Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. Ш. Гутшабаш, В. Д. Липовский, С. С. Никуличев, Нелинейная сигма-модель в искривленном пространстве, калибровочная эквивалентность и точные решения $(2+0)$ -мерных интегрируемых уравнений, *ТМФ*, 1998, том 115, номер 3, 323–348

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf877>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.207.199.55

26 апреля 2023 г., 05:48:56

© 1998 г. Е. Ш. Гутшабаш*, В. Д. Липовский, С. С. Никуличев

НЕЛИНЕЙНАЯ СИГМА-МОДЕЛЬ В ИСКРИВЛЕННОМ ПРОСТРАНСТВЕ, КАЛИБРОВОЧНАЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ И ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ (2 + 0)-МЕРНЫХ ИНТЕГРИРУЕМЫХ УРАВНЕНИЙ

В качестве одной из наиболее общих интегрируемых эллиптических моделей предложена нелинейная сигма-модель в искривленном пространстве. Построены ее точные решения, и получены оценки энергии вблизи критической точки. Рассмотрено преобразование Полмайера в евклидовом пространстве, и изучены условия калибровочной эквивалентности широкого семейства эллиптических уравнений. Развита схема метода обратной задачи для уравнения sh-Гордон, и вычислены его точные и асимптотические решения.

Хотя Слава Липовский не принимал непосредственного участия в написании данного текста, его вклад в настоящую работу был столь неопределим, что мы сочли своим долгом включить его в число соавторов. Мы старались сохранить стиль его изложения, отражавший его незаурядный талант исследователя, коллеги и человека.

Е. Гутшабаш, С. Никуличев

1. ВВЕДЕНИЕ

Данная работа посвящена широкому кругу задач, связанных с двумерными нелинейными интегрируемыми уравнениями эллиптического типа. Эти уравнения, описывающие стационарные процессы в нелинейных средах, дают, как правило, пространственное распределение физических полей при задании их значений на границе рассматриваемых областей. Возникающие в связи с этим граничные задачи имеют характерную черту: по мере удаления “наблюдателя” вглубь среды (асимптотика при $r^2 = x^2 + y^2 \rightarrow \infty$) искомые поля становятся слабыми, а сами уравнения линеаризуются и превращаются в классические уравнения математической физики. С этой точки зрения метод обратной задачи (МОЗ) для эллиптических уравнений, так же как и в гиперболическом варианте,

* Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия

представляет собой нелинейный аналог преобразования Фурье, широко используемого в линейных задачах. Это явление позволяет, в частности, интерпретировать решения нелинейных уравнений эллиптического типа (отвечающие дискретному спектру!) как “солитоноподобные” возбуждения (вихри, дефекты) в нелинейных конденсированных средах, обладающие некоторыми свойствами солитонов, а также рядом своих специфических свойств.

В серии работ [1–4] была осуществлена постановка граничных задач для двумерных эллиптических уравнений на полуплоскости, исследованы прямые и обратные задачи для соответствующих операторов ассоциированных линейных задач, построены точные решения, а также найдены законы сохранения и тождества следов. Кроме того, была доказана калибровочная эквивалентность (КЭ) граничных задач для эллиптических версий двумерного ферромагнетика Гейзенберга ($O(3)$ - σ -модели) и уравнения sh-Гордон [4, 5]. Эти результаты позволили, таким образом, перенести методы, используемые для гиперболических уравнений, на эллиптический случай, имеющий важные и многочисленные физические приложения.

В то же время актуальной является задача построения более реалистичных моделей, с одной стороны, остающихся в классе интегрируемых, а с другой, учитывающих те или иные особенности физических систем. Решение одной из таких задач было начато в [6], где была предложена нелинейная σ -модель в искривленном пространстве (магнетик с переменной номинальной намагниченностью). Как будет показано ниже, эта модель (точнее, ее интегрируемая версия), по-видимому, является в настоящее время наиболее общей из известных физических моделей, описываемых эллиптическими уравнениями и обладающих лаксовыми представлениями.

В настоящей работе, являющейся расширенным вариантом работ [6, 1] и переработанной версией [7], мы ставим своей целью получить точные решения этой модели и исследовать ее свойства, а также выявить цепочку переходов от нее к уже известным и изученным моделям. При этом для одной из таких моделей (sh-Гордон), используя схему МОЗ, мы строим точные решения и даем их физическую интерпретацию.

