Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

К. С. Стелле, Симметрии орбит черных дыр в теории супергравитации, *ТМФ*, 2015, том 182, номер 1, 158–170

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8768>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.73.92

26 апреля 2023 г., 04:09:45

© 2015 г.

К. С. Стелле*

СИММЕТРИИ ОРБИТ ЧЕРНЫХ ДЫР В ТЕОРИИ СУПЕРГРАВИТАЦИИ

Решения типа черных дыр в теориях супергравитации образуют семейства, которые отражают существенно нелинейные “двойственные” симметрии этих теорий. Они образуют орбиты под действием этих групп симметрии с экстремальными решениями Богомольного–Прасада–Зоммерфельда как пределами таких орбит. Важная техника при анализе семейств таких решений использует времениподобную размерную редукцию и заменяет задачу для стационарной черной дыры на задачу для нелинейной сигма-модели. Семейства таких экстремальных решений описываются нильпотентными орбитами относительно симметрий двойственности, основывающейся на триградуированном или пентаградуированном разложении соответствующей алгебры двойственной группы.

Ключевые слова: черные дыры, симметричная двойственность, сигма-модели.

DOI: 10.4213/tmf8768

*Посвящается Андрею Славнову
в честь его семидесятилетия*

1. АНДРЕЙ СЛАВНОВ И КЛЮЧЕВАЯ РОЛЬ СИММЕТРИИ В ФИЗИКЕ

Это большая честь для меня поздравить профессора Андрея Алексеевича Славнова с семидесятилетием. Помимо того, что Андрей является моим хорошим другом на протяжении почти всей моей научной жизни, работы Андрея указали мне путь во многих научных исследованиях в разных областях: от общей теории калибровочных полей [1] и особой значимости симметрии в перенормировке полевых теорий [2] до метода введения членов, содержащих высшие производные, в квантовые теории поля [3], возможной роли высших размерностей [4], [5], связи между унитарностью и методами БРСТ-квантования [6], и по многим другим центральным вопросам современной теоретической физики. В процессе всех этих исследований

*The Blackett Laboratory, Imperial College London, London, UK.
E-mail: k.stelle@imperial.ac.uk

обсуждения с Андреем всегда приносили мне настоящее удовольствие, и я благодарен ему за огромное дружелюбие и теплое гостеприимство во время моих визитов в Россию.

Я с большим удовольствием посвящаю эту статью Андрею по случаю его семидесятилетия. Я надеюсь, что еще не один год буду получать от него научные прозрения и что впереди еще не один год дружбы с Андреем.

2. ЧЕРНЫЕ ДЫРЫ И ДВОЙСТВЕННЫЕ СИММЕТРИИ В СУПЕРГРАВИТАЦИИ

Помимо общего математического интереса к классификации решений типа черных дыр, изучение семейств таких решений представляет особый интерес, поскольку оно затрагивает ряд других важных вопросов в теоретической физике. К примеру, классификация черных дыр Богомольного–Прасада–Зоммерфельда (БПЗ) и черных дыр не-БПЗ является частью более общего изучения бран в супергравитации и теории суперструн. Браны и их пересечения, как и их моды мировых объемов и моды прикрепленных струн, являются ключевыми элементами в феноменологических подходах к согласованию теории струн и физики элементарных частиц. Соответствующее изучение безгоризонтных гравитационных БПЗ-солитонов без особенностей также является центральным в идее “размытого шара” (fuzzball) для БПЗ-решений как кандидатов на роль квантовых микросостояний черной дыры.

Поиск супергравитационных решений с предполагаемыми симметриями Киллинга может быть переформулирован как задача Калуцы–Клейна [7]–[9]. Чтобы увидеть это, рассмотрим четырехмерную теорию с нелинейной бозонной симметрией G_4 (например, с симметрией “двойственности” E_7 максимальной $N = 8$ супергравитации). Скалярные поля принимают значения в таргет-пространстве $\Phi_4 = G_4/H_4$, где H_4 – соответствующая линейно реализованная подгруппа, которая, как правило, является максимальной компактной подгруппой группы G_4 (например, $SU(8) \subset E_7$ для $N = 8$ супергравитации). Этот поиск будет ограничен следующими предположениями.

1. Мы предполагаем, что решение для пространства-времени является асимптотически плоским или асимптотическим решением типа решения Тауба–НУТ и что существует “радиальная” функция r , которая является расходящейся в асимптотической области, $g^{\mu\nu} \partial_\mu r \partial_\nu r \sim 1 + \mathcal{O}(r^{-1})$.

2. Поиск стационарных решений сводится к предположению, что решение допускает времениподобное векторное поле Киллинга $\kappa_\mu(x)$. Предполагается, что производные Ли по отношению к κ_μ обращаются в нуль для всех полей. Предполагается также, что векторное поле Киллинга κ_μ удовлетворяет $W := -g_{\mu\nu} \kappa^\mu \kappa^\nu \sim 1 + \mathcal{O}(r^{-1})$.

3. Мы также предполагаем асимптотическую ортогональность гиперповерхностей, т.е. $\kappa^\nu (\partial_\mu \kappa_\nu - \partial_\nu \kappa_\mu) \sim \mathcal{O}(r^{-2})$. Тогда в любой системе подвижного репера кривизна будет убывать как $R_{abcd} \sim \mathcal{O}(r^{-3})$.

