Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Фаранг-Сардруди, А. Резаи-Агдам, Л. Седжи-Гадим,
Структуры Намбу на четырехмерных действительных
группах Ли и связанные с ними суперинтегрируемые си-
стемы, *ТМФ*, 2015, том 183, номер 2, 274–300

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8769>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru под-
разумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.92.164.108

26 апреля 2023 г., 16:29:02

© 2015 г. С. Фаранг-Сардрудиди*, А. Резаи-Агдам*,
Л. Седжи-Гадим†

СТРУКТУРЫ НАМБУ НА ЧЕТЫРЕХМЕРНЫХ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ГРУППАХ ЛИ И СВЯЗАННЫЕ С НИМИ СУПЕРИНТЕГРИРУЕМЫЕ СИСТЕМЫ

Определены все тензоры Намбу (структуры Намбу) третьего и четвертого порядков на четырехмерных действительных группах Ли. Кроме того, с помощью структур Намбу четвертого порядка получены суперинтегрируемые системы на некоторых из этих групп Ли, взятых в качестве фазовых пространств, с группами симметрий $A_{4,8}$ и $A_{4,10}$.

Ключевые слова: структуры Намбу, суперсимметричные системы, группы Ли.

DOI: 10.4213/tmf8769

1. ВВЕДЕНИЕ

В 1973 году в работе [1] Намбу изучил динамическую систему, представленную в виде гамильтоновой системы по отношению к обобщенной скобке Пуассона (скобка пуассоновского типа), введенной с помощью якобиана. Спустя годы (около двух десятилетий) Тахтаджян [2] ввел понятие структур Намбу–Пуассона (или просто структур Намбу), используя аксиоматическое определение n -скобки, указал основные свойства этой операции, а также дал геометрическую формулировку многообразий Намбу. Этот новый подход породил цикл статей, связанных с новыми понятиями.

Многообразие Намбу – это C^∞ -многообразие, на котором задан тензор Намбу. Тензор Намбу есть такое кососимметричное контравариантное тензорное поле на многообразии, что индуцированная скобочная операция удовлетворяет фундаментальному свойству, которое обобщает обычное тождество Якоби [3]–[7] (имеется еще одно обобщение, так называемая обобщенная скобка Пуассона [8], [9]; сравнение обоих понятий дано в работах [10], [11]). В работах [12] и [13] введено понятие группы

*Department of Physics, Azarbaijan Shahid Madani University, Tabriz, Iran.
E-mail: m.farhang88@azaruniv.edu, rezaei-a@azaruniv.edu

†Department of Mathematics, Azarbaijan Shahid Madani University, Tabriz, Iran.
E-mail: m.sedghi88@azaruniv.edu

Намбу–Ли. Вайсман в работе [13] распространил скобки Нambu на 1-формы и, обобщив случай Пуассона–Ли, ввел понятие групп Нambu–Ли как групп, наделенных мультипликативной структурой Нambu. Разложимость структур Нambu для групп Ли, а также соответствие между семейством левоинвариантных тензоров Нambu порядка n на m -мерных группах Ли G и семейством n -мерных подалгебр Ли алгебры $\mathcal{G}$ (алгебры Ли в G) было доказано Наканиши в работе [14]. В работе [15] он также ввел мультипликативные структуры Нambu на трехмерных действительных группах Ли. В настоящей статье тем же способом мы попытаемся определить мультипликативные структуры Нambu четвертого и третьего порядков на четырехмерных действительных группах Ли.

План статьи следующий. В разделе 2 для самодостаточности статьи дан обзор некоторых определений и теорем. В разделе 3 с помощью метода, примененного в работе [15], мы определим мультипликативные структуры Нambu четвертого и третьего порядков на четырехмерных действительных группах Ли. Наконец, в разделе 4, используя структуры Нambu четвертого порядка на некоторых группах Ли (т. е. на четырехмерных действительных группах Ли, имеющих симплектическую структуру [16]), мы получим суперинтегрируемые системы с указанными группами Ли в качестве фазовых пространств и группами $\mathbf{A}_{4,8}$ и $\mathbf{A}_{4,10}$ в качестве групп симметрий Ли.

2. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ТЕОРЕМЫ

Напомним некоторые основные определения и теоремы, связанные со структурой Нambu [12], [15]. Пусть G – m -мерная группа Ли с алгеброй Ли $\mathcal{G}$. Обозначим через $\Gamma(\Lambda^n TG)$ семейство антисимметричных n -векторных полей (контравариантных тензоров) на G . Тогда для каждого $\eta \in \Gamma(\Lambda^n TG)$ можно ввести n -скобку функций на группе Ли G следующим образом:

$$\{f_1, \dots, f_n\} = \eta(df_1, \dots, df_n), \quad f_i \in \mathcal{F}(G), \quad i = 1, \dots, n,$$

где $\mathcal{F}(G)$ – алгебра C^∞ -функций на G . Кроме того, поскольку скобки удовлетворяют правилу Лейбница, можно определить векторное поле $X_{f_1, \dots, f_{n-1}}$ как

$$X_{f_1, \dots, f_{n-1}}(g) = \{f_1, \dots, f_{n-1}, g\}, \quad g \in \mathcal{F}(G).$$

Это векторное поле называется *гамильтоновым*, пространство гамильтоновых векторных полей обозначим как $\mathcal{H}$.

Введем следующие понятия [7], [14], [15].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Элемент $\eta \in \Gamma(\Lambda^n TG)$ при $n \geq 3$ называется *тензором Нambu* порядка n , если он удовлетворяет условию $\mathcal{L}_{X_{f_1, \dots, f_{n-1}}} \eta = 0$ для всех $X_{f_1, \dots, f_{n-1}} \in \mathcal{H}$, где $f_i \in \mathcal{F}(G)$; здесь $\mathcal{L}$ означает производную Ли.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Элемент $\eta \in \Gamma(\Lambda^n TG)$ назовем *мультипликативным тензором*, если для любых $g_1, g_2 \in G$ имеем

$$\eta_{g_1 g_2} = L_{g_1 *} \eta_{g_2} + R_{g_2 *} \eta_{g_1},$$

где R_{g_2} и L_{g_1} – соответственно правый и левый сдвиг в G . Группа Ли G , наделенная мультипликативным тензором Нambu η , называется *группой Нambu–Ли* [13].

Следующая теорема и следствие из нее доказаны в работе [13].

ТЕОРЕМА 1. Пусть G – m -мерная группа Ли и $\mathfrak{h}$ – n -мерная подалгебра алгебры $\mathcal{G}$, где $n \geq 3$. Для базиса $X_1, \dots, X_n$ подалгебры $\mathfrak{h}$ положим $\eta = X_1 \wedge \dots \wedge X_n$. Тогда η – левоинвариантный тензор Намбу порядка n на G . Наоборот, пусть задан левоинвариантный тензор Намбу $\eta = X_1 \wedge \dots \wedge X_n \in \Lambda^n \mathcal{G}$ на G , тогда $\mathfrak{h} = \{X_1, \dots, X_n\}$ – подалгебра Ли алгебры $\mathcal{G}$.

СЛЕДСТВИЕ 1. Существует взаимно однозначное соответствие с точностью до коэффициента (функции) между семейством левоинвариантных тензоров Намбу порядка n на G и семейством n -мерных подалгебр Ли алгебры $\mathcal{G}$.

Отметим, что если η – тензор Намбу порядка $n \geq 3$, а f – гладкая функция, то $f\eta$ тоже является тензором Намбу [7].

ТЕОРЕМА 2 [6]. Пусть (G, η) – m -мерная компактная или полупростая группа Намбу–Ли и элемент η имеет высший порядок, тогда $\eta = 0$.

Следующая теорема, доказанная в работе [13], предлагает одну из характеристик групп Намбу–Ли.

ТЕОРЕМА 3. Если G – связанная группа Ли, на которой задан тензор Намбу η , равный нулю в единице e группы G , то (G, η) является группой Намбу–Ли тогда и только тогда, когда n -скобка любых n левоинвариантных (правоинвариантных) 1-форм группы G является левоинвариантной (правоинвариантной) 1-формой.

Используя эту теорему, можно охарактеризовать мультипликативный тензор η высшего порядка. Пусть $\mathcal{G}$ – алгебра Ли группы G с базисом $X_1, \dots, X_m$. Ясно, что левоинвариантные векторные поля можно считать базисом алгебры $\mathcal{G}$. Обозначим эти левоинвариантные векторные поля теми же буквами X_i . Поскольку η является тензором высшего порядка, его можно представить как $\eta = fX_1 \wedge \dots \wedge X_m$ с некоторой функцией $f \in \mathcal{F}(G)$. Используя эти обозначения, приведем теорему из работы [15].

ТЕОРЕМА 4. Пусть $\eta = fX_1 \wedge \dots \wedge X_m$ – тензор высшего порядка на группе G (такой тензор всегда является тензором Намбу), где $f \in \mathcal{F}(G)$. Тензор η является мультипликативным тогда и только тогда, когда $f(e) = 0$ и

$$X_i f + \left(\sum_{k=1}^m C_{ik}^k \right) f = q_i, \quad i = 1, \dots, m,$$

где C_{ij}^k – структурные константы алгебры $\mathcal{G}$ по отношению к базису $X_1, \dots, X_m$, а q_i – некоторые константы.

На основании этой теоремы в работе [15] были получены структуры Намбу третьего порядка для трехмерных действительных групп Ли. В настоящей статье тем же способом вводится структура Намбу четвертого порядка (высшего порядка) для четырехмерных действительных групп Ли, а также с помощью теоремы 1 строится структура Намбу третьего порядка для этих групп Ли.

3. СТРУКТУРЫ НАМБУ НА ЧЕТЫРЕХМЕРНЫХ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ГРУППАХ ЛИ

С помощью теорем 1 и 4 в этом разделе мы построим структуры Намбу четвертого и третьего порядков на четырехмерных действительных группах Ли. Отметим, что мы используем классификацию Патеры–Винтерница [17] для четырехмерных алгебр Ли и их подалгебр.

Обозначим через $\mathcal{G}$ четырехмерную действительную алгебру Ли, соответствующую односвязной группе Ли G , а также обозначим через X_1, X_2, X_3, X_4 левоинвариантные векторные поля. Чтобы рассчитать эти векторные поля, нужно определить левоинвариантные 1-формы; такие расчеты были уже проведены в работе [18]. Мы воспользуемся этими результатами для получения левоинвариантных векторных полей. В общем случае для группы Ли G с алгеброй Ли $\mathcal{G}$ и абстрактного базиса $\{T_i\}$ левоинвариантные 1-формы можно ввести следующим образом:

$$g^{-1} dg = e^i_{\mu} T_i dx^{\mu}, \quad g \in G,$$

при этом для левоинвариантных векторных полей получим выражения [18]

$$X_i = V_i^{\mu} \partial_{\mu},$$

где $V_i^{\mu} = (e_i^{\mu})^t$, e_i^{μ} – тензор, обратный к e^i_{μ} , а верхний индекс t означает транспонирование. Таким образом можно найти левоинвариантные векторные поля. Результаты представлены в табл. 1 в приложении.

