \\ & - \frac{2}{UW^2} \frac{\partial^2 W^2}{\partial t^2} + \frac{1}{2UW^4} \left(\frac{\partial W^2}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2VU^2} \frac{\partial U}{\partial t} \frac{\partial V}{\partial t} - \frac{1}{2VU^2} \left(\frac{\partial U}{\partial r} \right)^2 + \\ & + \frac{2}{VW^2} \frac{\partial^2 W^2}{\partial r^2} - \frac{1}{2VW^4} \left(\frac{\partial W^2}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{U^2 W^2} \frac{\partial U}{\partial t} \frac{\partial W^2}{\partial t} - \\ & - \frac{1}{V^2 W^2} \frac{\partial V}{\partial r} \frac{\partial W^2}{\partial r} + \frac{1}{UVW^2} \frac{\partial U}{\partial r} \frac{\partial W^2}{\partial r} - \frac{1}{UVW^2} \frac{\partial V}{\partial t} \frac{\partial W^2}{\partial t} - \frac{2}{W^2}. \end{aligned} \quad (\text{П.9})$$

Теперь найдем компоненты тензоров

$$R_{\sigma\nu} - \frac{1}{2}g_{\sigma\nu}R, \quad R_\nu^\mu - \frac{1}{2}\delta_\nu^\mu R. \quad (\text{II.10})$$

После подстановки (II.4) и (II.9) в тождество

$$R_{00} - \frac{1}{2}g_{00}R \equiv R_{00} - \frac{1}{2}UR$$

имеем

$$\begin{aligned} R_{00} - \frac{1}{2}UR = & \frac{U}{W^2} + \frac{U}{4VW^4} \left(\frac{\partial W^2}{\partial r} \right)^2 + \frac{U}{2W^2V^2} \frac{\partial V}{\partial r} \frac{\partial W^2}{\partial r} + \\ & + \frac{1}{2VW^2} \frac{\partial V}{\partial t} \frac{\partial W^2}{\partial t} + \frac{1}{4W^4} \left(\frac{\partial W^2}{\partial t} \right)^2 - \frac{U}{VW^2} \frac{\partial^2 W^2}{\partial r^2}. \end{aligned} \quad (\text{II.11})$$

Так как

$$R_0^0 - \frac{1}{2}R = \frac{1}{U} \left(R_{00} - \frac{1}{2}UR \right), \quad (\text{II.12})$$

для левой части (II.12) получим выражение

$$\begin{aligned} R_0^0 - \frac{1}{2}R = & \frac{1}{W^2} + \frac{1}{4VW^4} \left(\frac{\partial W^2}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{2V^2W^2} \frac{\partial V}{\partial r} \frac{\partial W^2}{\partial r} + \\ & + \frac{1}{2UVW^2} \frac{\partial V}{\partial t} \frac{\partial W^2}{\partial t} + \frac{1}{4UW^4} \left(\frac{\partial W^2}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{W^2V} \frac{\partial^2 W^2}{\partial r^2}. \end{aligned} \quad (\text{II.13})$$

Аналогично, подставляя (II.5) и (II.9) в тождество

$$R_{11} - \frac{1}{2}g_{11}R \equiv R_{11} + \frac{1}{2}VR,$$

найдем

$$\begin{aligned} R_{11} + \frac{1}{2}VR = & -V \left[\frac{1}{W^2} + \frac{1}{UW^2} \frac{\partial^2 W^2}{\partial t^2} - \frac{1}{2UW^2V} \frac{\partial W^2}{\partial r} \frac{\partial U}{\partial r} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2U^2W^2} \frac{\partial W^2}{\partial t} \frac{\partial U}{\partial t} - \frac{1}{4UW^4} \left(\frac{\partial W^2}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{4VW^4} \left(\frac{\partial W^2}{\partial r} \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (\text{II.14})$$

Но

$$R_1^1 - \frac{1}{2}R = -\frac{1}{V} \left(R_{11} + \frac{1}{2}VR \right),$$

поэтому имеем

$$R_1^1 - \frac{1}{2}R = \frac{1}{W^2} + \frac{1}{UW^2} \frac{\partial^2 W^2}{\partial t^2} - \frac{1}{2UVW^2} \frac{\partial W^2}{\partial r} \frac{\partial U}{\partial r} - \\ - \frac{1}{2U^2W^2} \frac{\partial W^2}{\partial t} \frac{\partial U}{\partial t} - \frac{1}{4UW^4} \left(\frac{\partial W^2}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{4VW^4} \left(\frac{\partial W^2}{\partial r} \right)^2. \quad (\text{II.15})$$