Трехмерная теория, полученная после размерной редукции по отношению к времениподобному вектору Киллинга κ_μ , имеет структуру абелева главного расслоения с метрикой

$$ds^2 = -W(dt + B_i dx^i)^2 + W^{-1} \gamma_{ij} dx^i dx^j, \quad (1)$$

где t – координата, адаптированная для времениподобного вектора Киллинга κ_μ , γ_{ij} – метрика на трехмерной гиперповерхности $\mathcal{M}_3$ при постоянном t . Если четырехмерная теория также содержит абелевы векторные поля $\mathcal{A}_\mu$, они схожим образом

редуцируются к трехмерным как

$$4\sqrt{4\pi G}A_\mu dx^\mu = U(dt + B_i dx^i) + A_i dx^i. \quad (2)$$

Времениподобная трехмерная редуцированная теория имеет структуру класса смежности G/H^* , схожую со структурой класса смежности G/H трехмерной редуцированной теории по отношению к пространственноподобному вектору Киллинга. Таким образом, для пространственноподобной редукции максимальной супергравитации до размерности $D = 3$ получается теория $E_8/SO(16)$ из последовательности размерных редукций, начинающихся для размерности $D = 11$ [10]. Результирующая трехмерная теория имеет эту исключительную симметрию в силу того, что трехмерные абелевы векторные поля могут быть поставлены в соответствие скалярам; это также происходит для аналогичной теории при времениподобной редукции до размерности $D = 3$. Результирующая трехмерная теория содержит трехмерную гравитацию, взаимодействующую с нелинейной сигма-моделью G/H^* .

Хотя факторизуемая группа G для времениподобной редукции такая же, как полученная при пространственноподобной редукции, группа H^* для времениподобной редукции имеет некомпактный вид пространственноподобной группы H [8]. Следствием такой замены $H \rightarrow H^*$ и дуализации векторов является появление кинетических членов с отрицательным знаком для некоторых трехмерных скаляров.

В результате максимальная супергравитация после времениподобной редукции до размерности $D = 3$ и последовательной дуализации 29 векторов до скаляров имеет бозонный сектор, содержащий трехмерную гравитацию, взаимодействующую с нелинейной сигма-моделью со 128 скалярными полями. Однако, как следствие времениподобной размерной редукции и дуализации векторов, все скаляры не будут иметь тот же самый знак для своих “кинетических” членов:

а) имеются 72 скаляра с положительным знаком: 70 происходят напрямую из четырехмерной теории, один появляется из четырехмерной метрики и еще один происходит из редуцированного как $D = 4 \rightarrow D = 3$ вектора Калуцы–Клейна, который последовательно дуализован до скаляра;

б) существуют 56 скаляров с отрицательными знаками: 28 происходят напрямую из временных компонент 28 четырехмерных векторов, другие 28 появляются из трехмерных векторов, полученных из пространственных компонент 28 четырехмерных векторов, приобретающих отрицательный знак после дуализации.

Структура сигма-модели этой времениподобной редуцированной максимальной теории соответствует группе $E_8/SO^*(16)$. Группа $SO^*(16)$ не является группой $SO(p, q)$, определяемой условием сохранения неопределенной метрики. Вместо этого она конструируется начиная с алгебры Клиффорда $\{\Gamma^I, \Gamma^J\} = 2\delta^{IJ}$ для $SO(16)$ и затем путем образования комплексных $U(8)$ -ковариантных осцилляторов

$$a_j := \frac{1}{2}(\Gamma_{2j-1} + i\Gamma_{2j}), \quad a^j \equiv (a_j)^\dagger = \frac{1}{2}(\Gamma_{2j-1} - i\Gamma_{2j}).$$

Они удовлетворяют стандартным антикоммутиационным осцилляторным фермионным соотношениям для операторов рождения и уничтожения

$$\{a_i, a_j\} = \{a^i, a^j\} = 0, \quad \{a_i, a^j\} = \delta_i^j. \quad (3)$$

120 генераторов группы $SO^*(16)$ образуются тогда из 64 эрмитовых $U(8)$ -генераторов a_i^j и $2 \times 28 = 56$ антиэрмитовых комбинаций $a_{ij} \pm a^{ij}$. Для группы $SO^*(16)$ векторные представления и антикиральные спиноры псевдовещественны, в то время как 128-мерное киральное спинорное представление вещественно. Это представление, в котором $72 + 56$ скалярных полей преобразуются в $E_8/SO^*(16)$ сигма-модели.

Трехмерная классификация стационарных решений расширенной супергравитации, использующая времениподобную редукцию, таким образом, обобщает трехмерные супергравитационные системы, полученные из пространственноподобной редукции [11]. Она также связана с $N = 2$ моделями с взаимодействующими векторами [12] и $N = 4$ моделями с векторами, где решения также были получены с использованием двойственных симметрий [13], [14].

3. СТАЦИОНАРНЫЕ РЕШЕНИЯ И ГАРМОНИЧЕСКИЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

Процесс времениподобной редукции до размерности $D = 3$ с дуализацией всех полей форм до скаляров приводит к евклидовой гравитационной теории, взаимодействующей с нелинейной сигма-моделью G/H^* ,

$$I_\sigma = \int d^3x \sqrt{\gamma} \left(R(\gamma) - \frac{1}{2} G_{AB}(\phi) \partial_i \phi^A \partial_j \phi^B \gamma^{ij} \right),$$

где $G_{AB}(\phi)$ является метрикой таргет-пространства для сигма-модели G/H^* , а γ_{ij} – трехмерная метрика. Вариация этого действия приводит к трехмерным полевым уравнениям

$$\frac{1}{\sqrt{\gamma}} \nabla_i (\sqrt{\gamma} \gamma^{ij} G_{AB}(\phi) \partial_j \phi^B) = 0, \quad (4)$$

$$R_{ij}(\gamma) = \frac{1}{2} G_{AB}(\phi) \partial_i \phi^A \partial_j \phi^B, \quad (5)$$

где ∇_i – двойная ковариантная производная (как для трехмерного пространства $\mathcal{M}_3$, так и для таргет-пространства G/H^*).