Теперь, чтобы рассчитать структуру Намбу $\eta \in \Gamma(\Lambda^4 TG)$, представим ее в виде $\eta = f X_1 \wedge X_2 \wedge X_3 \wedge X_4$, а для расчета структуры Намбу $\eta \in \Gamma(\Lambda^3 TG)$ ее можно представить в виде $\eta = f X_1 \wedge X_2 \wedge X_3$, где $f \in \mathcal{F}(G)$. Затем определим структуры Намбу четвертого порядка на четырехмерных действительных группах Ли, используя теорему 4, а с помощью теорем 1 и 4 найдем структуры Намбу третьего порядка на действительных четырехмерных группах Ли.

Продемонстрируем, как работает наш метод на примере алгебры Ли $A_{4,8}$. Эта алгебра Ли изоморфна алгебре Гейзенберга, и для нее справедливы следующие коммутационные соотношения [17]:

$$[X_2, X_4] = X_2, \quad [X_3, X_4] = -X_3, \quad [X_2, X_3] = X_1. \quad (1)$$

Левоинвариантные векторные поля для этой алгебры Ли имеют вид

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x^1}, \quad X_2 = (-x^3 e^{-x^4}) \frac{\partial}{\partial x^1} + e^{-x^4} \frac{\partial}{\partial x^2}, \quad X_3 = e^{x^4} \frac{\partial}{\partial x^3}, \quad X_4 = \frac{\partial}{\partial x^4},$$

причем эти векторные поля удовлетворяют коммутационным соотношениям (1). В соответствии с теоремой 4 функция $f(x^1, x^2, x^3, x^4)$ должна удовлетворять условиям $f(0, 0, 0, 0) = 0$ и

$$X_i f + \left(\sum_{k=1}^m C_{ik}^k \right) f = q_i \quad i = 1, \dots, 4, \quad (2)$$

где q_i – некоторые константы. В результате получим решение уравнения (2) в виде $f = q_4 x^4$, следовательно,

$$\eta = q_4 x^4 \frac{\partial}{\partial x^1} \wedge \frac{\partial}{\partial x^2} \wedge \frac{\partial}{\partial x^3} \wedge \frac{\partial}{\partial x^4},$$

что порождает структуру Намбу–Ли четвертого порядка на соответствующей группе Ли $\mathbf{A}_{4,8}$.

Таким же образом получим следующие левоинвариантные векторные поля для трехмерных подалгебр Ли алгебры $A_{4,8}$ [17]:

для подалгебры $A_{3,1}$ набор левоинвариантных векторных полей $\{X_2, X_3; X_1\}$ задается как

$$X_2 = \frac{\partial}{\partial x^2} - x_3 \frac{\partial}{\partial x^1}, \quad X_3 = \frac{\partial}{\partial x^3}; \quad X_1 = \frac{\partial}{\partial x^1};$$

для подалгебры $A_2 \oplus A_1$ мы имеем набор $\{X_4, X_1; X_2\}$, где

$$X_4 = \frac{\partial}{\partial x^4} + x_2 \frac{\partial}{\partial x^2}, \quad X_1 = \frac{\partial}{\partial x^1}; \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial x^2};$$

для подалгебры $A_2 \oplus A_1$ набор левоинвариантных векторных полей $\{X_4, X_1; X_3\}$ задается как

$$X_4 = \frac{\partial}{\partial x^4} - x_3 \frac{\partial}{\partial x^3}, \quad X_1 = \frac{\partial}{\partial x^1}; \quad X_3 = \frac{\partial}{\partial x^3}.$$

Это порождает следующие структуры Намбу третьего порядка на группе $\mathbf{A}_{4,8}$ (соответственно):

$$\begin{aligned} \eta_1 &= (q_1 x^2 + q_2 x^3) \frac{\partial}{\partial x^1} \wedge \frac{\partial}{\partial x^2} \wedge \frac{\partial}{\partial x^3}, \\ \eta_2 &= (q_3 x^2 + q_1 (e^{x^4} - 1)) \frac{\partial}{\partial x^1} \wedge \frac{\partial}{\partial x^2} \wedge \frac{\partial}{\partial x^4}, \\ \eta_3 &= (q_3 x^3 + q_1 (e^{-x^4} - 1)) \frac{\partial}{\partial x^1} \wedge \frac{\partial}{\partial x^3} \wedge \frac{\partial}{\partial x^4}. \end{aligned}$$

Таким образом, мы задали все структуры Намбу четвертого и третьего порядков на четырехмерных действительных группах Ли.

Список результатов приведен в табл. 1 и 2 приложения.

4. СУПЕРИНТЕГРИРУЕМЫЕ СИСТЕМЫ СО СТРУКТУРАМИ НАМБУ

Гамильтонова система с n степенями свободы является интегрируемой в смысле Лиувилля, если у нее есть n инвариантов, находящихся в инволюции [19], и является суперинтегрируемой, если у нее есть дополнительно вплоть до $2n - 1$ независимых инвариантов [20]. В этом разделе мы построим суперинтегрируемые динамические системы с помощью структур Намбу четвертого порядка на четырехмерных действительных группах Ли. Фактически мы рассмотрим некоторые системы, связанные со структурой Намбу на некоторых группах Ли, выступающих в качестве фазового пространства (т. е. группах Ли, наделенных симплектической структурой [16]). Эту работу мы выполним в два этапа. На первом этапе рассмотрим суперинтегрируемые системы с $\mathbf{A}_{4,8}$ в качестве группы симметрий. На втором этапе рассмотрим системы с $\mathbf{A}_{4,10}$ в качестве группы симметрий. Заметим, что $\mathbf{A}_{4,8}$ и $\mathbf{A}_{4,10}$ – единственные группы, имеющие обратимые ад-инвариантные метрики. В дальнейшем $(x^1, \dots, x^4)$ – координаты групп Ли.

4.1. Суперинтегрируемые системы с группой $A_{4,8}$ в качестве группы симметрий. Рассмотрим несколько случаев.

• *Группа Ли $A_{4,9}^0$ в качестве фазового пространства.* Симплектическая структура на группе $A_{4,9}^0$ имеет вид [16]

$$\{x^1, x^4\} = \alpha, \quad \{x^2, x^3\} = -\alpha,$$

где α – произвольная ненулевая действительная константа. Введем координаты Дарбу

$$y^1 = -\frac{1}{\alpha}x^2, \quad y^2 = x^1, \quad y^3 = x^3, \quad y^4 = \frac{1}{\alpha}x^4, \quad (3)$$

которые удовлетворяют стандартным скобкам Пуассона¹⁾

$$\{y^1, y^3\} = 1, \quad \{y^2, y^4\} = 1. \quad (4)$$

Теперь, используя упомянутый в работе [21] метод, мы можем построить динамическую систему с помощью структуры Намбу на группе Ли $A_{4,9}^0$ в качестве фазового пространства. Для этой цели рассмотрим динамические величины Q_a как функции переменных x^i , которые удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\{Q_a, Q_b\} = f_{ab}^c Q_c, \quad (5)$$

где f_{ab}^c – структурная константа алгебры симметрий Ли $A_{4,8}$. Далее, проведя некоторые расчеты, выразим 4-скобки Намбу (с весами, равными структурным константам) через скобку Пуассона [21]:

$$g^{ac} g^{bd} f_{cd}^e \{A, Q_a, Q_b, Q_e\} = 3g^{ac} g^{bd} f_{cd}^e \eta \{A, Q_a\} \{Q_b, Q_e\} = 3g^{ac} g^{bd} f_{cd}^e f_{be}^f \eta \{A, Q_a\} Q_f,$$

где g^{ac} – метрика, обратная к ад-инвариантной невырожденной метрике на алгебре Ли $A_{4,8}$, а η – структура Намбу на группе Ли $A_{4,9}^0$, выраженная через координаты y^i , $i = 1, 2, 3, 4$. После некоторых вычислений получим, что ад-инвариантная метрика для алгебры Ли $A_{4,8}$ имеет следующий вид:

$$g_{ab} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & s \\ 0 & 0 & -s & 0 \\ 0 & -s & 0 & 0 \\ s & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (6)$$

где s – произвольная ненулевая действительная постоянная.

С другой стороны, после некоторых вычислений получим выражение

$$g^{ac} g^{bd} f_{cd}^e f_{be}^f Q_a Q_f = -\frac{2}{s^2} Q_1^2, \quad (7)$$

где Q_1 – функция Казимира алгебры $A_{4,8}$ [22]; в то же время для динамической системы с алгеброй симметрий Ли $A_{4,8}$ это выражение пропорционально гамильтониану системы. В связи с этим имеем

$$g^{ac} g^{bd} f_{cd}^e \{A, Q_a, Q_b, Q_e\} = -\frac{3\eta}{s^2} \{A, H\} = -\frac{3\eta}{s^2} \frac{\partial A}{\partial t},$$

¹⁾ Отметим, что в последующих примерах все координаты Дарбу удовлетворяют стандартным скобкам Пуассона (4).

где η – значение структуры Намбу группы Ли $\mathbf{A}_{4,9}^0$ и $H = Q_1^2$. Поэтому эволюцию динамической системы можно описать с помощью структуры Намбу следующим образом:

$$\frac{\partial A}{\partial t} = -\frac{s^2}{3\eta} g^{ac} g^{bd} f_{cd}^e \{A, Q_a, Q_b, Q_e\}. \quad (8)$$

Теперь, используя реализацию алгебры Ли $A_{4,8}$ [23] в $\mathbb{R}^4$ вида

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial y_1}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial y_2}, \quad X_3 = y^2 \frac{\partial}{\partial y_1}, \quad X_4 = y^2 \frac{\partial}{\partial y_2},$$

получим следующие выражения²⁾ для Q_i :

$$Q_1 = -p_1 = -y^3, \quad Q_2 = -p_2 = -y^4, \quad Q_3 = -y^2 p_1 = -y^2 y^3, \quad Q_4 = -y^2 p_2 = -y^2 y^4.$$

Они удовлетворяют условию (5) в силу соотношений (4). Соответствующий гамильтониан можно представить следующим образом:

$$H = p_1^2 = (y^3)^2. \quad (9)$$

Таким образом, динамику суперинтегрируемой системы (с инволютивными функциями³⁾, скажем, (H, Q_1, Q_2)) можно описать с помощью структур Намбу⁴⁾:

$$\frac{\partial A}{\partial t} = -\frac{s^2}{3q_4(e^{-2\alpha y^4} - 1)} g^{ac} g^{bd} f_{cd}^e \{A, Q_a, Q_b, Q_e\},$$

где использовалось равенство $\eta = q_4(e^{-2x^4} - 1)$ (см. табл. 1) и координаты Дарбу (3).

• *Группа Ли $\mathbf{A}_{4,2}^{-1}$ в качестве фазового пространства.* Для этой группы Ли симплектическая структура имеет следующий вид [16]:

$$\{x^1, x^2\} = 2\alpha, \quad \{x^1, x^3\} = -\alpha, \quad \{x^2, x^4\} = \beta e^{-x^4},$$

где α и β – произвольные ненулевые действительные числа. Координаты Дарбу для группы $\mathbf{A}_{4,2}^{-1}$ суть [24]

$$y^1 = -\frac{e^{x^4}}{\beta} + x^3, \quad y^2 = -\frac{2\alpha e^{x^4} - \beta x^1 + \alpha \beta x^2}{\alpha \beta^2}, \quad y^3 = \frac{2e^{x^4}}{\beta} + \frac{x^1}{\alpha}, \quad y^4 = e^{x^4},$$

при этом структура Намбу на группе Ли $\mathbf{A}_{4,2}^{-1}$ (см. табл. 1) выражается через координаты y^i , $i = 1, 2, 3, 4$, следующим образом: $\eta = q_4(1/y^4 - 1)$. Поэтому динамику суперинтегрируемой системы можно описать с помощью уравнения (8):

$$\frac{\partial A}{\partial t} = -\frac{s^2}{3q_4(1/y^4 - 1)} g^{ac} g^{bd} f_{cd}^e \{A, Q_a, Q_b, Q_e\}.$$

При этом гамильтониан имеет вид

$$H = (y^3)^2 = \left(\frac{2e^{x^4}}{\beta} + \frac{x^1}{\alpha} \right)^2.$$

²⁾ Отметим, что мы используем квантово-механическую реализацию операторов $p_i = -\partial/\partial y_i$, при этом $p_1 = y^3$, $p_2 = y^4$ для наших стандартных скобок Пуассона (4).