Нетрудно также установить, что для

$$R_{22} + \frac{1}{2}W^2R$$

после подстановки (II.6) и (II.9) получается выражение

$$R_{22} + \frac{1}{2}W^2R = -W^2 \left[\frac{1}{2UW^2} \frac{\partial^2 W^2}{\partial t^2} + \frac{1}{2UV} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} \right) - \frac{1}{2VW^2} \frac{\partial^2 W^2}{\partial r^2} \right] - \\ - \frac{W^2}{4} \left[\frac{1}{VW^4} \left(\frac{\partial W^2}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{V^2W^2} \frac{\partial W^2}{\partial r} \frac{\partial V}{\partial r} - \frac{1}{VU^2} \left(\frac{\partial V}{\partial t} \frac{\partial U}{\partial t} - \left(\frac{\partial U}{\partial r} \right)^2 \right) \right] + \\ + \frac{1}{UV^2} \left(\frac{\partial U}{\partial r} \frac{\partial V}{\partial r} - \left(\frac{\partial V}{\partial t} \right)^2 \right) - \frac{1}{U^2W^2} \frac{\partial W^2}{\partial t} \frac{\partial U}{\partial t} - \frac{1}{UW^4} \left(\frac{\partial W^2}{\partial t} \right)^2 - \\ - \frac{1}{UVW^2} \left(\frac{\partial W^2}{\partial r} \frac{\partial U}{\partial r} - \frac{\partial W^2}{\partial t} \frac{\partial V}{\partial t} \right) \Big], \quad (\text{II.16})$$

а для

$$R_2^2 - \frac{1}{2}R = -\frac{1}{W^2} \left(R_{22} + \frac{1}{2}W^2R \right)$$

– выражение

$$R_2^2 - \frac{1}{2}R = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{UW^2} \frac{\partial^2 W^2}{\partial t^2} + \frac{1}{UV} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} \right) - \frac{1}{VW^2} \frac{\partial^2 W^2}{\partial r^2} \right] + \\ + \frac{1}{4} \left[\frac{1}{VW^4} \left(\frac{\partial W^2}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{V^2W^2} \frac{\partial W^2}{\partial r} \frac{\partial V}{\partial r} - \frac{1}{VU^2} \left(\frac{\partial V}{\partial t} \frac{\partial U}{\partial t} - \left(\frac{\partial U}{\partial r} \right)^2 \right) \right] + \\ + \frac{1}{UV^2} \left(\frac{\partial U}{\partial r} \frac{\partial V}{\partial r} - \left(\frac{\partial V}{\partial t} \right)^2 \right) - \frac{1}{U^2W^2} \frac{\partial W^2}{\partial t} \frac{\partial U}{\partial t} - \\ - \frac{1}{UW^4} \left(\frac{\partial W^2}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{UVW^2} \left(\frac{\partial W^2}{\partial r} \frac{\partial U}{\partial r} - \frac{\partial W^2}{\partial t} \frac{\partial V}{\partial t} \right) \Big]. \quad (\text{II.17})$$

Наконец, согласно (II.8) для R_1^0 имеем

$$R_1^0 = \frac{1}{U}R_{01} = -\frac{1}{U} \left(\frac{1}{W^2} \frac{\partial^2 W^2}{\partial t \partial r} - \frac{1}{2W^4} \frac{\partial W^2}{\partial t} \frac{\partial W^2}{\partial r} - \right. \\ \left. - \frac{1}{2UW^2} \frac{\partial U}{\partial r} \frac{\partial W^2}{\partial t} - \frac{1}{2VW^2} \frac{\partial V}{\partial t} \frac{\partial W^2}{\partial r} \right). \quad (\text{II.18})$$

Введем обозначение

$$M_\nu^\mu = \frac{m^2}{2} \left(\delta_\nu^\mu + g^{\mu\alpha} \gamma_{\alpha\nu} - \frac{1}{2} \delta_\nu^\mu g^{\alpha\beta} \gamma_{\alpha\beta} \right). \quad (\text{П.19})$$

Так как

$$g^{00} = \frac{1}{U}, \quad g^{11} = -\frac{1}{V}, \quad g^{22} = -\frac{1}{W^2}, \quad g^{33} = -\frac{1}{W^2 \sin^2 \theta}, \quad (\text{П.20})$$

отличные от нуля компоненты M_ν^μ имеют вид

$$\begin{aligned} M_0^0 &= \frac{m^2}{2} \left[1 - \frac{r^2}{W^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{U} - \frac{1}{V} \right) \right], \\ M_1^1 &= \frac{m^2}{2} \left[1 - \frac{r^2}{W^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{U} - \frac{1}{V} \right) \right], \\ M_2^2 &= M_3^3 = \frac{m^2}{2} \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{U} + \frac{1}{V} \right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{П.21})$$