Материал изложен следующим образом. В разделе 2 рассматривается σ -модель в искривленном пространстве, вычисляются ее точные решения и изучаются некоторые термодинамические свойства. В разделе 3 предлагается евклидова версия преобразования Полмайера и исследуется калибровочная эквивалентность широкого семейства граничных задач. В разделе 4 развивается схема МОЗ для модели заряженных частиц на полуплоскости и находится серия ее точных решений, а также законы сохранения и тождества следов.

2. НЕЛИНЕЙНАЯ σ -МОДЕЛЬ В ИСКРИВЛЕННОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Хорошо известно, что условие постоянства абсолютной величины магнитного момента является существенным предположением при феноменологическом описании слабо-

возбужденных состояний магнетиков. При этом предположении эволюция состояний системы сводится к вращению вектора намагниченности вокруг центра сферы заданного постоянного радиуса. Аналогичное утверждение справедливо и для моделей магнетиков, описываемых уравнением Ландау–Лифшица. Такие модели адекватно описывают физическую ситуацию вдали от точки Кюри. При умеренных же температурах можно ожидать пространственного изменения абсолютной (номинальной) намагниченности материала образца. Эта гипотеза позволяет изучать магнетик в рамках феноменологического подхода вблизи критической точки (но за пределами флуктуационной области) и описывать плавный пространственный переход в парамагнитную фазу.

Рассмотрим двумерный изотропный ферромагнетик Гейзенберга (двумеризованное стационарное уравнение Ландау–Лифшица)

$$\mathbf{M} \wedge \Delta \mathbf{M} = 0, \quad \mathbf{M}^2 = \alpha(\mathbf{r}), \quad (2.1)$$

где $\mathbf{M} = \mathbf{M}(x, y) = (M_1, M_2, M_3)$, $\mathbf{r} = (x, y) \in R_+^2$, $\alpha(\mathbf{r})$ – квадрат номинальной намагниченности, вообще говоря, произвольная функция от $\mathbf{r}$.

Из (2.1) нетрудно получить следующее уравнение:

$$\alpha \Delta \mathbf{M} + (\mathbf{M}_x^2 + \mathbf{M}_y^2) \mathbf{M} = \frac{1}{2} \mathbf{M} \Delta \alpha. \quad (2.2)$$

Положим

$$M = \sum_{i=1}^3 M_i \sigma_i,$$

где σ_i , $i = 1, 2, 3$, – матрицы Паули. Тогда в терминах матрицы M уравнение (2.2) можно переписать в виде

$$(\alpha M_z M^{-1})_{\bar{z}} + (\alpha M_{\bar{z}} M^{-1})_z = \alpha_{z\bar{z}} I, \quad (2.3)$$

где $z = x + iy$, I – единичная 2×2 -матрица.

Уравнение (2.2) (или эквивалентное ему уравнение (2.3)) представляет собой уравнение неоднородного магнетика, обобщающее двумеризованную версию стационарного магнетика Ландау–Лифшица. Вопрос об интегрируемости этих уравнений в общем случае (при произвольной функции $\alpha(\mathbf{r})$) остается открытым, поэтому здесь мы рассмотрим простейший вариант, для которого уравнение (2.3) будет интегрируемо, а именно предположим, что

$$4\Delta\alpha \equiv \alpha_{z\bar{z}} = 0. \quad (2.4)$$

Тогда из (2.3) следует, что двумерный изотропный магнетик с моментом насыщения, квадрат которого является гармонической функцией координат, описывается нелинейной σ -моделью в искривленном пространстве.

Отметим здесь интересную аналогию с теорией гравитации. Уравнение (2.3) с учетом (2.4) формально имеет такой же вид, как и уравнения гравитации с двумя коммутирующими векторами Киллинга для части метрики g , содержащей недиагональные члены [8–11]. Отличие заключается в том, что в рассматриваемой нами ситуации $M = M^*$ (* – символ эрмитова сопряжения), $\det M = -\alpha$, тогда как в теории гравитации $g = g^T$, $\det g = -\alpha^2$.