³⁾ В последующих примерах инволютивные функции можно задать одним из следующих наборов: (H, Q_1, Q_2) , (H, Q_1, Q_3) или (H, Q_1, Q_4) .

⁴⁾ Отметим, что все полученные далее системы имеют ту же динамическую эволюцию, что и эволюция, заданная уравнением (8), и тот же гамильтониан (9) (в координатах Дарбу); отличаются только значения η (коэффициентная функция структуры Намбу).

• *Группа Ли $\mathbf{A}_{4,3}$ в качестве фазового пространства.* Невырожденная структура Пуассона на $\mathbf{A}_{4,3}$ имеет вид [16]

$$\{x^1, x^2\} = \alpha x^4 e^{-x^4}, \quad \{x^1, x^3\} = \beta e^{-x^4}, \quad \{x^1, x^4\} = \gamma e^{-x^4}, \quad \{x^2, x^3\} = \lambda,$$

где α, β, γ и λ – произвольные ненулевые действительные числа. Координаты Дарбу для группы $\mathbf{A}_{4,3}$ записываются как [24]

$$y^1 = \frac{\beta x^2}{\lambda} + \frac{\alpha \gamma (x^3)^2}{2\beta \lambda} - \frac{\alpha x^3 x^4}{\lambda}, \quad y^2 = \frac{x^1}{\gamma} - \frac{\beta e^{-x^4} x^2}{\gamma \lambda} - \frac{\alpha e^{-x^4} (x^3)^2}{2\beta \lambda} + \frac{\alpha e^{-x^4} x^3 x^4}{\gamma \lambda},$$

$$y^3 = \frac{x^3}{\beta}, \quad y^4 = e^{x^4},$$

таким образом, структура Намбу на группе Ли $\mathbf{A}_{4,3}$ (см. табл. 1) выражается через координаты y^i , $i = 1, 2, 3, 4$, следующим образом:

$$\eta = q_1 \gamma y^2 + q_1 \frac{y^1}{y^4} + \frac{\alpha q_1 y^3 \ln y^4}{2\lambda y^4} - \frac{q_1 \alpha \beta y^3 \ln y^4}{\lambda y^4} + \frac{q_4}{y^4} - q_4.$$

Динамику суперинтегрируемой системы можно описать, используя уравнение (8) и скобку Намбу:

$$\frac{\partial A}{\partial t} = - \frac{s^2}{3(q_1 \gamma y^2 + q_1 \frac{y^1}{y^4} + \frac{\alpha q_1 y^3 \ln y^4}{2\lambda y^4} - \frac{q_1 \alpha \beta y^3 \ln y^4}{\lambda y^4} + \frac{q_4}{y^4} - q_4)} g^{ac} g^{bd} f_{cd}^e \{A, Q_a, Q_b, Q_e\}$$

с гамильтонианом

$$H = (y^3)^2 = \left(\frac{x^3}{\beta} \right)^2.$$

• *Группа Ли $\mathbf{A}_{4,6}^{a,0}$ в качестве фазового пространства.* Для этой группы Ли невырожденная структура Пуассона имеет вид [16]

$$\{x^1, x^4\} = \gamma e^{-\alpha x^4}, \quad \{x^2, x^3\} = \beta,$$

где α, β и γ – произвольные ненулевые действительные числа. Координаты Дарбу для группы Ли $\mathbf{A}_{4,6}^{a,0}$ суть [24]

$$y^1 = x^3, \quad y^2 = \frac{e^{2\alpha x^4} x^1}{\alpha \gamma}, \quad y^3 = -\frac{x^2}{\beta}, \quad y^4 = e^{-\alpha x^4},$$

поэтому структуру Намбу на группе Ли $\mathbf{A}_{4,6}^{a,0}$ (см. табл. 1) можно выразить через координаты y^i , $i = 1, 2, 3, 4$, как

$$\eta = q_1 \alpha \gamma (y^4)^2 y^2 + q_4 y^4 - q_4,$$

а динамика суперинтегрируемой системы описывается с помощью уравнения (8) следующим образом:

$$\frac{\partial A}{\partial t} = - \frac{s^2}{3(q_1 \alpha \gamma (y^4)^2 y^2 + q_4 y^4 - q_4)} g^{ac} g^{bd} f_{cd}^e \{A, Q_a, Q_b, Q_e\},$$

при этом гамильтониан имеет вид

$$H = (y^3)^2 = \left(\frac{x^2}{\beta} \right)^2.$$

• *Группа Ли $\mathbf{A}_{4,7}$ в качестве фазового пространства.* Невырожденная структура Пуассона на группе $\mathbf{A}_{4,7}$ имеет вид [16]

$$\{x^1, x^3\} = -2\alpha x^3 e^{-2x^4}, \quad \{x^1, x^4\} = \alpha e^{-2x^4}, \quad \{x^2, x^3\} = 2\alpha e^{-2x^4},$$

где α – произвольное ненулевое действительное число. Координаты Дарбу для $\mathbf{A}_{4,7}$ выглядят следующим образом [24]:

$$y^1 = \frac{e^{2x^4} x^2}{2\alpha}, \quad y^2 = -\frac{-1 - e^{2x^4} + e^{4x^4} x^1 + e^{4x^4} x^2 x^3}{2\alpha}, \quad y^3 = x^3, \quad y^4 = e^{-2x^4},$$

следовательно, структуру Намбу на группе Ли $\mathbf{A}_{4,7}$ (см. табл. 1) можно выразить через координаты y^i , $i = 1, 2, 3, 4$, как

$$\eta = q_4((y^4)^2 - 1). \quad (10)$$

Таким образом, динамические уравнения суперинтегрируемой системы можно получить из уравнения (8), мы имеем

$$\frac{\partial A}{\partial t} = -\frac{s^2}{3q_4((y^4)^2 - 1)} g^{ac} g^{bd} f_{cd}^e \{A, Q_a, Q_b, Q_e\}, \quad (11)$$

где гамильтониан имеет вид

$$H = (y^3)^2 = (x^3)^2. \quad (12)$$

• *Группа Ли $\mathbf{A}_{4,9}^1$ в качестве фазового пространства.* Симплектическая структура на группе $\mathbf{A}_{4,9}^1$ выглядит следующим образом [16]:

$$\{x^1, x^3\} = 2\alpha x^3 e^{-2x^4}, \quad \{x^1, x^4\} = -\alpha e^{-2x^4}, \quad \{x^2, x^3\} = -2\alpha e^{-2x^4},$$

где α – произвольное ненулевое действительное число. Координаты Дарбу для группы Ли $\mathbf{A}_{4,9}^1$ имеют вид [24]

$$y^1 = -\frac{e^{2x^4} x^2}{2\alpha}, \quad y^2 = \frac{-1 - e^{2x^4} + e^{4x^4} x^1 + e^{2x^4} x^2 x^3}{2\alpha}, \quad y^3 = x^3, \quad y^4 = e^{-2x^4},$$

таким образом, структуру Намбу на группе Ли $\mathbf{A}_{4,9}^1$ (см. табл. 1) можно выразить через координаты y^i , $i = 1, 2, 3, 4$, как и выше, с помощью формулы (10). При этом динамическое уравнение суперинтегрируемой системы принимает вид (11) с гамильтонианом (12).

• *Группа Ли $\mathbf{A}_{4,12}$ в качестве фазового пространства.* Невырожденная структура Пуассона на группе $\mathbf{A}_{4,12}$ выглядит следующим образом [16]:

$$\begin{aligned} \{x^1, x^3\} &= -\gamma e^{-x^3} (\alpha \cos x^4 + \beta \sin x^4), & \{x^1, x^4\} &= \gamma e^{-x^3} (-\beta \cos x^4 + \alpha \sin x^4), \\ \{x^2, x^3\} &= \gamma e^{-x^3} (-\beta \cos x^4 - \alpha \sin x^4), & \{x^2, x^4\} &= -\gamma e^{-x^3} (\alpha \cos x^4 + \beta \sin x^4), \end{aligned}$$

где α и β – произвольные ненулевые действительные числа, $\gamma = 1/(\alpha^2 + \beta^2)$. Координаты Дарбу на группе $\mathbf{A}_{4,12}$ введем следующим образом [24]:

$$\begin{aligned} y^1 &= e^{2x^3} (\alpha x^1 \cos x^4 - \beta x^2 \cos x^4 + \beta x^1 \sin x^4 + \alpha x^2 \sin x^4), \\ y^2 &= e^{-x^3} (\beta x^1 \cos x^4 + \alpha x^2 \cos x^4 - \alpha x^1 \sin x^4 + \beta x^2 \sin x^4), \\ y^3 &= e^{x^3}, \quad y^4 = x^4, \end{aligned}$$

тогда структура Намбу на группе Ли $\mathbf{A}_{4,12}$ (см. табл. 1) выражается через координаты y^i , $i = 1, 2, 3, 4$, как

$$\eta = q_4 \left(\frac{1}{(y^3)^2} - 1 \right),$$

при этом динамическое уравнение суперинтегрируемой системы получается из уравнения (8) в виде

$$\frac{\partial A}{\partial t} = - \frac{s^2}{3q_4(1/(y^3)^2 - 1)} g^{ac} g^{bd} f_{cd}^e \{A, Q_a, Q_b, Q_e\}$$

с гамильтонианом

$$H = (y^3)^2 = e^{2x^3}.$$

4.2. Суперинтегрируемые системы с группой $\mathbf{A}_{4,10}$ в качестве группы симметрии. Как и в предыдущем пункте, построим некоторые динамические системы с помощью структуры Намбу на некоторых группах Ли, взятых в качестве фазового пространства с группой симметрий $\mathbf{A}_{4,10}$. Найдем ад-инвариантную невырожденную метрику на алгебре Ли $A_{4,10}$:

$$g_{ab} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & m \\ 0 & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m & 0 \\ n & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (13)$$

где m и n – произвольные ненулевые действительные числа. Для этого случая имеем следующие соотношения вместо (7) и (8):

$$g^{ac} g^{bd} f_{cd}^e f_{be}^f Q_a Q_f = \frac{2}{mn} Q_1^2$$

и

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \frac{mn}{3\eta} g^{ac} g^{bd} f_{cd}^e \{A, Q_a, Q_b, Q_e\}.$$

Отсюда, используя представление [23] в $\mathbb{R}^4$ вида

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial y_1}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial y_2}, \quad X_3 = y^1 \frac{\partial}{\partial y_1} + y^2 \frac{\partial}{\partial y_2}, \quad X_4 = y^2 \frac{\partial}{\partial y_1} - y_1 \frac{\partial}{\partial y_2},$$

имеем

$$Q_1 = -y^3, \quad Q_2 = -y^4, \quad Q_3 = -y^1 y^3 - y^2 y^4, \quad Q_4 = -y^2 y^3 + y^1 y^4.$$

При этом гамильтонианы суперинтегрируемых систем с группой симметрий $\mathbf{A}_{4,10}$ задаются теми же формулами, что и в предыдущем пункте, отличие имеется только в динамических уравнениях (8) (т.е. в метриках, обратных к метрикам (6) и (13) в уравнении (8), а также в структурных константах f_{ab}^c алгебр $A_{4,8}$ и $A_{4,10}$).