Принимая во внимание (П.20) и равенство

$$\sqrt{-g} = \sqrt{UV} W^2 \sin \theta,$$

для компонент тензорной плотности $\tilde{g}^{\mu\nu} = \sqrt{-g} g^{\mu\nu}$ находим

$$\begin{aligned} \tilde{g}^{00} &= \sqrt{\frac{V}{U}} W^2 \sin \theta, & \tilde{g}^{11} &= -\sqrt{\frac{U}{V}} W^2 \sin \theta, & \tilde{g}^{22} &= -\sqrt{UV} \sin \theta, \\ \tilde{g}^{33} &= -\sqrt{UV} \frac{1}{\sin \theta}, & \tilde{g}^{\mu\nu} &= 0 \quad \text{при} \quad \mu \neq \nu. \end{aligned} \quad (\text{П.22})$$

Используя (П.2) и (П.22) в уравнении (2), получим

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\sqrt{\frac{V}{U}} W^2 \right) = 0 \quad (\text{П.23})$$

и

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\sqrt{\frac{U}{V}} W^2 \right) = 2r \sqrt{UV}. \quad (\text{П.24})$$

Из (П.23) очевидно, что

$$\sqrt{\frac{V}{U}} W^2 = q(r), \quad (\text{П.25})$$

где $q(r)$ – положительная зависящая только от r произвольная функция.

Запишем (П.13) и (П.15) в несколько ином виде. Приведем четыре члена из (П.13) к следующему виду:

$$\begin{aligned} \frac{1}{W^2} - \frac{1}{W^2 V} \frac{\partial^2 W^2}{\partial r^2} + \frac{1}{4 V W^4} \left(\frac{\partial W^2}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{2 W^2 V^2} \frac{\partial V}{\partial r} \frac{\partial W^2}{\partial r} = \\ = \frac{1}{W^2} - \frac{1}{2 V} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{W^2} \frac{\partial W^2}{\partial r} \right) - \frac{3}{4} \frac{1}{V W^4} \left(\frac{\partial W^2}{\partial r} \right)^2 - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{2 V W^2} \frac{\partial W^2}{\partial r} \right), \end{aligned}$$

а оставшиеся два члена – к виду

$$\frac{1}{2 U V W^2} \frac{\partial V}{\partial t} \frac{\partial W^2}{\partial t} + \frac{1}{4 U W^4} \left(\frac{\partial W^2}{\partial t} \right)^2 = \frac{1}{2 U W^2} \frac{\partial W^2}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t} \ln(VW).$$

Тогда

$$\begin{aligned} R_0^0 - \frac{1}{2} R = \frac{1}{W^2} - \frac{1}{2 V} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{W^2} \frac{\partial W^2}{\partial r} \right) - \frac{3}{4} \frac{1}{V W^4} \left(\frac{\partial W^2}{\partial r} \right)^2 - \\ - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{2 V W^2} \frac{\partial W^2}{\partial r} \right) + \frac{1}{2 U W^2} \frac{\partial W^2}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t} \ln(VW). \end{aligned} \quad (\text{П.26})$$

Аналогично четыре члена из (П.15) представим в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{1}{W^2} + \frac{1}{U W^2} \frac{\partial^2 W^2}{\partial t^2} - \frac{1}{4 U W^4} \left(\frac{\partial W^2}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2 W^2 U^2} \frac{\partial W^2}{\partial t} \frac{\partial U}{\partial t} = \\ = \frac{1}{W^2} + \frac{1}{2 U} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{W^2} \frac{\partial W^2}{\partial t} \right) + \frac{3}{4 U W^4} \left(\frac{\partial W^2}{\partial t} \right)^2 + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2 W^2 U} \frac{\partial W^2}{\partial t} \right), \end{aligned}$$

а оставшиеся два члена – в виде

$$-\frac{1}{2 U V W^2} \frac{\partial W^2}{\partial r} \frac{\partial U}{\partial r} - \frac{1}{4 V W^4} \left(\frac{\partial W^2}{\partial r} \right)^2 = -\frac{1}{2 V W^2} \frac{\partial W^2}{\partial r} \frac{\partial}{\partial r} \ln(UW).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} R_1^1 - \frac{1}{2} R = \frac{1}{W^2} + \frac{1}{2 U} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{W^2} \frac{\partial W^2}{\partial t} \right) + \frac{3}{4 U W^4} \left(\frac{\partial W^2}{\partial t} \right)^2 + \\ + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2 W^2 U} \frac{\partial W^2}{\partial t} \right) - \frac{1}{2 V W^2} \frac{\partial W^2}{\partial r} \frac{\partial}{\partial r} \ln(UW). \end{aligned} \quad (\text{П.27})$$