Положим

$$S = \frac{M}{\sqrt{\alpha}}, \quad \mathbf{S} = \sum_{i=1}^3 S_i \sigma_i,$$

причем $\mathbf{S}^2 = 1$, т.е. $\mathbf{S}$ оказывается нормированным вектором намагниченности. Согласно (2.3), (2.4) будем иметь уравнение

$$(\alpha S_z S)_{\bar{z}} + (\alpha S_{\bar{z}} S)_z = 0, \quad (2.5)$$

являющееся уравнением нелинейной $O(3)$ - σ -модели в искривленном пространстве. При $\alpha = 1$ это уравнение переходит в уравнение стандартной $O(3)$ - σ -модели (двумерного изотропного ферромагнетика Гейзенберга), граничная задача для которой была решена в [3, 4]. Заметим также, что уже упомянутый случай гравитации сводится к аналогичной $O(2, 1)$ - σ -модели в искривленном пространстве, а размерная редукция аксиально-симметричных уравнений самодуальности в теории полей Янга–Миллса также приводит к аналогичной модели: аналог S равен $g^* g$, где $g \in SL(N, R)$ [12].

Рассмотрим вначале некоторые простейшие автомодельные решения (2.5). Возьмем анзац вида

$$S = \begin{pmatrix} \cos \chi & \sin \chi \exp(-i\Phi) \\ \sin \chi \exp(i\Phi) & -\cos \chi \end{pmatrix}, \quad (2.6)$$

где $\chi = \chi(\alpha, \beta)$, $\Phi = \Phi(\alpha, \beta)$ – вещественнозначная функция, β – гармоническая функция, сопряженная α в смысле условий Коши–Римана. Подстановка (2.6) в (2.5) приводит к системе уравнений

$$\begin{aligned} (\Phi_{\alpha\alpha} + \alpha^{-1}\Phi_{\alpha} + \Phi_{\beta\beta}) \sin \chi + 2(\Phi_{\alpha}\chi_{\alpha} + \Phi_{\beta}\chi_{\beta}) \cos \chi &= 0, \\ 2(\chi_{\alpha\alpha} + \alpha^{-1}\chi_{\alpha} + \chi_{\beta\beta}) &= (\Phi_{\alpha}^2 + \Phi_{\beta}^2) \sin 2\chi. \end{aligned} \quad (2.7)$$

При $\chi = 0$ имеем $S = \sigma_z$, при $\chi = \pi/2$ функция Φ удовлетворяет уравнению Лапласа, откуда следует, что

$$\Phi(\alpha, \beta) = \int dR(s) Z_0(is\alpha) e^{is\beta},$$

где $Z_0(x)$ – функция Бесселя (J_0 или N_0), а $dR(s)$ – некоторая спектральная мера. Наконец, при $\Phi = k\beta$, где k – свободный параметр, функция $\chi = \chi(\alpha)$ подчиняется уравнению

$$\chi_{\alpha\alpha} + \alpha^{-1}\chi_{\alpha} = \frac{k^2}{2} \sin 2\chi,$$

которое сводится к третьему уравнению Пенлеве.

Система (2.7) аналогична уравнениям, возникающим в теории гравитации [13], однако там одно из уравнений напоминает уравнение Лиувилля, а не уравнение синус-Гордон, как в нашем случае.

Уравнение (2.5) является условием совместности матричной 2×2 -линейной системы

$$\left(\partial_z - \frac{\alpha S_z S}{\varrho + \alpha}\right)\Psi = 0, \quad \left(\partial_{\bar{z}} + \frac{\alpha S_{\bar{z}} S}{\varrho - \alpha}\right)\Psi = 0, \quad (2.8)$$

где

$$\varrho = \varrho(\alpha, \beta, u) = i\beta - u + \sqrt{(u - \gamma)(u + \bar{\gamma})}, \quad \gamma(z) = \alpha + i\beta, \quad (2.9)$$

при этом γ – функция, аналитичная в пределах образца, а $u \in C$ – “скрытый” спектральный параметр, не зависящий от координат. Таким образом, уравнение (2.5) подпадает под весьма общий вариант МОЗ, который, однако, в полном объеме из-за технических трудностей пока не описан (некоторые продвижения в этом направлении в рамках уравнений теории гравитации были недавно осуществлены в [14]).

В связи с этим для получения точных решений мы воспользуемся методом одевания. Схема применения этого метода в данном случае практически не отличается от построений работы [15], поэтому мы приведем лишь некоторые фрагменты вычислений, позволяющие получить ответ.