Таким образом, динамические уравнения для действительных четырехмерных групп Ли, взятых в качестве фазовых пространств, представимы в следующем виде:

- для группы $\mathbf{A}_{4,9}^0$ в качестве фазового пространства.

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \frac{mn}{3q_4(e^{-2\alpha y^4} - 1)} g^{ac} g^{bd} f_{cd}^e \{A, Q_a, Q_b, Q_e\},$$

- для группы $\mathbf{A}_{4,2}^{-1}$ в качестве фазового пространства.

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \frac{mn}{3q_4(1/y^4 - 1)} g^{ac} g^{bd} f_{cd}^e \{A, Q_a, Q_b, Q_e\},$$

- для группы $\mathbf{A}_{4,3}$ в качестве фазового пространства.

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial t} = & \frac{mn}{3(q_1\gamma y^2 + \frac{q_1 y^1}{y^4} + \frac{\alpha q_1 y^3 \ln y^4}{2\lambda y^4} - \frac{q_1 \alpha \beta y^3 \ln y^4}{\lambda y^4} + \frac{q_4}{y^4} - q_4)} \times \\ & \times g^{ac} g^{bd} f_{cd}^e \{A, Q_a, Q_b, Q_e\}, \end{aligned}$$

- для группы $\mathbf{A}_{4,6}^{a,0}$ в качестве фазового пространства.

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \frac{mn}{3(q_1 \alpha \gamma (y^4)^2 y^2 + q_4 y^4 - q_4)} g^{ac} g^{bd} f_{cd}^e \{A, Q_a, Q_b, Q_e\},$$

- для группы $\mathbf{A}_{4,7}$ в качестве фазового пространства.

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \frac{mn}{3q_4((y^4)^2 - 1)} g^{ac} g^{bd} f_{cd}^e \{A, Q_a, Q_b, Q_e\},$$

- для группы $\mathbf{A}_{4,9}^1$ в качестве фазового пространства.

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \frac{mn}{3q_4((y^4)^2 - 1)} g^{ac} g^{bd} f_{cd}^e \{A, Q_a, Q_b, Q_e\},$$

- для группы $\mathbf{A}_{4,12}$ в качестве фазового пространства.

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \frac{mn}{3q_4(1/(y^3)^2 - 1)} g^{ac} g^{bd} f_{cd}^e \{A, Q_a, Q_b, Q_e\}.$$

5. ВЫВОДЫ

Получены все структуры Намбу четвертого и третьего порядков на четырехмерных действительных группах Ли. Получены также новые суперинтегрируемые системы с некоторыми четырехмерными действительными группами Ли в качестве фазовых пространств и группами симметрий $\mathbf{A}_{4,8}$ и $\mathbf{A}_{4,10}$, при этом уравнения, описывающие их динамику, выражаются через соответствующие структуры Намбу четвертого порядка.

ПРИЛОЖЕНИЕ

В табл. 1 приведены структуры Намбу четвертого порядка на четырехмерных действительных группах Ли и соответствующие левоинвариантные векторные поля, а в табл. 2 – соответствующие алгебры Ли с левоинвариантными векторными полями и структуры Намбу третьего порядка на группах Ли. В таблицах использовано обозначение $\partial_i = \partial/\partial x_i$, $i = 1, 2, 3, 4$.

Таблица 1. Структуры Намбу четвертого порядка на четырехмерных действительных группах Ли и соответствующие левоинвариантные векторные поля.

Алгебра Ли	Структурные константы	Левоинвариантные векторные поля	η^{1234}
$4A_1$	$f_{ij}^k = 0$	$X_1 = \partial_1, \quad X_2 = \partial_2,$ $X_3 = \partial_3, \quad X_4 = \partial_4$	$q_1 x^1 + q_2 x^2 + q_3 x^3 + q_4 x^4$
$A_2 \oplus 2A_1$	$f_{12}^1 = 1$	$X_1 = \partial_1 - x^2 \partial_2, \quad X_2 = \partial_2,$ $X_3 = \partial_3, \quad X_4 = \partial_4$	$q_2 x^2 + q_1 (e^{-x^1} - 1)$
$2A_2$	$f_{12}^2 = 1, \quad f_{34}^4 = 1$	$X_1 = \partial_1 - x^2 \partial_2, \quad X_2 = \partial_2,$ $X_3 = \partial_3 - x^4 \partial_4, \quad X_4 = \partial_4$	$q_3 (e^{-(x^1 + x^3)} - 1)$
$A_{3,1} \oplus A_1$	$f_{23}^1 = 1$	$X_1 = \partial_1, \quad X_2 = -x^3 \partial_1 + \partial_2,$ $X_3 = \partial_3, \quad X_4 = \partial_4$	$q_2 x^2 + q_3 x^3 + q_4 x^4$
$A_{3,2} \oplus A_1$	$f_{13}^1 = 1, \quad f_{23}^1 = 1, \quad f_{23}^2 = 1$	$X_1 = e^{-x^3} \partial_1,$ $X_2 = -x^3 e^{-x^3} \partial_1 + e^{-x^3} \partial_2,$ $X_3 = \partial_3, \quad X_4 = \partial_4$	$q_3 (e^{-2x^3} - 1)$
$A_{3,3} \oplus A_1$	$f_{13}^1 = 1, \quad f_{23}^2 = 1$	$X_1 = e^{-x^3} \partial_1, \quad X_2 = e^{-x^3} \partial_2,$ $X_3 = \partial_3, \quad X_4 = \partial_4$	$q_3 (e^{-2x^3} - 1)$
$A_{3,4} \oplus A_1$	$f_{13}^1 = 1, \quad f_{23}^2 = -1$	$X_1 = e^{-x^3} \partial_1, \quad X_2 = e^{x^3} \partial_2,$ $X_3 = \partial_3, \quad X_4 = \partial_4$	$q_3 x^3 + q_4 x^4$
$A_{3,5} \oplus A_1$	$f_{13}^1 = 1, \quad f_{23}^2 = a$	$X_1 = e^{-x^3} \partial_1, \quad X_2 = e^{-ax^3} \partial_2,$ $X_3 = \partial_3, \quad X_4 = \partial_4$	$q_3 (e^{-(a+1)x^3} - 1)$

Таблица 1. Структуры Намбу четвертого порядка на четырехмерных действительных группах Ли и соответствующие левоинвариантные векторные поля (продолжение).

Алгебра Ли	Структурные константы	Левоинвариантные векторные поля	η^{1234}
$A_{3,6} \oplus A_1$	$f_{13}^2 = -1, \quad f_{23}^1 = 1$	$X_1 = \cos x^3 \partial_1 + \sin x^3 \partial_2,$ $X_2 = -\sin x^3 \partial_1 + \cos x^3 \partial_2,$ $X_3 = \partial_3, \quad X_4 = \partial_4$	$q_3 x^3 + q_4 x^4$
$A_{3,7}^a \oplus A_1$	$f_{13}^1 = a, \quad f_{13}^2 = -1,$ $f_{23}^1 = 1, \quad f_{23}^2 = a$	$X_1 = \partial_1, \quad X_2 = \partial_2, \quad X_4 = \partial_4,$ $X_3 = (ax^1 + x^2) \partial_1 + (ax^2 - x^1) \partial_2 + \partial_3$	$q_3(e^{2ax^3} - 1)$
$A_{3,8} \oplus A_1$	$f_{13}^2 = -2, \quad f_{12}^1 = 1, \quad f_{23}^3 = 1$	$X_1 = e^{-x^2} \partial_1 + (2x^3) \partial_2 - (x^3)^2 \partial_3,$ $X_2 = \partial_2 - x^3 \partial_3,$ $X_3 = \partial_3, \quad X_4 = \partial_4$	$q_4 e^{-x^2} x^4$
$A_{3,9} \oplus A_1$	$f_{23}^1 = 1, \quad f_{13}^2 = -1, \quad f_{12}^3 = 1$	$X_1 = \frac{\cos x^3}{\cos x^2} \partial_1 + \sin x^3 \partial_2 - \frac{\cos x^3 \sin x^2}{\cos x^2} \partial_3,$ $X_2 = -\frac{\sin x^3}{\cos x^2} \partial_1 + \cos x^3 \partial_2 + \frac{\sin x^3 \sin x^2}{\cos x^2} \partial_3,$ $X_3 = \partial_3, \quad X_4 = \partial_4$	$\frac{q_4 x^4}{\operatorname{ch} x^2}$
$A_{4,1}$	$f_{24}^1 = 1, \quad f_{34}^2 = 1$	$X_1 = \partial_1, \quad X_2 = -x^4 \partial_1 + \partial_2,$ $X_3 = \frac{(x^4)^2}{2} \partial_1 - x^4 \partial_2 + \partial_3,$ $X_4 = \partial_4$	$q_3 x^3 + q_4 x^4$
$A_{4,2}^a$	$f_{14}^1 = a, \quad f_{24}^2 = 1,$ $f_{34}^2 = 1, \quad f_{34}^3 = 1$	$X_1 = e^{-ax^4} \partial_1, \quad X_2 = e^{-x^4} \partial_2,$ $X_3 = -x^4 e^{-x^4} \partial_2 + e^{-x^4} \partial_3, \quad X_4 = \partial_4$	$q_4(e^{-(a+2)x^4} - 1)$

Таблица 1. Структуры Намбу четвертого порядка на четырехмерных действительных группах Ли и соответствующие левоинвариантные векторные поля (продолжение).