Теперь можно сделать упрощающее предположение, что $\phi^A(x) = \phi^A(\sigma(x))$, т. е. зависит от единственного промежуточного отображения $\sigma(x)$. При этом допущении полевые уравнения принимают вид

$$\nabla^2 \sigma \frac{d\phi^A}{d\sigma} + \gamma^{ij} \partial_i \sigma \partial_j \sigma \left[\frac{\partial^2 \phi^A}{\partial \sigma^2} + \Gamma_{BC}^A(G) \frac{d\phi^B}{d\sigma} \frac{d\phi^C}{d\sigma} \right] = 0, \quad (6)$$

$$R_{ij} = \left(\frac{1}{2} G_{AB}(\phi) \frac{d\phi^A}{d\sigma} \frac{d\phi^B}{d\sigma} \right) \partial_i \phi^A \partial_j \phi^B. \quad (7)$$

Теперь, используя гравитационные тождества Бианки

$$\nabla^i \left(R_{ij} - \frac{1}{2} \gamma_{ij} R \right) \equiv 0,$$

получим

$$\frac{1}{4} \frac{d}{d\sigma} \left(G_{AB}(\phi) \frac{d\phi^A}{d\sigma} \frac{d\phi^B}{d\sigma} \right) (\nabla^i \sigma \partial_i \sigma) = 0.$$

Рис. 1

Требование отделения свойств $\sigma(x)$ от свойств $d/d\sigma$, таким образом, приводит к условиям

$$\nabla^2 \sigma = 0, \quad (8)$$

$$\frac{d^2 \phi^A}{d\sigma^2} + \Gamma_{BC}^A(G) \frac{d\phi^B}{d\sigma} \frac{d\phi^C}{d\sigma} = 0, \quad (9)$$

$$\frac{d}{d\sigma} \left(G_{AB}(\phi) \frac{d\phi^A}{d\sigma} \frac{d\phi^B}{d\sigma} \right) = 0. \quad (10)$$

Уравнение (8) означает, что $\sigma(x)$ является *гармоническим отображением* из трехмерного пространства M_3 в кривую $\phi^A(\sigma)$ в таргет-пространстве G/H^* . Из уравнения (9) следует, что $\phi^A(\sigma)$ является *геодезической* в G/H^* . Из уравнения (10) видим, что σ является *аффинным параметром*. Разложение $\phi: M_3 \rightarrow G/H^*$ на гармоническое отображение $\sigma: M_3 \rightarrow \mathbb{R}$ и геодезическую $\phi: \mathbb{R} \rightarrow G/H^*$ находится в согласии с общей теоремой о гармонических отображениях [15], которая утверждает, что композиция гармонического отображения с полностью геодезическим является гармоническим отображением. Такая факторизация на геодезическое и гармоническое отображения также является характеристикой общих p -бранных решений супергравитации высших размерностей [7], [9].

Набросок композиции отображений приведен на рис. 1.

В качестве примера [8] того, как изложенная выше конструкция появляется естественным образом для решений с одним центром, рассмотрим четырехмерную гравитацию с абелевым векторным полем $U(1)$, т. е. четырехмерную теорию Максвелла–Эйнштейна. Можно искать стационарные решения, зависящие от одной промежуточной переменной. Для этой промежуточной переменной начнем просто с “радиуса” $r = \sqrt{x^i x^i}$ так, что в предположении, что решения имеют только эту радиальную зависимость, мы в действительности ищем сферически-симметричные решения с группой изометрии $SO(3)$. Переходя к трехмерным полярным координатам, видим, что метрика на M_3 может быть параметризована как

$$ds^2 = \gamma_{ij} dx^i dx^j = dr^2 + f(r)^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2).$$

Редуцированные трехмерные уравнения движения тогда принимают вид

$$f^{-2} \frac{d}{dr} \left(f^2 \frac{d\phi^A}{dr} \right) + \Gamma_{BC}^A(\phi) \frac{d\phi^A}{dr} \frac{d\phi^B}{dr} = 0, \quad (11)$$

$$R_{rr} = -2f^{-1} \frac{d^2 f}{dr^2} = G_{AB}(\phi) \frac{d\phi^A}{dr} \frac{d\phi^B}{dr}, \quad (12)$$

$$R_{\varphi\varphi} = R_{\theta\theta} = f^{-2} \left(\frac{d}{dr} \left(f \frac{df}{dr} \right) - 1 \right) = 0. \quad (13)$$

Уравнение (13) имеет общее решение $f(r)^2 = (r - r_0)^2 + c^2$. Вводя функцию

$$\sigma(r) := - \int_r^\infty f^{-2}(s) ds,$$

получаем гармоническую промежуточную функцию на $\mathcal{M}_3$ по отношению к метрике γ_{ij} , и уравнение (11) тогда принимает вид

$$\frac{d^2 \phi^A}{d\sigma^2} + \Gamma_{BC}^A(\phi) \frac{d\phi^B}{d\sigma} \frac{d\phi^C}{d\sigma} = 0, \quad (14)$$

где $\phi^A(r) = \phi^A(\sigma(r))$. Это уравнение для геодезической в четырехмерном симметрическом пространстве $G/H^* = SU(2, 1)/S(U(1, 1) \times U(1))$ с сигнатурой $(++--)$. Благодаря неопределенному характеру таргет-пространства этой сигма-модели существует множество различных орбит решений, зависящих от “пространственноподобного”, “светоподобного” или “временноподобного” характера геодезической $\phi^A(\sigma)$.