Дополним систему (2.8) условиями редукций и формулой восстановления потенциала (намагниченности):

$$\begin{aligned} \Psi^{-1}(u) &= \Psi^*(-\bar{u}), \quad S\Psi(u) = \Psi(\tau(u))J, \quad S = \Psi(\infty^+)C, \\ JJ^* &= J^2 = I, \quad CC^* = I, \quad J = C\Psi(\infty^-), \end{aligned} \quad (2.10)$$

где τ – операция перестановки листов на римановой поверхности Γ радикала, входящего в (2.9), знаки $\pm$ относятся соответственно к верхнему и нижнему листам, причем верхний лист фиксирован условием $\varrho \rightarrow 0$ при $u \rightarrow \infty^+$, C, J – 2×2 -матрицы, введенные для выбора различных вариантов фоновых решений (классических вакуумов). Кроме того, справедливы следующие условия инволюции:

$$\varrho(u) = -\bar{\varrho}(-\bar{u}), \quad \varrho(\tau(u)) = \frac{\alpha^2}{\varrho(u)}. \quad (2.11)$$

Соотношения (2.9)–(2.11) позволяют написать искомый ответ. Для этого будем искать решение системы (2.8) в виде

$$\Psi(u) = \chi(u)\Psi^0(u), \quad (2.12)$$

где $\Psi^0(u)$ – затравочное решение (2.8), соответствующее вакууму S^0 , а $\chi(u)$ – матрица, подлежащая определению. Предположим, далее, что матрицы $\chi(u)$ и $\chi^{-1}(u)$ являются мероморфными функциями на римановой поверхности Γ , имеющими конечное число полюсов (для матрицы χ в точках $u = v_i$):

$$\begin{aligned}\chi(u) &= I + \sum_i \frac{|m_i\rangle \otimes \langle q_i|}{\varrho(u) - \mu_i}, \\ \chi^{-1}(u) &= I + \sum_i \frac{|p_i\rangle \otimes \langle l_i|}{\varrho(u) - \nu_i},\end{aligned}\tag{2.13}$$

где $\mu_i = \varrho(v_i)$, а для векторов использованы стандартные дираковские обозначения.

Очевидно, что если χ имеет полюс при $u = v_i$, то она имеет полюс и на втором листе Γ : $u = \tilde{v}_i = \tau(v_i)$. Из условия $\chi(u)\chi^{-1}(u) = I$ и (2.13) следует, что

$$|m_i\rangle = \sum_j |p_j\rangle (N^{-1})_{ji}, \quad \langle l_i| = - \sum_j (N^{-1})_{ij} \langle q_j|, \quad N_{ij} = \frac{\langle q_i | p_j \rangle}{\mu_i - \nu_j},$$

а из (2.8), (2.12), (2.13) имеем

$$\langle q_i| = \langle d_i|(\Psi^0(v_i))^{-1}, \quad |p_i\rangle = \Psi^0(-\bar{v}_i)|c_i\rangle,$$

где $\langle d_i|$ и $|c_i\rangle$ – произвольные бра- и кет-векторы. Первая из редукций (2.10) дает $\langle q_i| = |p_i\rangle^*$, $\nu_i = -\bar{\mu}_i$, а из второй следует, что $\langle c_i|J = \langle \tilde{c}|$. Здесь вектор $\langle c_i|$ соответствует полюсному вкладу с $u = v_i$, а $\langle \tilde{c}|$ – вкладу с $u = \tilde{v}_i = \tau(v_i)$.

Полученные соотношения позволяют выписать N -“солитонное” решение уравнения (2.5), однако для простоты мы ограничимся “односолитонным” ответом:

$$\begin{aligned}S &= S_0 + \frac{\langle q | S^0 | q \rangle}{D(|\mu|^2 + \alpha^2)} \left[S^0 | q \rangle \otimes \left\langle q \left| S_0 + \frac{|\mu|^2}{\alpha^2} \right| q \right\rangle \otimes \langle q| \right] - \\ &- \frac{\langle q | q \rangle}{\alpha^2 D(\mu + \bar{\mu})} \left[\bar{\mu} | q \rangle \otimes \langle q | S^0 + \mu S^0 | q \rangle \otimes \langle q| \right],\end{aligned}\tag{2.14}$$

где $\mu = \varrho(v) = \mu_R + i\mu_I$, $|q\rangle = \Psi^0(-\bar{v})|c\rangle$, $\langle q| = |q\rangle^*$, $|c\rangle \in \mathbb{C}^2$ – произвольный постоянный вектор,

$$D = \frac{|\mu|^2}{\alpha^2} \left[\frac{\langle q | q \rangle^2}{(\mu + \bar{\mu})^2} - \frac{\alpha^2 \langle q | S^0 | q \rangle^2}{(|\mu|^2 + \alpha^2)^2} \right].$$

Выражение (2.14) имеет итерационный характер, т.е. позволяет построить $N+1$ -“солитонное” решение, отправляясь от N -“солитонного” фона.