Алгебра Ли	Структурные константы	Левоинвариантные векторные поля	η^{1234}
$A_{4,2}^1$	$f_{14}^1 = 1, \quad f_{24}^2 = 1, \\ f_{34}^3 = 1, \quad f_{34}^4 = 1$	$X_1 = e^{-x^4} \partial_1, \quad X_2 = e^{-x^4} \partial_2, \\ X_3 = -x^4 e^{-x^4} \partial_2 + e^{-x^4} \partial_3, \quad X_4 = \partial_4$	$q_4(e^{-3x^4} - 1)$
$A_{4,3}$	$f_{14}^1 = 1, \quad f_{34}^2 = 1$	$X_1 = e^{-x^4} \partial_1, \quad X_2 = \partial_2, \\ X_3 = x^4 \partial_2 + \partial_3, \quad X_4 = \partial_4$	$q_1 x^1 + q_4(e^{-x^4} - 1)$
$A_{4,4}$	$f_{14}^1 = 1, \quad f_{34}^2 = 1, \\ f_{24}^1 = 1, \quad f_{24}^2 = 1, \\ f_{34}^3 = 1$	$X_1 = e^{-x^4} \partial_1, \\ X_2 = -x^4 e^{-x^4} \partial_1 + e^{-x^4} \partial_2, \\ X_3 = \frac{(x^4)^2}{2} e^{-x^4} \partial_1 - x^4 e^{-x^4} \partial_2 + e^{-x^4} \partial_3, \\ X_4 = \partial_4$	$q_4(e^{-3x^4} - 1)$
$A_{4,5}^{a,b}$	$f_{14}^1 = 1, \quad f_{24}^2 = a, \\ f_{34}^3 = b$	$X_1 = e^{-x^4} \partial_1, \quad X_2 = e^{-ax^4} \partial_2, \\ X_3 = e^{-bx^4} \partial_3, \quad X_4 = \partial_4$	$(q_1 x^1 e^{x^4} + q_3 x^3 e^{bx^4}) e^{-(a+b+1)x^4} + \\ + q_4(e^{-(a+b+1)x^4} - 1)$
$A_{4,5}^{a,a}$	$f_{14}^1 = 1, \quad f_{24}^2 = a, \\ f_{34}^3 = a$	$X_1 = e^{-x^4} \partial_1, \quad X_2 = e^{-ax^4} \partial_2, \\ X_3 = e^{-ax^4} \partial_3, \quad X_4 = \partial_4$	$q_4(1 - e^{-(2a+1)x^4})$
$A_{4,5}^{a,1}$	$f_{34}^3 = 1, \quad f_{14}^1 = 1, \\ f_{24}^2 = a$	$X_1 = e^{-x^4} \partial_1, \quad X_2 = e^{-ax^4} \partial_2, \\ X_3 = e^{-x^4} \partial_3, \quad X_4 = \partial_4$	$q_1 x^1 + q_3 x^3 + q_4(e^{-(a+2)x^4} - 1)$
$A_{4,5}^{1,1}$	$f_{14}^1 = 1, \quad f_{34}^3 = 1, \\ f_{24}^2 = 1$	$X_1 = e^{-x^4} \partial_1, \quad X_2 = e^{-x^4} \partial_2, \\ X_3 = e^{-x^4} \partial_3, \quad X_4 = \partial_4$	$q_4(e^{-3x^4} - 1)$

Таблица 1. Структуры Намбу четвертого порядка на четырехмерных действительных группах Ли и соответствующие левоинвариантные векторные поля (продолжение).

Алгебра Ли	Структурные константы	Левоинвариантные векторные поля	η^{1234}
$A_{4,2}^1$	$f_{14}^1 = 1, f_{24}^2 = 1,$ $f_{34}^2 = 1, f_{34}^3 = 1$	$X_1 = e^{-x^4} \partial_1, X_2 = e^{-x^4} \partial_2,$ $X_3 = -x^4 e^{-x^4} \partial_2 + e^{-x^4} \partial_3, X_4 = \partial_4$	$q_4(e^{-3x^4} - 1)$
$A_{4,7}$	$f_{14}^1 = 2, f_{24}^2 = 1,$ $f_{23}^1 = 1, f_{34}^3 = 1,$ $f_{34}^2 = 1,$	$X_1 = e^{-2x^4} \partial_1,$ $X_2 = x^3 e^{-x^4} \partial_1 + e^{-x^4} \partial_2,$ $X_3 = -x^3 x^4 e^{-x^4} \partial_1 - x^4 e^{-x^4} \partial_2 + e^{-x^4} \partial_3,$ $X_4 = \partial_4$	$q_4(e^{-4x^4} - 1)$
$A_{4,8}$	$f_{23}^1 = 1, f_{24}^2 = 1,$ $f_{34}^3 = -1$	$X_1 = \partial_1,$ $X_2 = -x^3 e^{-x^4} \partial_1 + e^{-x^4} \partial_1,$ $X_3 = x^4 e^{x^4} \partial_3, X_4 = \partial_4$	$q_4 x^4$
$A_{4,9}^b$	$f_{23}^1 = 1, f_{24}^2 = 1,$ $f_{14}^1 = 1 + b,$ $f_{34}^3 = b$	$X_1 = e^{-(b+1)x^4} \partial_1,$ $X_2 = -x^3 e^{-x^4} \partial_1 + e^{-x^4} \partial_2,$ $X_3 = e^{-bx^4} \partial_3, X_4 = \partial_4$	$q_2 x^2 + q_4(e^{-2(b+1)x^4} - 1)$
$A_{4,9}^1$	$f_{23}^1 = 1, f_{24}^2 = 1,$ $f_{14}^1 = 2, f_{34}^3 = 1$	$X_1 = e^{-2x^4} \partial_1,$ $X_2 = -x^3 e^{-x^4} \partial_1 + e^{-x^4} \partial_2,$ $X_3 = e^{-x^4} \partial_3, X_4 = \partial_4$	$q_4(e^{-4x^4} - 1)$
$A_{4,9}^0$	$f_{14}^1 = 1, f_{23}^1 = 1,$ $f_{24}^2 = 1$	$X_1 = e^{-x^4} \partial_1,$ $X_2 = -x^3 e^{-x^4} \partial_1 + e^{-x^4} \partial_2,$ $X_3 = \partial_3, X_4 = \partial_4$	$q_4(e^{-2x^4} - 1)$

Таблица 1. Структуры Намбу четвертого порядка на четырехмерных действительных группах Ли и соответствующие левоинвариантные векторные поля (окончание).

Алгебра Ли	Структурные константы	Левоинвариантные векторные поля	η^{ijk}
$A_{4,10}$	$f_{23}^1 = 1, \quad f_{24}^3 = -1, \\ f_{34}^2 = 1$	$X_1 = \partial_1, \\ X_2 = -x^3 \cos x^4 \partial_1 + \cos x^4 \partial_2 + \sin x^4 \partial_3, \\ X_3 = x^3 \sin x^4 \partial_1 - \sin x^4 \partial_2 + \cos x^4 \partial_3, \\ X_4 = \partial_4$	$q_4 x^4$
$A_{4,11}^a$	$f_{23}^1 = 1, \quad f_{24}^2 = a, \\ f_{14}^1 = 2a, \\ f_{24}^3 = -1, \quad f_{34}^2 = 1, \\ f_{34}^3 = a$	$X_1 = e^{-2ax^4} \partial_1, \\ X_2 = -x^3 e^{-ax^4} \cos x^4 \partial_1 + e^{-ax^4} \cos x^4 \partial_2 + e^{-ax^4} \sin x^4 \partial_3, \\ X_3 = e^{-ax^4} x^3 \sin x^4 \partial_1 - e^{-ax^4} \sin x^4 \partial_2 + e^{-ax^4} \cos x^4 \partial_3, \\ X_4 = \partial_4$	$q_4(e^{-4ax^4} - 1)$
$A_{4,12}$	$f_{13}^1 = 1, \quad f_{23}^2 = 1, \\ f_{14}^2 = -1, \quad f_{24}^1 = 1,$	$X_1 = e^{-x^3} \cos x^4 \partial_1 + e^{-x^3} \sin x^4 \partial_2, \\ X_2 = -e^{-x^3} \sin x^4 \partial_1 + e^{-x^3} \cos x^4 \partial_2, \\ X_3 = \partial_3, \quad X_4 = \partial_4$	$q_3(e^{-2x^3} - 1)$

Таблица 2. Соответствующие алгебры Ли с левонинвариантными векторными полями и структуры Намбу третьего порядка на группах Ли.

Подалгебра Ли	Базис подалгебры Ли	Левонинвариантные векторные поля	η^{ijk}
$3A_1 \subset 4A_1$	$X_1 + aX_4,$ $X_2 + bX_4,$ $X_3 + cX_4$	$X_1 + aX_4 = \partial_1 + a\partial_4,$ $X_2 + bX_4 = \partial_2 + b\partial_4,$ $X_3 + cX_4 = \partial_3 + c\partial_4$	$\eta^{123} = q_1x^1 + q_2x^2 + q_3x^3,$ $\eta^{124} = c(q_1x^1 + q_2x^2 + q_3x^3),$ $\eta^{143} = b(q_1x^1 + q_2x^2 + q_3x^3),$ $\eta^{423} = a(q_1x^1 + q_2x^2 + q_3x^3)$
	$X_1 + aX_2,$ X_3, X_4	$X_1 + aX_4 = \partial_1 + a\partial_4,$ $X_3 = \partial_3, \quad X_4 = \partial_4$	$\eta^{134} = q_1x^1 + q_2x^3 + q_3x^4,$ $\eta^{234} = a(q_1x^1 + q_2x^3 + q_3x^4)$
	X_2, X_3, X_4	$X_2 = \partial_2, \quad X_3 = \partial_3, \quad X_4 = \partial_4$	$\eta^{234} = q_1x^2 + q_2x^3 + q_3x^4$
	$X_1 + aX_3,$ $X_2 + bX_3,$ X_4	$X_1 + aX_3 = \partial_1 + a\partial_3,$ $X_2 + bX_3 = \partial_2 + b\partial_3,$ $X_4 = \partial_4$	$\eta^{124} = q_1x^1 + q_2x^2 + q_3x^4,$ $\eta^{134} = a(q_1x^1 + q_2x^2 + q_3x^4)$
$3A_1 \subset A_2 \oplus 2A_1$	X_1, X_3, X_4	$X_1 = \partial_1, \quad X_3 = \partial_3, \quad X_4 = \partial_4$	$\eta^{134} = q_1x^1 + q_2x^3 + q_3x^4$
	X_2, X_3, X_4	$X_2 = \partial_2, \quad X_3 = \partial_3, \quad X_4 = \partial_4$	$\eta^{234} = q_1x^2 + q_2x^3 + q_3x^4$
$A_2 \oplus A_1 \subset A_2 \oplus 2A_1$	$X_1 + a(X_3 \cos \phi + X_4 \sin \phi),$	$X_1 + a(X_3 \cos \phi + X_4 \sin \phi) =$ $= \partial_1 + a \cos \phi \partial_3 + a \sin \phi \partial_4,$	$\eta^{132} =$ $= (q_3x^2 + q_1(e^{-x^1} - 1)) \sin \phi,$
	$X_3 \sin \phi - X_4 \cos \phi,$ X_2	$X_3 \sin \phi - X_4 \cos \phi =$ $= \sin \phi \partial_3 - \cos \phi \partial_4,$ $X_2 = \partial_2$	$\eta^{124} =$ $= (q_3x^2 + q_1(e^{-x^1} - 1)) \cos \phi,$ $\eta^{432} = a(q_3x^2 + q_1(e^{-x^1} - 1))$

Таблица 2. Соответствующие алгебры Ли с левоинвариантными векторными полями и структуры Намбу третьего порядка на группах Ли (продолжение).