Ограничившись подпространством статических решений с электрическим зарядом (магнитный заряд также может быть включен с помощью преобразования двойственности), мы можем упростить соответствующую структуру сигма-модели до $(G/H^*)_{\text{static}} = SO(2, 1)/SO(1, 1)$. В таргет-пространстве этой двумерной сигма-модели элемент длины принимает вид

$$ds^2 = \frac{d\Delta^2}{2\Delta^2} - \frac{2dA^2}{\Delta},$$

где Δ и A – гравитационный и электрический потенциалы соответственно. По существу, это метрика для двумерного пространства де Ситтера, для которого соответствующие уравнения геодезических имеют вид

$$\ddot{\Delta} - \Delta^{-1} \dot{\Delta}^2 - 2\dot{A}^2 = 0, \quad \ddot{A} - \Delta^{-1} \dot{\Delta} \dot{A} = 0. \quad (15)$$

Они могут быть явно решены при граничных условиях $\Delta(0) = 1$, $A(0) = 0$, соответствующих желаемой асимптотике на бесконечности ($r \rightarrow \infty$).

Таким образом, получаем три семейства решений Рейснера–Нордстрёма с классами решений, различающимися знаком константы интегрирования

$$v^2 = \frac{1}{2} G_{AB} \frac{d\phi^A}{d\sigma} \frac{d\phi^B}{d\sigma},$$

который характеризует геодезическую на $SO(2, 1)/SO(1, 1)$ как пространственноподобную ($v^2 > 0$), светоподобную ($v^2 = 0$) или времениподобную ($v^2 < 0$).

Для более общего понимания орбит решений [16] мы должны определить подходящие “заряды”, которые будут описывать отдельные решения. С этой целью рассмотрим 2-форму Комара $K \equiv \partial_\mu \kappa_\nu dx^\mu \wedge dx^\nu$. Она инвариантна относительно

действия времениподобной изометрии, и по предположению асимптотической ортогональности гиперповерхностей она асимптотически горизонтальна. Это условие эквивалентно требованию, что скалярное поле B , двойственное вектору Калуцы–Клейна, происходящему из четырехмерной метрики, должно обращаться в нуль как $O(r^{-1})$ при $r \rightarrow \infty$. В этом случае можно определить массу Комара и НУТ-заряд как [17]

$$m \equiv \frac{1}{8\pi} \int_{\partial\mathcal{M}_3} s^* \star K, \quad n \equiv \frac{1}{8\pi} \int_{\partial\mathcal{M}_3} s^* K, \quad (16)$$

где s^* обозначает кодифференциал сечения.

Поле Максвелла также определяет заряды. Используя уравнения Максвелла для поля $d\star\mathcal{F} = 0$, где $\mathcal{F} \equiv \delta\mathcal{L}/\delta F$ является линейной комбинацией 2-форм напряженности поля F , зависящего от четырехмерных скалярных полей, и с учетом тождества Бианки $dF = 0$ получаем сохраняющиеся электрический и магнитный заряды:

$$q \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{\partial\mathcal{M}_3} s^* \star \mathcal{F}, \quad p \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{\partial\mathcal{M}_3} s^* F. \quad (17)$$

Теперь рассмотрим эти заряды в трехмерном случае, чтобы выяснить свойства их преобразования под действием трехмерной двойственной группы G . Трехмерная теория описывается через представителя класса смежности $\mathcal{V} \in G/H^*$. Форма Маурера–Картана $\mathcal{V}^{-1} d\mathcal{V}$ для алгебры Ли $\mathfrak{g}$ разлагается как

$$\mathcal{V}^{-1} d\mathcal{V} = Q + P, \quad Q \equiv Q_\mu dx^\mu \in \mathfrak{h}^*, \quad P \equiv P_\mu dx^\mu \in \mathfrak{g} \ominus \mathfrak{h}^*. \quad (18)$$

Тогда уравнение движения для трехмерного скалярного поля может быть переписано в виде $d\star\mathcal{V}P\mathcal{V}^{-1} = 0$, так что $\star\mathcal{V}P\mathcal{V}^{-1}$ является $\mathfrak{g}$ -значным нётеровым током. Так как трехмерная теория евклидова, в действительности трудно говорить о сохраняющемся токе. Однако, поскольку 2-форма $\star\mathcal{V}P\mathcal{V}^{-1}$ является d -замкнутой, интеграл от этой 2-формы по заданному гомологическому циклу не зависит от конкретного представителя этого цикла. Следовательно, в этом смысле мы можем полагать, что интеграл от этой 2-формы дает заряд.

Соответственно, для стационарных решений интеграл от этой трехмерной 2-формы тока $\star\mathcal{V}P\mathcal{V}^{-1}$, взятый по любой пространственноподобной замкнутой поверхности $\partial\mathcal{M}_3$, содержащей внутри себя все особенности и нетривиальные подпространства данного решения, определяет $\mathfrak{g} \ominus \mathfrak{h}^*$ -значную матрицу нётеровых зарядов $\mathcal{C}$:

$$\mathcal{C} \equiv \frac{1}{4\pi} \int_{\partial\mathcal{M}_3} \star\mathcal{V}P\mathcal{V}^{-1}. \quad (19)$$

Она преобразуется в присоединенном представлении группы двойственности G в соответствии со стандартным нелинейным действием G на $\mathcal{V} \in G/H^*$. Для асимптотически плоских решений элемент $\mathcal{V}$ может быть устроен таким образом, чтобы стремиться на бесконечности к единичной матрице. Зарядовая матрица $\mathcal{C}$ в этом случае дается просто асимптотическим значением 1-формы P :

$$P = \mathcal{C} \frac{dr}{r^2} + O(r^{-2}). \quad (20)$$

4. ГРАДУИРОВАННЫЕ СТРУКТУРЫ

Теперь проследим за эволюцией группы двойственности G на протяжении нескольких шагов размерной редукции. В пятимерном пространстве максимальная супергравитация имеет максимальную некомпактную группу двойственности $E_{6,6}$ с 42 пятимерными скалярными полями, принимающими свои значения в классе смежности $E_{6,6}/USp(8)$, в то время как поля 1-форм (т.е. векторные поля) преобразуются в **27** из $E_{6,6}$.