Учитывая выражения (П.17), (П.21), (П.26) и (П.27) в системе уравнений

$$R_\nu^\mu - \frac{1}{2}\delta_\nu^\mu R + M_\nu^\mu = \varkappa T_\nu^\mu,$$

получим

$$\begin{aligned} R_0^0 - \frac{1}{2}R + M_0^0 &= \frac{1}{W^2} - \frac{1}{2V} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{W^2} \frac{\partial W^2}{\partial r} \right) - \frac{3}{4VW^4} \left(\frac{\partial W^2}{\partial r} \right)^2 - \\ &- \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{2VW^2} \frac{\partial W^2}{\partial r} \right) + \frac{1}{2UW^2} \frac{\partial W^2}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t} \ln(VW) + \\ &+ \frac{m^2}{2} \left[1 - \frac{r^2}{W^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{U} - \frac{1}{V} \right) \right] = \varkappa T_0^0, \end{aligned} \quad (\text{П.28})$$

$$\begin{aligned} R_1^1 - \frac{1}{2}R + M_1^1 &= \frac{1}{W^2} + \frac{1}{2U} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{W^2} \frac{\partial W^2}{\partial t} \right) + \frac{3}{4UW^4} \left(\frac{\partial W^2}{\partial t} \right)^2 + \\ &+ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2UW^2} \frac{\partial W^2}{\partial t} \right) - \frac{1}{2VW^2} \frac{\partial W^2}{\partial r} \frac{\partial}{\partial r} \ln(UW) + \\ &+ \frac{m^2}{2} \left[1 - \frac{r^2}{W^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{U} - \frac{1}{V} \right) \right] = \varkappa T_1^1, \end{aligned} \quad (\text{П.29})$$

$$\begin{aligned} R_2^2 - \frac{1}{2}R + M_2^2 &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{UW^2} \frac{\partial^2 W^2}{\partial t^2} + \frac{1}{UV} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} \right) - \frac{1}{VW^2} \frac{\partial^2 W^2}{\partial r^2} \right] + \\ &+ \frac{1}{4} \left[\frac{1}{VW^4} \left(\frac{\partial W^2}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{V^2W^2} \frac{\partial W^2}{\partial r} \frac{\partial V}{\partial r} - \frac{1}{VU^2} \left(\frac{\partial V}{\partial t} \frac{\partial U}{\partial t} - \left(\frac{\partial U}{\partial r} \right)^2 \right) \right] + \\ &+ \frac{1}{UV^2} \left(\frac{\partial U}{\partial r} \frac{\partial V}{\partial r} - \left(\frac{\partial V}{\partial t} \right)^2 \right) - \frac{1}{UVW^2} \left(\frac{\partial W^2}{\partial r} \frac{\partial U}{\partial r} - \frac{\partial V}{\partial t} \frac{\partial W^2}{\partial t} \right) - \\ &- \frac{1}{UW^4} \left(\frac{\partial W^2}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{U^2W^2} \frac{\partial W^2}{\partial t} \frac{\partial U}{\partial t} \Big] + \frac{m^2}{2} \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{U} + \frac{1}{V} \right) \right] = \varkappa T_2^2, \end{aligned} \quad (\text{П.30})$$

$$\begin{aligned} -R_1^0 &= \frac{1}{UW^2} \frac{\partial^2 W^2}{\partial t \partial r} - \frac{1}{2W^4U} \frac{\partial W^2}{\partial r} \frac{\partial W^2}{\partial t} - \frac{1}{2UVW^2} \frac{\partial V}{\partial t} \frac{\partial W^2}{\partial r} - \\ &- \frac{1}{2U^2W^2} \frac{\partial U}{\partial r} \frac{\partial W^2}{\partial t} = -\varkappa T_1^0. \end{aligned} \quad (\text{П.31})$$

Согласно (44) квадрат элемента длины пространственной части интервала ds^2 имеет вид

$$dl^2 = e^{-2\varphi} dr^2 + e^{\varphi+\sigma} (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2).$$

Обозначим соответствующие метрические коэффициенты через η_{mn} , т. е.

$$\eta_{11} = e^{-2\varphi(r)}, \quad \eta_{22} = e^{\varphi(r)+\sigma(r)}, \quad \eta_{33} = \eta_{22} \sin^2 \theta, \quad \eta_{mn} = 0 \quad \text{при} \quad m \neq n.$$