Подалгебра Ли	Базис подалгебры Ли	Левоинвариантные векторные поля	η^{ijk}
$A_1 \oplus A_2 \subset 2A_2$	X_1, X_3, X_2	$X_1 = \partial_1 - x^2\partial_2, \quad X_3 = \partial_3, \quad X_2 = \partial_2$	$\eta^{132} = q_3x^2 + q_1(e^{-x^1} - 1)$
	X_1, X_4, X_2	$X_1 = \partial_1 - x^2\partial_2, \quad X_4 = \partial_4, \quad X_2 = \partial_2$	$\eta^{142} = q_3x^2 + q_1(e^{-x^1} - 1)$
	X_1, X_3, X_4	$X_1 = \partial_1, \quad X_3 = \partial_3 - x^4\partial_4, \quad X_4 = \partial_4$	$\eta^{134} = q_3x^4 + q_2(e^{-x^3} - 1)$
	X_2, X_3, X_4	$X_2 = \partial_2, \quad X_3 = \partial_3 - x^4\partial_4, \quad X_4 = \partial_4$	$\eta^{234} = q_3x^4 + q_2(e^{-x^3} - 1)$
$A_{3,3} \subset 2A_2$	$X_1 + X_3, \quad X_2, X_4$	$X_1 + X_3 = \partial_1 - x^2\partial_2 - x^4\partial_4, \quad X_2 = \partial_2, \quad X_4 = \partial_4$	$\eta^{124} = q_1e^{-2x^1}$
$A_{3,4} \subset 2A_2$	$X_1 - X_3, \quad X_2, X_4$	$X_1 - X_3 = \partial_1 - \partial_3 - x^2\partial_2 + x^4\partial_4, \quad X_2 = \partial_2, \quad X_4 = \partial_4$	$\eta^{124} = q_1(x^1 - x^3)/2$ $\eta^{324} = -q_1(x^1 - x^3)/2$
	$X_1 + \tilde{a}X_3, \quad X_2, X_4$	$X_1 + \tilde{a}X_3 = \partial_1 + \tilde{a}\partial_3 - x^2\partial_2 - \tilde{a}x^4\partial_4, \quad X_2 = \partial_2, \quad X_4 = \partial_4$	$\eta^{124} = q_1(e^{-(\tilde{a}+1)} - 1)$ $\eta^{324} = -\tilde{a}q_1(e^{-(\tilde{a}+1)} - 1)$
$a = \begin{cases} \tilde{a}, & 0 < \tilde{a} < 1, \\ 1/\tilde{a}, & 1 < \tilde{a} < \infty \end{cases}$	$X_1, \quad X_2 \cos \phi + X_3 \sin \phi, \quad X_4$	$X_1 = \partial_1, \quad X_2 \cos \phi + X_3 \sin \phi = \cos \phi \partial_2 + \sin \phi \partial_3, \quad X_4 = \partial_4$	$\eta^{124} = (q_1x^1 + q_2((x^3)^2 + (x^2)^2)^{1/2} + q_3x^4) \cos \phi,$ $\eta^{134} = q_1x^1 + q_2((x^3)^2) + (x^2)^2)^{1/2} + q_3x^4) \sin \phi$

Таблица 2. Соответствующие алгебры Ли с левоинвариантными векторными полями и структуры Намбу третьего порядка на группах Ли (продолжение).

Подалгебра Ли	Базис подалгебры Ли	Левоинвариантные векторные поля	η^{ijk}
$A_{3,1} \subset A_{3,1} \oplus A_1$	$X_2 + aX_4,$ $X_3 + bX_4, X_1$	$X_2 + aX_4 = \partial_2 + a\partial_4 - x^3\partial_1,$ $X_3 + bX_4 = \partial_3 + b\partial_4, \quad X_1 = \partial_1$	$\eta^{231} = q_1x^2 + q_2x^3,$ $\eta^{231} = b(q_1x^2 + q_2x^3),$ $\eta^{431} = b(q_1x^2 + q_2x^3)$
$3A_1 \subset A_{3,2} \oplus A_1$	X_1, X_2, X_4	$X_1 = \partial_1, \quad X_2 = \partial_2, \quad X_4 = \partial_4$	$\eta^{124} = q_1x^1 + q_2x^2 + q_3x^4$
$A_2 \oplus A_1 \subset A_{3,2} \oplus A_1$	X_3, X_4, X_1	$X_3 = \partial_3 + x^1\partial_1, \quad X_4 = \partial_4, \quad X_1 = \partial_1$	$\eta^{134} = q_3x^1 + q_1(e^{x^3} - 1)$
$A_{3,2} \subset A_{3,2} \oplus A_1$	$X_3 + aX_4,$ X_1, X_2	$X_3 + aX_4 = \partial_3 + x^4\partial_4 +$ $+ (x^1 + x^2)\partial_1 + x^2\partial_1,$ $X_1 = \partial_1, \quad X_2 = \partial_2$	$\eta^{123} = q_1(e^{x^3} + x^4/a - 1),$ $\eta^{124} = aq_1(e^{x^3} + x^4/a - 1)$
$3A_1 \subset A_{3,3} \oplus A_1$	X_1, X_2, X_4	$X_1 = \partial_1, \quad X_2 = \partial_2, \quad X_4 = \partial_4$	$\eta^{124} = q_1x^1 + q_2x^2 + q_3x^4$
$A_2 \oplus A_1 \subset A_{3,3} \oplus A_1$	$X_3,$ $X_4,$ $X_1 \cos \phi + X_2 \sin \phi$	$X_3 = \partial_3 + ((x^1)^2 + (x^2)^2)^{1/2} \times$ $\times (\cos \phi \partial_1 + \sin \phi \partial_2),$ $X_4 = \partial_4,$ $X_1 \cos \phi + X_2 \sin \phi = \cos \phi \partial_1 + \sin \phi \partial_2$	$\eta^{134} = (q_3((x^1)^2 + (x^2)^2)^{1/2} +$ $+ q_1(e^{x^3} - 1)) \cos \phi,$ $\eta^{234} = (q_3((x^1)^2 + (x^2)^2)^{1/2} +$ $+ q_1(e^{x^3} - 1)) \sin \phi$
$A_{3,3} \subset A_{3,3} \oplus A_1$	$X_3 + aX_4,$ X_1, X_2	$X_3 + aX_4 = \partial_3 + a\partial_4 + x^1\partial_1 + x^2\partial_2,$ $X_1 = \partial_1, \quad X_2 = \partial_2$	$\eta^{123} = q_3(e^{x^3} + x^4/a - 1),$ $\eta^{124} = q_3(e^{x^3} + x^4/a - 1)$
$3A_1 \subset A_{3,4} \oplus A_1$	X_1, X_2, X_4	$X_1 = \partial_1, \quad X_2 = \partial_2, \quad X_4 = \partial_4$	$\eta^{124} = q_1x^1 + q_2x^2 + q_3x^4$

ТАБЛИЦА 2. Соответствующие алгебры Ли с левинвариантными векторными полями и структуры Намбу третьего порядка на группах Ли (продолжение).

Подалгебра Ли	Базис подалгебры Ли	Левинвариантные векторные поля	η^{ijk}
$A_2 \oplus A_1 \subset A_{3,4} \oplus A_1$	X_3, X_4, X_1	$X_3 = \partial_3 + x^1 \partial_1, \quad X_4 = \partial_4, \quad X_1 = \partial_1$	$\eta^{134} = q_3 x^1 + q_1 (e^{x^3} - 1)$
$A_{3,4} \subset A_{3,4} \oplus A_1$	X_3, X_4, X_2	$X_3 = \partial_3 - x^2 \partial_2, \quad X_4 = \partial_4, \quad X_2 = \partial_2$	$\eta^{234} = q_3 x^2 + q_1 (e^{-x^3} - 1)$
$A_{3,4} \subset A_{3,4} \oplus A_1$	$X_3 + aX_4, X_1, X_2$	$X_3 + aX_4 = \partial_3 + a\partial_4 + x^1 \partial_1 - x^2 \partial_2, X_1 = \partial_1, \quad X_2 = \partial_2$	$\eta^{123} = q_1 (x^3 + x^4/a)/2,$ $\eta^{124} = aq_1 (x^3 + x^4/a)/2,$
$3A_1 \subset A_{3,5}^a \oplus A_1$	X_1, X_2, X_4	$X_1 = \partial_1, \quad X_2 = \partial_2, \quad X_4 = \partial_4$	$\eta^{124} = q_1 x^1 + q_2 x^2 + q_3 x^4$
$A_2 \oplus A_1 \subset A_{3,5}^a \oplus A_1$	X_3, X_4, X_1	$X_3 = \partial_3 + x^1 \partial_1, \quad X_4 = \partial_4, \quad X_1 = \partial_1$	$\eta^{134} = q_3 x^1 + q_1 (e^{x^3} - 1)$
	X_3, X_4, X_2	$X_1 = \partial_3 + (ax^2) \partial_2, \quad X_4 = \partial_4, \quad X_2 = \partial_2$	$\eta^{234} = q_3 x^2 + q_1 (e^{ax^3} - 1)$
$A_{3,5}^a$	$X_3 + \tilde{a}X_4, X_1, X_2$	$X_3 + \tilde{a}X_4 = \partial_3 + a\partial_4 + x^1 \partial_1 + ax^2 \partial_2, X_1 = \partial_1, \quad X_2 = \partial_2$	$\eta^{123} = q_1 (e^{(a+1)(x^3+x^4/a)/2} - 1),$ $\eta^{124} = aq_1 (e^{(a+1)(x^3+x^4/a)/2} - 1)$
$3A_1 \subset A_{3,6} \oplus A_1$	X_1, X_2, X_4	$X_1 = \partial_1, \quad X_2 = \partial_2, \quad X_4 = \partial_4$	$\eta^{124} = q_1 x^1 + q_2 x^2 + q_3 x^4$
$A_{3,6} \subset A_{3,6} \oplus A_1$	$X_3 + aX_4, X_1, X_2$	$X_3 + aX_4 = \partial_3 + a\partial_4 + x^2 \partial_1 - x^1 \partial_2, X_1 = \partial_1, \quad X_2 = \partial_2$	$\eta^{123} = q_1 (x^3 + x^4/a)/2,$ $\eta^{124} = q_1 (x^3 + x^4/a)/2$
$3A_1 \subset A_{3,7}^a \oplus A_1$	X_1, X_2, X_4	$X_1 = \partial_1, \quad X_2 = \partial_2, \quad X_4 = \partial_4$	$\eta^{124} = q_1 x^1 + q_2 x^2 + q_3 x^4$
$A_{3,7}^a \subset A_{3,7}^a \oplus A_1$	$X_3 + \tilde{a}X_4, X_1, X_2$	$X_3 + \tilde{a}X_4 = \partial_3 + a\partial_4 + X_3 + \tilde{a}X_4 = \partial_3 + a\partial_4 + (x^2 - x^1) \partial_2, X_1 = \partial_1, \quad X_2 = \partial_2$	$\eta^{123} = q_1 (e^{x^4+ax^3} - 1),$ $\eta^{124} = q_1 (e^{x^4+ax^3} - 1)$

Таблица 2. Соответствующие алгебры Ли с левоинвариантными векторными полями и структуры Намбу третьего порядка на группах Ли (продолжение).