При следовании до размерности $D = 4$ 27 векторов пятимерной теории дают новые скаляры при размерной редукции, и таким образом получается новый скаляр Калуцы–Клейна, появляющийся из пятимерной метрики, он составляет в общей сложности 70 скаляров в четырехмерной теории. Они принимают свои значения в $E_{7,7}/SU(8)$, в то время как напряженности четырехмерных векторных полей преобразуются в **56** из $E_{7,7}$. Новый скаляр Калуцы–Клейна соответствует $\mathfrak{gl}_1$ -градуирующему генератору алгебры $E_{7,7}$, что приводит к 3-градуированному разложению алгебры $E_{7,7}$ следующим образом:

$$\mathfrak{e}_{7,7} \simeq \overline{\mathbf{27}}^{(-2)} \oplus (\mathfrak{gl}_1 \oplus \mathfrak{e}_{6,6})^{(0)} \oplus \mathbf{27}^{(2)}, \quad (21)$$

где верхние индексы обозначают $\mathfrak{gl}_1$ -градуировку.

При следовании до размерности $D = 3$ посредством времениподобной размерной редукции встречается новое явление – трехмерные векторы могут быть дуализованы до скаляров. Это уже ясно во времениподобной редукции чистой четырехмерной гравитации до размерности $D = 3$, где получается система из двух скаляров, принимающих свои значения в $SL(2, \mathbb{R})/SO(2)$, где $SL(2, \mathbb{R})$ – группа Элерса [18]. Ее генераторы могут быть записаны как

$$\gamma \mathbf{h} \oplus \epsilon \mathbf{e} \oplus \varphi \mathbf{f} = \begin{pmatrix} \gamma & \epsilon \\ \varphi & -\gamma \end{pmatrix}, \quad (22)$$

и ее алгебра Ли $[\mathbf{h}, \mathbf{e}] = 2\mathbf{e}$, $[\mathbf{h}, \mathbf{f}] = -2\mathbf{f}$, $[\mathbf{e}, \mathbf{f}] = \mathbf{h}$.

Соответственно, при редукции от четырехмерной к трехмерной супергравитационной теории с четырехмерной группой симметрии G_4 , с соответствующей алгеброй Ли $\mathfrak{g}_4$ и с векторами, преобразующимися в представлении $\mathbf{l}_4$ для алгебры $\mathfrak{g}_4$, получается пентаградуированная структура для трехмерной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ с генератором Элерса $\mathbf{h}$, действующим теперь как градуирующий генератор $\mathbf{1}^{(0)}$:

$$\mathfrak{g} \simeq \mathbf{1}^{(-2)} \oplus \overline{\mathbf{l}_4}^{(-1)} \oplus (\mathbf{1} \oplus \mathfrak{g}_4)^{(0)} \oplus \mathbf{l}_4^{(+1)} \oplus \mathbf{1}^{(2)}. \quad (23)$$

Например, в максимальной трехмерной супергравитации получается следующее выражение для $\mathfrak{e}_{8,8}$:

$$\mathfrak{e}_{8,8} \simeq \mathbf{1}^{(-2)} \oplus \overline{\mathbf{56}}^{(-1)} \oplus (\mathbf{1} \oplus \mathfrak{e}_{7,7})^{(0)} \oplus \mathbf{56}^{(+1)} \oplus \mathbf{1}^{(2)} \quad (248 \text{ генераторов}). \quad (24)$$

Теперь применим это для разложения структуры класса смежности для трехмерных скалярных полей и для зарядовой матрицы $\mathcal{C}$. В размерности $D = 4$ скаляры ассоциируются с генераторами класса смежности $\mathfrak{g}_4 \ominus \mathfrak{h}_4$, где $\mathfrak{h}_4$ является алгеброй

Ли четырехмерной группы H_4 . Представление, осуществляющееся четырехмерными электрическим и магнитными зарядами q и p , – это $\mathfrak{l}_4$. Тогда трехмерные скаляры и зарядовая матрица $\mathcal{C}$ могут быть разложены в три неприводимых представления по отношению к $\mathfrak{so}(2) \oplus \mathfrak{h}_4$ как

$$\mathfrak{g} \ominus \mathfrak{h}^* \cong (\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \ominus \mathfrak{so}(2)) \oplus \mathfrak{l}_4 \oplus (\mathfrak{g}_4 \ominus \mathfrak{h}_4). \quad (25)$$

Метрика, индуцированная метрикой Киллинга–Картана алгебры $\mathfrak{g}$ на этом классе смежности, является положительно-определенной для первого и последнего членов, но отрицательно-определенной для $\mathfrak{l}_4$. Компоненты $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \ominus \mathfrak{so}(2)$ ассоциируются с массой Комара и НУТ-зарядом Комара, в то время как компоненты $\mathfrak{l}_4$ ассоциируются с электромагнитными зарядами. Остаточные $\mathfrak{g}_4 \ominus \mathfrak{h}_4$ -заряды принадлежат нётеровым токам четырехмерной теории.

5. ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ

В работе [8] было доказано, что если G – простая группа, то все неэкстремальные одинарные решения типа черных дыр данной теории лежат в H^* -орбите решения Керра. Более того, все статические решения регулярны вне горизонта с зарядовой матрицей, удовлетворяющей условию $\text{Tr } \mathcal{C}^2 > 0$ и лежащей в H^* -орбите решения Шварцшильда. (Включение и выключение углового момента требуют рассмотрения $D = 2$ группы дуальности, обобщающей группу Героха A_1^1 ; мы не будем здесь углубляться в данную симметричную структуру.)