Исходя из этих выражений нетрудно установить, что отличные от нуля компоненты связности

$$\eta_{mn}^l = \frac{1}{2}\eta^{lk}(\partial_m\eta_{kn} + \partial_n\eta_{km} - \partial_k\eta_{mn})$$

имеют вид

$$\begin{aligned}\eta_{11}^1 &= -\varphi'(r), & \eta_{22}^1 &= -\frac{1}{2}(\varphi' + \sigma')e^{3\varphi+\sigma}, & \eta_{33}^1 &= \eta_{22}^1 \sin^2 \theta, \\ \eta_{12}^2 &= \eta_{13}^3 = \frac{1}{2}(\varphi' + \sigma'), & \eta_{33}^2 &= -\sin \theta \cos \theta, & \eta_{23}^3 &= \text{ctg } \theta.\end{aligned}\quad (\text{П.32})$$

Очевидно, что

$$\eta_{1p}^p = \sigma', \quad \eta_{2p}^p = \text{ctg } \theta, \quad \eta_{3p}^p = 0. \quad (\text{П.33})$$

Для компонент тензора кривизны трехмерного пространства

$$R_{mnp}^k = \partial_n\eta_{mp}^k - \partial_p\eta_{mn}^k + \eta_{mp}^e\eta_{en}^k - \eta_{mn}^e\eta_{ep}^k \quad (\text{П.34})$$

получаем выражения

$$R_{212}^1 = -\frac{1}{2}e^{3\varphi+\sigma}\left[\varphi'' + \sigma'' + \frac{1}{2}(\varphi' + \sigma')(3\varphi' + \sigma')\right], \quad (\text{П.35})$$

$$R_{313}^1 = R_{212}^1 \sin^2 \theta, \quad (\text{П.36})$$

$$R_{121}^2 = -\frac{1}{2}\left[\varphi'' + \sigma'' + \frac{1}{2}(\varphi' + \sigma')(3\varphi' + \sigma')\right], \quad (\text{П.37})$$

$$\begin{aligned}R_{323}^2 &= \left[1 - \frac{1}{4}(\varphi' + \sigma')^2 e^{3\varphi+\sigma}\right] \sin^2 \theta, & R_{131}^3 &= R_{121}^2, \\ R_{232}^3 &= 1 - \frac{1}{4}(\varphi' + \sigma')^2 e^{3\varphi+\sigma}.\end{aligned}\quad (\text{П.38})$$

Учитывая (П.37) в уравнении (31), получим

$$R_{121}^2 = \frac{1}{2}e^{-2\varphi}\left(k + \frac{m^2}{2}e^{2\varphi}\right). \quad (\text{П.39})$$

Аналогично, складывая (П.35) и (П.38) и принимая во внимание (40), уравнение (33) можно представить в виде

$$R_{212}^1 + R_{232}^3 = e^{\varphi+\sigma}\left(k + \frac{m^2 r^2}{2}e^{-(\varphi+\sigma)}\right). \quad (\text{П.40})$$

Благодарности. Авторы выражают благодарность С. С. Герштейну, В. А. Петрову, А. П. Самохину, Н. Е. Тюрину за внимание и ценные обсуждения.

Список литературы

- [1] А. А. Логунов, М. А. Мествиришвили, *ТМФ*, **145**:3 (2005), 425–432.
- [2] А. А. Логунов, *Релятивистская теория гравитации*, М., Наука, 2012.
- [3] В. И. Захаров, *Письма в ЖЭТФ*, **12**:9 (1970), 447–449.
- [4] H. van Dam, M. Veltman, *Nucl. Phys. B*, **22**:2 (1970), 397–411.
- [5] А. Л. Зельманов, В. Г. Агаков, *Элементы общей теории относительности*, М., Наука, 1989.
- [6] Ю. М. Лоскутов, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 3. Физика. Астрономия*, **32**:4 (1991), 49–54.
- [7] Ю. М. Лоскутов, *ТМФ*, **107**:2 (1996), 329–343.
- [8] Yu. M. Loskutov, *Proceedings of the Sixth Marcel Grossmann Meeting on General Relativity. Part B* (Kyoto, Japan, June 23–29, 1991), eds. H. Sato, T. Nakamura, World Sci., Singapore, 1992, 1658–1660.
- [9] С. С. Герштейн, А. А. Логунов, М. А. Мествиришвили, *ТМФ*, **160**:2 (2009), 270–275.

Поступила в редакцию 8.07.2014