Подалгебра Ли	Базис подалгебры Ли	Левоинвариантные векторные поля	η^{ijk}
$A_2 \oplus A_1 \subset A_{3,8} \oplus A_1$	X_2, X_4, X_1	$X_2 = \partial_2 + x^1 \partial_1, \quad X_4 = \partial_4, \quad X_1 = \partial_1$	$\eta^{124} = q_3 x^1 + q_1 (e^{x^2} - 1)$
$A_{3,8} \subset A_{3,8} \oplus A_1$	$X_3 + \tilde{a} X_4,$ X_1, X_2	$X_1 = e^{-x^2} \partial_1 + 2x^3 \partial_2 - (x^3)^2 \partial_3,$ $X_2 = \partial_2 - x^3 \partial_3, \quad X_3 = \partial_3$	$\eta^{123} = 0$
$A_{3,8} \subset A_{3,9} \oplus A_1$	X_1, X_2, X_3	$X_1 = \frac{\cos x^3}{\cos x^2} \partial_1 + \sin x^3 \partial_2 + \frac{\cos x^3 \sin x^2}{\cos x^2} \partial_3,$ $X_2 = -\frac{\sin x^3}{\cos x^2} \partial_1 + \cos x^3 \partial_2 + \frac{\sin x^3 \sin x^2}{\cos x^2} \partial_3,$ $X_3 = \partial_3$	$\eta^{123} = 0$
$3A_1 \subset A_{4,1}$	X_1, X_2, X_3	$X_1 = \partial_1, \quad X_2 = \partial_2, \quad X_3 = \partial_3$	$\eta^{123} = q_1 x^1 + q_2 x^2 + q_3 x^3$
$A_{3,1} \subset A_{4,1}$	$X_4 + a X_3,$ X_2, X_1	$X_4 + a X_3 = \partial_4 + a \partial_3 + x^2 \partial_1,$ $X_2 = \partial_2, \quad X_1 = \partial_1$	$\eta^{421} = q_1 (x^3/a + x^4) + q_2 x^2),$ $\eta^{321} = a(q_1(x^3/a + x^4) + q_2 x^2))$
$3A_1 \subset A_{4,2}^a$	X_1, X_2, X_3	$X_1 = \partial_1, \quad X_2 = \partial_2, \quad X_3 = \partial_3$	$\eta^{123} = q_1 x^1 + q_2 x^2 + q_3 x^3$
$A_{3,2} \subset A_{4,2}^a$	$X_4,$ X_2, X_3	$X_4 = \partial_4 + (x^3 + x^2) \partial_2 +$ $+ x^3 (\partial_3 + a \partial_1),$ $X_2 = \partial_2, \quad X_3 = \partial_3 + a \partial_1$	$\eta^{234} = q_1 (e^{2x^4} - 1)$
$A_{3,4} \subset A_{4,2}^a$	$X_4,$ X_1, X_2	$X_4 = \partial_4 + a x^1 \partial_1 + x^2 \partial_2,$ $X_1 = \partial_1, \quad X_2 = \partial_2$	$\eta^{124} = q_1 x^4$

Таблица 2. Соответствующие алгебры Ли с левоинвариантными векторными полями и структуры Намбу третьего порядка на группах Ли (продолжение).

Подалгебра Ли	Базис подалгебры Ли	Левоинвариантные векторные поля	η^{ijk}
$A_{3,5}^\nu \subset A_{4,2}^a$, $\nu = \begin{cases} a, & a < 1, \\ 1/a & a > 1 \end{cases}$	X_4 , X_1, X_2	$X_4 = \partial_1 - x^1 \partial_1 + x^2 \partial_2$, $X_1 = \partial_1, \quad X_2 = \partial_2$	$\eta^{124} = q_1(e^{(a+1)x} - 1)$
$3A_1 \subset A_{4,2}^1$	X_1, X_2, X_3	$X_1 = \partial_1, \quad X_2 = \partial_2, \quad X_3 = \partial_3$	$\eta^{123} = q_1 x^1 + q_2 x^2 + q_3 x^3$
$A_{3,2} \subset A_{4,2}^1$	X_4 , $X_2, X_3 + aX_1$	$X_4 = \partial_4 + (x^2 + x^3) \partial_2 + x^3 \partial_3$, $X_2 = \partial_2, \quad X_3 + aX_1 = \partial_3 + a \partial_1$	$\eta^{234} = q_1(e^{2x^4} - 1)$, $\eta^{124} = -a q_1(e^{2x^4} - 1)$
$A_{3,3} \subset A_{4,2}^1$	X_4 , X_1, X_2	$X_4 = \partial_4 + x^1 \partial_1 + x^2 \partial_2$, $X_1 = \partial_1, \quad X_2 = \partial_2$	$\eta^{124} = q_1(e^{2x^4} - 1)$
$3A_1 \subset A_{4,3}$	X_1, X_2, X_3	$X_1 = \partial_1, \quad X_2 = \partial_2, \quad X_3 = \partial_3$	$\eta^{123} = q_1 x^1 + q_2 x^2 + q_3 x^3$
$A_2 \oplus A_1 \subset A_{4,3}$	$X_4 + aX_3$, X_2, X_1	$X_4 + aX_3 = \partial_4 + a \partial_3 + x^1 \partial_1$, $X_2 = \partial_2, \quad X_1 = \partial_1$	$\eta^{123} = a(q_3 x^1 +$ $+ q_1(e^{(x^4 + x^3/a)/2} - 1))$, $\eta^{124} = q_3 x^1 +$ $+ q_1(e^{(x^4 + x^3/a)/2} - 1)$
$A_{3,1} \subset A_{4,3}$	X_3, X_4, X_2	$X_3 = \partial_3 - x^4 \partial_2, \quad X_4 = \partial_4, \quad X_2 = \partial_2$	$\eta^{234} = q_1 x^3 + q_2 x^4$
$3A_1 \subset A_{4,4}$	X_1, X_2, X_3	$X_1 = \partial_1, \quad X_2 = \partial_2, \quad X_3 = \partial_3$	$\eta^{123} = q_1 x^1 + q_2 x^2 + q_3 x^3$
$A_{3,2} \subset A_{4,4}$	X_4 , X_1, X_2	$X_4 = \partial_4 + (x^1 + x^2) \partial_1 + x^2 \partial_2$, $X_1 = \partial_1, \quad X_2 = \partial_2$	$\eta^{124} = q_1(e^{2x^4} - 1)$

ТАБЛИЦА 2. Соответствующие алгебры Ли с левоинвариантными векторными полями и структуры Намбу третьего порядка на группах Ли (продолжение).

Подалгебра Ли	Базис подалгебры Ли	Левоинвариантные векторные поля	η^{ijk}
$A_{3,5}^a \subset A_{4,5}^{a,b}$	$X_4,$ X_1, X_2	$X_4 = \partial_4 + x^1 \partial_1 + (ax^2) \partial_2,$ $X_1 = \partial_1, \quad X_2 = \partial_2$	$\eta^{124} = q_1(e^{(a+1)x^4} - 1)$
$A_{3,5}^b \subset A_{4,5}^{a,b}$	$X_4,$ X_1, X_3	$X_4 = \partial_4 + x^1 \partial_2 + (bx^3) \partial_3,$ $X_1 = \partial_1, \quad X_3 = \partial_3$	$\eta^{134} = q_1(e^{(b+1)x^4} - 1)$
$A_{3,5}^{\nu} \subset A_{4,5}^{a,b}$ $\nu = \begin{cases} a/b, & a/b < 1, \\ b/a, & a/b > 1 \end{cases}$	$X_4,$ X_2, X_3	$X_4 = \partial_4 + (bx^2) \partial_2 + (bx^3) \partial_3,$ $X_2 = \partial_2, \quad X_3 = \partial_3$	$\eta^{234} = q_1(e^{(a+b)x^4} - 1)$
$3A_1 \subset A_{4,5}^{a,a}$	X_1, X_2, X_3	$X_1 = \partial_1, \quad X_2 = \partial_2, \quad X_3 = \partial_3$	$\eta^{123} = q_1x^1 + q_2x^2 + q_3x^3$
$A_{3,3} \subset A_{4,5}^{a,a}$	$X_4,$ X_2, X_3	$X_4 = \partial_4 + (ax^2) \partial_2 + (ax^3) \partial_3,$ $X_2 = \partial_2, \quad X_3 = \partial_3$	$\eta^{234} = q_1(e^{2ax^1} - 1)$
$A_{3,5}^a \subset A_{4,5}^{a,a}$	$X_4,$ $X_1,$ $X_2 \cos \phi + X_3 \sin \phi$	$X_4 = \partial_4 + x^1 \partial_1 +$ $+ a((x^2)^2 + (x^3)^2)^{1/2} (\cos \phi \partial_2 + \sin \phi \partial_3),$ $X_1 = \partial_1,$ $X_2 \cos \phi + X_3 \sin \phi = \cos \phi \partial_2 + \sin \phi \partial_3$	$\eta^{124} = q_1(e^{(a+1)x^4} - 1) \cos \phi,$ $\eta^{134} = q_1(e^{(a+1)x^4} - 1) \cos \phi$
$3A_1 \subset A_{4,5}^{a,1}$	X_1, X_2, X_3	$X_1 = \partial_1, \quad X_2 = \partial_2, \quad X_3 = \partial_3$	$\eta^{123} = q_1x^1 + q_2x^2 + q_3x^3$

ТАБЛИЦА 2. Соответствующие алгебры Ли с левоинвариантными векторными полями и структуры Намбу третьего порядка на группах Ли (продолжение).

Подалгебра Ли	Базис подалгебры Ли	Левоинвариантные векторные поля	η^{ijk}
$A_{3,3} \subset A_{4,5}^{a,1}$	$X_4,$ X_1, X_3	$X_4 = \partial_4 + x^1 \partial_1 + x^3 \partial_3,$ $X_1 = \partial_1, \quad X_3 = \partial_3$	$\eta^{134} = q_1(e^{2x^1} - 1)$
$A_{3,5}^a \subset A_{4,5}^{a,1}$	$X_4,$ $X_1 \cos \phi + X_3 \sin \phi,$ X_2	$X_4 = \partial_4 + ((x^1)^2 + (x^3)^2)^{1/2} \times$ $\times (\cos \phi \partial_1 + \sin \phi \partial_3) + ax^2 \partial_2,$ $X_1 \cos \phi + X_3 \sin \phi = \cos \phi \partial_1 + \sin \phi \partial_3,$ $X_2 = \partial_2$	$\eta^{124} = q_1(e^{(a+1)x^4} - 1) \cos \phi,$ $\eta^{432} = q_1(e^{(a+1)x^4} - 1) \sin \phi$
$3A_1 \subset A_{4,5}^{1,1}$	X_1, X_2, X_3	$X_1 = \partial_1, \quad X_2 = \partial_2, \quad X_3 = \partial_3$	$\eta^{123} = q_1 x^1 + q_2 x^2 + q_3 x^3$
$A_{3,3} \subset A_{4,5}^{1,1}$	$X_4,$ $X_1 + aX_3,$ $X_2 + bX_3$	$X_4 = \partial_4 + x^1(\partial_1 + a\partial_3) + x^2(\partial_2 + b\partial_3),$ $X_1 + aX_3 = \partial_1 + a\partial_3,$ $X_2 + bX_3 = \partial_2 + b\partial_3$	$\eta^{124} = q_1(e^{2x^4} - 1),$ $\eta^{134} = bq_1(e^{2x^4} - 1),$ $\eta^{432} = aq_1(e^{2x^4} - 1)$
	$X_4,$ $X_1 + aX_2, X_3$	$X_4 = \partial_4 + x^2(\partial_1 + a\partial_2) + x^3\partial_3,$ $X_1 + aX_2 = \partial_1 + a\partial_2, \quad X_3 = \partial_3$	$\eta^{134} = q_1(e^{2x^4} - 1),$ $\eta^{234} = aq_1(e^{2x^4} - 1)$
	X_4, X_2, X_3	$X_4 = \partial_4 + x^2\partial_2 + x^3\partial_3, \quad X_2 = \partial_2, \quad X_3 = \partial_3$	$\eta^{234} = aq_1(e^{2x^4} - 1)$
	X_1, X_2, X_3	$X_1 = \partial_1, \quad X_2 = \partial_2, \quad X_3 = \partial_3$	$\eta^{123} = q_1 x^1 + q_2 x^2 + q_3 x^3$
$A_{3,7}^b \subset A_{4,6}^{a,b}$	$X_4,$ X_2, X_3	$X_4 = \partial_4 + (bx^2 + x^3)\partial_2 + (bx^3 - x^2)\partial_3,$ $X_2 = \partial_2, \quad X_3 = \partial_3$	$\eta^{234} = q_1(e^{2bx^4} - 1)$
$A_{3,1} \subset A_{4,7}$	X_2, X_3, X_1	$X_2 = \partial_2 - x^3\partial_1, \quad X_3 = \partial_3, \quad X_1 = \partial_1$	$\eta^{123} = q_1 x^2 + q_2 x^3$

Таблица 2. Соответствующие алгебры Ли с левоинвариантными векторными полями и структуры Намбу третьего порядка на группах Ли (продолжение).