Используя координаты Вейля, в которых четырехмерная метрика принимает вид

$$ds^2 = f(x, \rho)^{-1} [e^2 k(x, \rho)(dx^2 + d\rho^2) + \rho^2 d\phi^2] + f(x, \rho)(dt + A(x, \rho) d\phi)^2, \quad (26)$$

представитель класса смежности $\mathcal{V}$, ассоциированный с решением Шварцшильда с массой m , может быть записан через некомпактные генераторы Элерса $\mathbf{h}$ алгебры $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$, т. е.

$$\mathcal{V} = \exp\left(\frac{1}{2} \ln \frac{r-m}{r+m} \mathbf{h}\right) \rightarrow \mathcal{C} = m\mathbf{h}. \quad (27)$$

Для максимальной $N = 8$ теории с симметрией $E_{8(8)}$ (а также для исключительной “магической” $N = 2$ супергравитации [19] с симметрией $E_{8(-24)}$) имеем $h = \text{diag}[2, 1, 0, -1, -2]$, так что

$$\mathbf{h}^5 = 5\mathbf{h}^3 - 4\mathbf{h}. \quad (28)$$

Следовательно, зарядовая матрица $\mathcal{C}$ удовлетворяет во всех случаях характеристическому уравнению

$$\mathcal{C}^5 = 5\mathcal{C}^3 - 4\mathcal{C}, \quad (29)$$

где $c^2 \equiv (\text{Tr}(\mathbf{h}^2))^{-1} \text{Tr}(\mathcal{C}^2)$ является *экстремальным параметром* ($c^2 = 0$ для экстремальных статических решений, в то время как $c^2 = m^2$ для решения Шварцшильда). Более того, всегда, кроме двух исключительных случаев в E_8 , в действительности удовлетворяется более сильное ограничение для зарядовой матрицы $\mathcal{C}$:

$$\mathcal{C}^3 = c^2 \mathcal{C}. \quad (30)$$

Характеристическое уравнение выбирает приемлемые орбиты решений, т. е. орбиты, содержащие не только решения с голыми особенностями. Оно определяет матрицу $\mathcal{C}$ через массу, НУТ-заряд и четырехмерные электромагнитные заряды.

Параметр c^2 совпадает с квадратом скорости таргет-пространства в приведенном выше обсуждении гармонического отображения: $c^2 = v^2$. Теория Максвелла–Эйнштейна представляет собой простейший пример теории с метрикой сигма-модели с неопределенной сигнатурой, с таргет-пространством скалярного поля $G/H^* = SU(2, 1)/S(U(1, 1) \times U(1))$. Зарядовая матрица теории Максвелла–Эйнштейна

$$\mathcal{C}_{\text{ME}} = \begin{pmatrix} m & n & -z/\sqrt{2} \\ n & -m & iz/\sqrt{2} \\ \bar{z}/\sqrt{2} & i\bar{z}/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \in su(2, 2) \ominus u(1, 1), \quad (31)$$

где $z = q + ip$ – комплексный электромагнитный заряд. Параметр экстремальности теории Максвелла–Эйнштейна $c^2 = m^2 + n^2 - z\bar{z}$. Решения распадаются на три категории: неэкстремальный случай ($c^2 > 0$), экстремальный случай ($c^2 = 0$) и гиперэкстремальный случай ($c^2 < 0$). Гиперэкстремальные решения имеют голые сингулярности, в то время как в случае неэкстремальных и экстремальных решений сингулярности скрыты горизонтом.

6. УРАВНЕНИЕ ДИРАКА

Для экстремальных решений $c^2 = 0$ зарядовая матрица $\mathcal{C}$ становится нильпотентной: $\mathcal{C}^5 = 0$ для случая E_8 и $\mathcal{C}^3 = 0$ в другом случае.

Для $\mathcal{N}$ расширенных теорий супергравитации находим $H^* \cong \text{Spin}^*(2\mathcal{N}) \times H_0$, и зарядовая матрица $\mathcal{C}$ преобразуется как вейлевский спинор $\text{Spin}^*(2\mathcal{N})$, также принимая значения в представлении $\mathfrak{h}_0$ (где $\mathfrak{h}_0$ действует на материальную составляющую приводимых $N = 4$ теорий). Как и в случае $\text{SO}^*(16)$, рассмотренном ранее, определяются $\text{Spin}^*(2\mathcal{N})$ -фермионные осцилляторы

$$a_j := \frac{1}{2}(\Gamma_{2j-1} + i\Gamma_{2j}), \quad a^j \equiv (a_j)^\dagger = \frac{1}{2}(\Gamma_{2j-1} - i\Gamma_{2j}) \quad (32)$$

для $j = 1, \dots, \mathcal{N}$. Они подчиняются стандартным фермионным антикоммутиационным соотношениям уничтожения и рождения. Используя этот осцилляторный базис уничтожения и рождения, мы можем представить зарядовую матрицу $\mathcal{C}$ как состояние

$$|\mathcal{C}\rangle \equiv \left(\mathcal{W} + Z_{ij} a^i a^j + \sum_{i,j,k,l} a^i a^j a^k a^l + \dots \right) |0\rangle, \quad (33)$$

где $a_i |0\rangle = 0$.

Из требования того, что поля дилатино инвариантны относительно нарушения суперсимметрии БПЗ-решения, получается уравнение Дирака для вектора зарядовых состояний

$$(\epsilon_\alpha^i a_i + \Omega_{\alpha\beta} \epsilon_i^\beta a^i) |\mathcal{C}\rangle = 0, \quad (34)$$

где $(\epsilon_\alpha^i, \epsilon_i^\alpha)$ – асимптотическое (при $r \rightarrow \infty$) значение спиноров Киллинга, а $\Omega_{\alpha\beta}$ – симплектическая форма на $\mathbb{C}^{2n}$ в случае, когда сохраняется n/N -суперсимметрия.