Подалгебра Ли	Базис подалгебры Ли	Левоинвариантные векторные поля	η^{ijk}
$A_{3,5}^{1/2} \subset A_{4,7}$	$X_4,$ X_1, X_2	$X_4 = \partial_4 + 2x^1\partial_1 + x^2\partial_2,$ $X_1 = \partial_1, \quad X_2 = \partial_2$	$\eta^{124} = q_1(e^{3x^4} - 1)$
$A_{3,1} \subset A_{4,8}$	X_2, X_3, X_1	$X_2 = \partial_2 - x^3\partial_1, X_3 = \partial_3, X_1 = \partial_1$	$\eta^{123} = q_2x^2 + q_2x^3$
$A_2 \oplus A_1 \subset A_{4,8}$	X_4, X_1, X_2 X_4, X_1, X_3	$X_4 = \partial_4 + x^2\partial_2, X_1 = \partial_1, X_2 = \partial_2$ $X_4 = \partial_4 - x^3\partial_3, X_1 = \partial_1, X_3 = \partial_3$	$\eta^{124} = q_3x^2 + q_1(e^{x^4} - 1)$ $\eta^{134} = q_3x^3 + q_1(e^{-x^4} - 1)$
$A_{3,1} \subset A_{4,9}^b$	X_2, X_3, X_1	$X_2 = \partial_2 - x^3\partial_1, X_3 = \partial_3, X_1 = \partial_1$	$\eta^{123} = q_1x^2 + q_2x^3$
$A_{3,5}^\nu \subset A_{4,9}^b,$ $\nu = \begin{cases} 1+b, & 1+b < 1, \\ 1/(1+b), & 1+b > 1 \end{cases}$	$X_4,$ X_2, X_3	$X_4 = \partial_4 + (x^1/2)\partial_1 + (x^3/2)\partial_3,$ $X_1 = \partial_1, \quad X_2 = \partial_2$	$\eta^{124} = q_1(e^{(b+2)x^4} - 1)$
$A_{3,4} \subset A_{4,9}^{-1/2}$	$X_4,$ X_1, X_3	$X_4 = \partial_4 + (x^1/2)\partial_1 + (x^3/2)\partial_3,$ $X_1 = \partial_1, \quad X_3 = \partial_3$	$\eta^{134} = q_1x^4$
$A_{3,5}^\omega \subset A_{4,9}^b,$ $\omega = \begin{cases} b/(1+b), & b/(1+b) < 1, \\ (1+b)/b, & b/(1+b) > 1 \end{cases}$	$X_4,$ X_1, X_3	$X_4 = \partial_4 + (b+1)x^1\partial_1 + (bx^3)\partial_3,$ $X_1 = \partial_1, \quad X_3 = \partial_3$	$\eta^{134} = q_1(e^{(2b+1)x^4} - 1)$
$A_{3,1} \subset A_{4,9}^1$	X_2, X_3, X_1	$X_2 = \partial_2 - x^3\partial_1, X_3 = \partial_3, X_1 = \partial_1$	$\eta^{123} = q_1x^2 + q_2x^3$
$A_{3,5}^{1/2} \subset A_{4,9}^1$	$X_4,$ $X_1,$ $X_2 \cos \phi + X_3 \sin \phi$	$X_4 = \partial_4 + 2x^1\partial_1 +$ $+(x^2 \cos \phi + \sin \phi)(\cos \phi \partial_2 + \sin \phi \partial_3),$ $X_1 = \partial_1,$ $X_2 \cos \phi + X_3 \sin \phi = \cos \phi \partial_2 + \sin \phi \partial_3$	$\eta^{124} = q_1(e^{3x^4} - 1) \cos \phi,$ $\eta^{134} = q_1(e^{3x^4} - 1) \sin \phi$

Таблица 2. Соответствующие алгебры Ли с левоинвариантными векторными полями и структуры Намбу третьего порядка на группах Ли (окончание).

Подалгебра Ли	Базис подалгебры Ли	Левоинвариантные векторные поля	η^{ijk}
$A_{3,1} \subset A_{4,9}^0$	X_2, X_3, X_1	$X_2 = \partial_2 - x^3\partial_1, X_3 = \partial_3, X_1 = \partial_1$	$\eta^{123} = q_1x^2 + q_2x^3$
$A_2 \oplus A_1 \subset A_{4,9}^0$	X_3, X_4, X_1	$X_3 = \partial_3, X_4 = \partial_4 + x^1\partial_1, X_1 = \partial_1$	$\eta^{134} = q_3x^1 + q_2(e^{-x^4} - 1)$
$A_{3,3} \subset A_{4,9}^0$	$X_4,$ X_1, X_2	$X_4 = \partial_4 + x^1\partial_1 + x^2\partial_2,$ $X_1 = \partial_1, X_2 = \partial_2$	$\eta^{124} = q_1(e^{2x^4} - 1)$
$A_{3,2} \subset A_{4,9}^0$	$X_4 + aX_3,$ X_1, X_2	$X_4 + aX_3 = \partial_4 + a\partial_3 + (ax^2 + x^1)\partial_1 + x^2\partial_2,$ $X_1 = \partial_1, X_2 = \partial_2$	$\eta^{124} = q_1(e^{x^4+x^3/a} - 1),$ $\eta^{123} = aq_1(e^{x^4+x^3/a} - 1)$
$A_{3,1} \subset A_{4,10}$	X_2, X_3, X_1	$X_2 = \partial_2 - x^3\partial_1, X_3 = \partial_3, X_1 = \partial_1$	$\eta_1 = q_1x^2 + q_2x^3$
$A_{3,1} \subset A_{4,11}^a$	X_2, X_3, X_1	$X_2 = \partial_2 - x^3\partial_1, X_3 = \partial_3, X_1 = \partial_1$	$\eta_1 = q_1x^2 + q_2x^3$
$A_{3,3} \subset A_{4,12}$	$X_3,$ X_1, X_2	$X_3 = \partial_3 + x^1\partial_1 + x^2\partial_2,$ $X_1 = \partial_1, X_2 = \partial_2$	$\eta^{123} = q_1(e^{2x^3} - 1)$
$A_{3,6} \subset A_{4,12}$	$X_4,$ X_1, X_2	$X_1 = \partial_4 + x^2\partial_1 - x^1\partial_2,$ $X_1 = \partial_1, X_2 = \partial_2$	$\eta^{124} = q_1x^4$
$A_{3,7}^{[a]} \subset A_{4,12}, \quad a \neq 0$	$X_4 + aX_3,$ X_1, X_2	$X_4 + aX_3 = \partial_4 + a\partial_3 +$ $+(ax^1 + x^2)\partial_1 + (ax^2 - x^1)\partial_2,$ $X_1 = \partial_1, X_2 = \partial_2$	$\eta^{124} = q_1(e^{x^3+ax^4} - 1),$ $\eta^{123} = aq_1(e^{x^3+ax^4} - 1)$

Благодарности. Мы хотели бы выразить искреннюю признательность В. Барзгару и Ф. Дараби за внимательное чтение статьи и полезные комментарии. Исследование поддержано Azarbaijan Shahid Madani University (грант № 27.d.1518).

Список литературы

- [1] Y. Nambu, *Phys. Rev. D*, **7**:8 (1973), 2405–2412.
- [2] L. Takhtajan, *Commun. Math. Phys.*, **160**:2 (1994), 295–315, arXiv: hep-th/9301111.
- [3] Ph. Gautheron, *Lett. Math. Phys.*, **37**:1 (1996), 103–116.
- [4] D. Alekseevsky, P. Guha, *Acta. Math. Univ. Comenian.*, **65**:1 (1996), 1–9.
- [5] R. Ibáñez, M. de León, J. C. Marrero, D. Martín de Diego, *J. Math. Phys.*, **38**:5 (1997), 2332–2344.
- [6] J. Grabowski, G. Marmo, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **32**:23 (1999), 4239–4247, arXiv: math/9902128.
- [7] N. Nakanishi, *Rev. Math. Phys.*, **10**:4 (1998), 499–510.
- [8] J. A. de Azcárraga, A. M. Perelomove, J. C. Pérez Bueno, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **29**:7 (1996), L151–L157.
- [9] J. A. de Azcárraga, A. M. Perelomove, J. C. Perez-Bueno, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **29**:24 (1996), 7993–8009, arXiv: hep-th/9605067.
- [10] J. A. de Azcárraga, J. M. Izquierdo, J. C. Pérez Bueno, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **30**:18 (1997), L607–L616.
- [11] R. Ibáñez, M. de León, J. C. Marrero, D. Martín de Diego, *Rep. Math. Phys.*, **42**:1–2 (1998), 71–90.
- [12] J. Grabowski, G. Marmo, *Differ. Geom. Appl.*, **12**:1 (2000), 35–50.
- [13] I. Vaisman, *J. Lie Theory*, **10**:1 (2000), 181–194.
- [14] N. Nakanishi, “Nambu–Poisson tensors on Lie groups”, *Poisson Geometry* (Warsaw, August 3–15, 1998), Banach Center Publications, **51**, eds. J. Grabowski, P. Urbanski, Polish Acad. Sci., Warsaw, 2000, 243–249.
- [15] N. Nakanishi, *RIMS Kokyuroku*, **1504** (2006), 54–59.
- [16] G. Ovando, *Rev. Un. Mat. Argentina*, **45**:2 (2004), 55–67, arXiv: math/0309146.
- [17] J. Patera, P. Winternitz, *J. Math. Phys.*, **18**:7 (1977), 1449–1455.
- [18] B. Mojaveri, A. Rezaei-Aghdam, *Internat. J. Modern Phys. A*, **27**:7 (2012), 1250032, 32 pp., arXiv: 1106.1795.
- [19] А. В. Болсинов, А. Т. Фоменко, *Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация*, Удмурт. ун-т, Ижевск, 1999.
- [20] P. Tempesta, A. V. Turbiner, P. Winternitz, *J. Math. Phys.*, **42**:9 (2001), 4248–4257, arXiv: hep-th/0011209.
- [21] T. Curtright, C. Zachos, *Phys. Rev. D*, **68**:8 (2003), 085001, 29 pp., arXiv: hep-th/0212267.
- [22] J. Patera, R. T. Sharp, P. Winternitz, H. Zassenhaus, *J. Math. Phys.*, **17**:6 (1976), 986–994.
- [23] R. O. Popovych, V. M. Boyko, M. O. Nesterenko, M. Lutfullin, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **36**:26 (2003), 7337–7360, arXiv: math-ph/0301029.
- [24] J. Abedi-Fardad, A. Rezaei-Aghdam, Gh. Haghighatdoost, *J. Math. Phys.*, **55**:5 (2014), 053507, 11 pp., arXiv: 1401.2533.

Поступила в редакцию 14.07.2014,
после доработки 8.09.2014