Это условие оказывается эквивалентным алгебраическому требованию, что $\mathcal{C}$ является *чистым спинором* из $\text{Spin}^*(2\mathcal{N})$. Для БПЗ-решений оно имеет следствием то, что характеристическое уравнение может быть явно решено через рациональные функции.

Отметим, что требование $c^2 = 0 \iff \langle \mathcal{C} | \mathcal{C} \rangle = 0$ является более слабым условием, чем суперсимметричное уравнение Дирака. Экстремальное и БПЗ-условия не всегда являются тождественными, хотя они совпадают для $\mathcal{N} \leq 5$ чистых супергравитаций. Они не равноправны, например, при $\mathcal{N} = 6, 8$ или для теорий с взаимодействующими векторными полями.

7. БПЗ-СТРАТЫ

Анализ уравнения Дирака или степени нильпотентности зарядовой матрицы $\mathcal{C}$ приводит к разложению пространства модулей $\mathcal{M}$ супергравитационных решений по различным *стратам* степеней БПЗ. Размерности некоторых страт для чистых супергравитационных теорий, полученные в предположении, что $\mathcal{M}_0$ является не-БПЗ-стратой, $\mathcal{M}_1$ является $1/\mathcal{N}$ БПЗ-стратой и т. д., приведены в табл. 1.

Таблица 1

	$\mathcal{N} = 2$	$\mathcal{N} = 3$	$\mathcal{N} = 4$	$\mathcal{N} = 5$	$\mathcal{N} = 6$	$\mathcal{N} = 8$
$\dim \mathcal{M}_0$	4	8	14	22	34	58
$\dim \mathcal{M}_1$	3	7	13	21	33	57
$\dim \mathcal{M}_1^0$					32	56
$\dim \mathcal{M}_2$			8	16	26	46
$\dim \mathcal{M}_4 K$					17	29

Откуда возникают такие размерности страт? Для примера возьмем неэкстремальную страту $\mathcal{N} = 8$ супергравитации с размерностью пространства модулей 58. Чтобы такое малое число могло быть соотнесено с действием группы E_8 , необходимо найти большую группу изотропии, по которой производится факторизация. Существование такой большой подгруппы является особенностью некомпактных групп, как и в случае подгруппы Бореля, имеющей четыре генератора, четырехмерной группы Лоренца. Для неэкстремальной $\mathcal{N} = 8$ супергравитационной страты $\mathcal{M}_0$ существуют 190 генераторов параболической подгруппы $\mathcal{P}_0$, содержащей четырехмерную группу дуальности E_7 , 56 генераторов, соответствующих 56 электромагнитным зарядам четырехмерной теории, и еще один генератор. Результирующее факторпространство $E_8/\mathcal{P}_0$ тогда имеет размерность 58. Однако, как мы увидим, это задает точное групповое действие только на плотном подмножестве полного пространства модулей. Анализ экстремальных страт супергравитационных решений требует знания *нильпотентных орбит* трехмерной группы двойственности H^* . Этот анализ не противоречит устоявшейся математической литературе о нильпотентных орбитах (см., например, [20]).

8. ПОЧТИ ИВАСАВОВСКИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ

В раннем анализе орбит четырехмерных групп симметрии G_4 [21] активно использовалось разложение Ивасава

$$g = u_{(g,Z)} e^{\ln \lambda_{(g,Z)} \mathbf{z}} b_{(g,Z)} \quad (35)$$

с $u_{(g,Z)} \in H_4$ и $b_{(g,Z)} \in \mathfrak{B}_Z$, где $\mathfrak{B}_Z \subset G_4$ является параболической подгруппой, которая оставляет заряды Z инвариантными с точностью до мультипликативного фактора $\lambda_{(g,Z)}$. Этот мультипликативный фактор может быть скомпенсирован преобразованием “тромбона”, в котором вейлевское перерастяжение комбинируется с компенсирующим преобразованием растяжения координат, что приводит к формулировке активных преобразований симметрии, которые отображают решения на другие решения с неизменными асимптотическими значениями для пространственно-временной метрики и скалярных полей.

Четырехмерное преобразование “тромбона” имеет естественное место в параболической подгруппе трехмерной двойственной группы G . Для трехмерной структуры характерно нарушение разложения Ивасава для некомпактных групп H^* . Однако разложение Ивасава работает почти всюду в пространстве трехмерных решений. Места его нарушения – это в точности экстремальные подорбиты группы двойственности. Из этого следует, что группа G не действует транзитивно на своих орбитах. Существует преобразование группы G , которое позволяет устремить $c^2 \rightarrow 0$, таким образом происходит выход на экстремальную (в общем случае БПЗ) подорбиту. Однако нельзя обратить отображение и вернуть общее неэкстремальное решение из экстремального, достигнутого на данной траектории для группы G .

9. РЕШЕНИЯ СО МНОГИМИ ЦЕНТРАМИ

Изложенный выше подход применен как для решений со многими центрами, так и для решений с одним центром [22], [23]. Начнем с общей подстановки

$$\mathcal{V}(x) = \mathcal{V}_0 \exp\left(-\sum_n \mathcal{H}^n(x) \mathcal{C}_n\right) \quad (36)$$

с симметриями элементов алгебры Ли $\mathcal{C}_n \in \mathfrak{g} \ominus \mathfrak{h}^*$ и функциями $\mathcal{H}^n(x)$, определяющимися по уравнениям движения. Определяя, как выше, $\mathcal{V}^{-1} d\mathcal{V} = Q + P$ и налагая условие, чтобы величина P зависела линейно от функций $\mathcal{H}^n(x)$, приходим к условию $[\mathcal{C}_m, [\mathcal{C}_n, \mathcal{C}_p]] = 0$. Уравнения движения Эйнштейна и уравнения движения для скаляров тогда приводятся к виду

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \sum_{mn} \partial_\mu \mathcal{H}^m \partial_\nu \mathcal{H}^n \text{Tr } \mathcal{C}_m \mathcal{C}_n, \quad d \star d\mathcal{H}^n = 0. \quad (37)$$

Ограничение на решения, где трехмерное пространство плоско, тогда приводит к условию $\text{Tr } \mathcal{C}_m \mathcal{C}_n = 0$. Результирующая система обобщает систему из работы [9]. Решение $[\mathcal{C}_m, [\mathcal{C}_n, \mathcal{C}_p]] = 0 = \text{Tr } \mathcal{C}_m \mathcal{C}_n$ теперь свелось к решению алгебраической задачи, поддающейся вышеизложенному анализу нильпотентных орбит: решения со многими центрами неэкстремальны, и экстремальные стационарные решения могут быть соответственно образованы из экстремальных решений с одним центром.

10. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разработана довольно общая конструкция для анализа стационарных супергравитационных решений, использующая орбиты симметричной двойственности. Нётерова зарядовая матрица $\mathcal{C}$ удовлетворяет характеристическому уравнению (29)

в максимальных случаях с группой E_8 и уравнению (30) в немаксимальных случаях, где $c^2 \equiv (\text{Tr } \mathbf{h}^2)^{-1} \text{Tr } \mathcal{C}^2$ является параметром экстремальности. Экстремальные решения характеризуются равенством $c^2 = 0$, и матрица $\mathcal{C}$ становится нильпотентной ($\mathcal{C}^5 = 0$ и $\mathcal{C}^3 = 0$) на соответствующих экстремальных подорбитах. БПЗ-решения имеют зарядовые матрицы $\mathcal{C}$, удовлетворяющие алгебраическому суперсимметричному уравнению Дирака, которое описывает общие свойства таких решений. Это условие более сильное, чем условие экстремальности $c^2 = 0$. Орбиты трехмерной группы дуальности G не всегда действуют транзитивно. Это связано с невозможностью разложения Ивасава для некомпактных групп дивизоров H^* . Множество, для которого невозможно разложение Ивасава, соответствует экстремальным подорбитам.

Список литературы

- [1] А. А. Славнов, Л. Д. Фаддеев, *Введение в квантовую теорию калибровочных полей*, Наука, М., 1988.
- [2] А. А. Славнов, *ТМФ*, **10**:2 (1972), 153–161.
- [3] T. D. Bakeyev, A. A. Slavnov, *Modern Phys. Lett. A*, **11**:19 (1996), 1539–1554, arXiv: hep-th/9601092.
- [4] A. A. Slavnov, *Phys. Lett. B*, **388**:1 (1996), 147–153, arXiv: hep-th/9512101.
- [5] А. А. Славнов, *ТМФ*, **148**:3 (2006), 339–349, arXiv: hep-th/0604052.
- [6] А. А. Славнов, *Phys. Lett. B*, **217**:1–2 (1989), 91–94.
- [7] G. Neugebauer, D. Kramer, *Ann. Phys. (Leipzig)*, **479**:1 (1969), 62–71.
- [8] P. Breitenlohner, D. Maison, G. W. Gibbons, *Commun. Math. Phys.*, **120**:2 (1988), 295–333.
- [9] G. Clément, D. Gal'tsov, *Phys. Rev. D*, **54**:10 (1996), 6136–6152, arXiv: hep-th/9607043; D. V. Gal'tsov, O. A. Rytchikov, *Phys. Rev. D*, **58**:12 (1998), 122001, 13 pp., arXiv: hep-th/9801160.
- [10] E. Cremmer, B. Julia, *Nucl. Phys. B*, **159**:1–2 (1979), 141–212.
- [11] B. de Wit, A. K. Tollsten, H. Nicolai, *Nucl. Phys. B*, **392**:1 (1993), 3–38, arXiv: hep-th/9208074.
- [12] P. Meessen, T. Ortin, *Nucl. Phys. B*, **749**:1–3 (2006), 291–324, arXiv: hep-th/0603099.
- [13] M. Cvetič, D. Youm, *Phys. Rev. D*, **53**:2 (1996), R584–R588, arXiv: hep-th/9507090.
- [14] M. Cvetič, A. A. Tseytlin, *Phys. Lett. B*, **366**:1–4 (1996), 95–103, arXiv: hep-th/9510097.
- [15] J. Eells, Jr., J. H. Sampson, *Am. J. Math.*, **86**:1 (1964), 109–160.
- [16] G. Bossard, H. Nicolai, K. S. Stelle, *JHEP*, **07** (2009), 003, 83 pp., arXiv: 0902.4438.
- [17] G. Bossard, H. Nicolai, K. S. Stelle, *Gen. Rel. Grav.*, **41**:6 (2009), 1367–1379, arXiv: 0809.5218.
- [18] J. Ehlers, *Konstruktion und Charakterisierungen von Lösungen der Einsteinschen Gravitationsgleichungen*, University of Hamburg, Hamburg, 1957.
- [19] M. Günaydin, G. Sierra, P. K. Townsend, *Phys. Lett. B*, **133**:1–2 (1983), 72–76.
- [20] D. Ž. Doković, *Represent. Theory*, **5** (2001), 17–42; *J. Lie Theory*, **10**:2 (2000), 491–510; **11**:2 (2001), 381–413; *Asian J. Math.*, **5**:3 (2001), 561–584.
- [21] E. Cremmer, H. Lü, C. N. Pope, K. S. Stelle, *Nucl. Phys. B*, **520**:1–2 (1998), 132–156, arXiv: hep-th/9707207.
- [22] G. Bossard, H. Nicolai, *Gen. Rel. Grav.*, **42**:3 (2010), 509–537, arXiv: 0906.1987.
- [23] G. Bossard, C. Ruef, *Gen. Rel. Grav.*, **44**:1 (2012), 21–66, arXiv: 1106.5806.