Перейдем к анализу явного вида полученного решения. Простейшему выбору фона $S^0 = \sigma_3$ отвечает $C = I$, $J = \sigma_3$, $\Psi^0 = \sigma_3$. Положив без ограничения общности $\langle c | = (1, \bar{c})$, из (2.14) имеем

$$\begin{aligned} S_+ &= S_1 + iS_2 = -\frac{c}{\alpha^2 D} \left[(1 - |c|^2) \frac{|\mu|^2 - \alpha^2}{|\mu|^2 + \alpha^2} + (1 + |c|^2) \frac{\mu - \bar{\mu}}{\mu + \bar{\mu}} \right], \\ S_3 &= 1 - \frac{2|c|^2}{\alpha^2 D}, \quad D = \frac{|\mu|^2}{\alpha^2} \left[\frac{(1 + |c|^2)^2}{(\mu + \bar{\mu})^2} - \frac{\alpha^2 (1 - |c|^2)^2}{(|\mu|^2 + \alpha^2)^2} \right]. \end{aligned} \quad (2.15)$$

При $c = -i \exp(2i\Phi)$ решение (2.15) значительно упрощается:

$$S_+ = -\sin 2\theta \exp(2i\Phi), \quad S_3 = -\cos 2\theta, \quad \theta = \arg \mu. \quad (2.16)$$

Таким образом, воспроизведен анзац (2.6) с $\Phi = \text{const}$, $\chi = \pi + 2\theta$. При этом, как можно показать, χ удовлетворяет второму из уравнений (2.7) с правой частью, равной нулю. Для чисто мнимого v из (2.11) и (2.16) следует, что возбуждение над вакуумом $S_3^0 = 1$ отсутствует. Этот факт справедлив и в общем случае, описываемом формулой (2.14). Отметим также, что решения (2.15), (2.16) не имеют нетривиальных аналогов в случае постоянного момента насыщения.

Другой возможный выбор затравочного решения: $S^0 = \exp(-ik\beta\sigma_3)\sigma_1$, где k – некоторая вещественная постоянная, приводит к равенствам $C = J = \sigma_1$. Система (2.8) в этом случае явно интегрируется:

$$\Psi^0(\alpha, \beta, u) = \exp \left[\frac{1}{2} k \sigma_3 (\varrho(\alpha, \beta, u) - 2i\beta) \right],$$

где ϱ определено в (2.9). Снова полагая $\langle c | = (1, \bar{c})$, получим обобщение на рассматриваемый нами неоднородный случай формул, описывающих возбуждение магнитных вихрей [16]:

$$\begin{aligned} S_+ &= e^{ik\beta} + \frac{4|c|^2|\mu|}{\alpha D} e^{ik\beta} \left[\frac{\cos(\eta + i\sigma) \cos \eta}{|\mu|^2 + \alpha^2} - \frac{\text{ch } \xi}{2\alpha\mu_R} \text{ch}(\xi - i\theta) \right], \\ S_3 &= -\frac{2|c|^2}{\alpha^2 D} \left[\frac{|\mu|^2 - \alpha^2}{|\mu|^2 + \alpha^2} \text{sh } \xi \cos \eta - i \frac{\mu - \bar{\mu}}{\mu + \bar{\mu}} \text{ch } \xi \sin \eta \right], \end{aligned} \quad (2.17)$$

где

$$D = \frac{4|\mu|^2|c|^2}{\alpha^2} \left[\frac{\text{ch}^2 \xi}{4\mu_R^2} - \frac{\alpha^2 \cos^2 \eta}{(|\mu|^2 + \alpha^2)^2} \right].$$

Здесь $\xi = k\mu_R + \ln |c|$, $\eta = k(\mu_I - \beta) - \arg c$, $\theta = \arg \mu$, $\sigma = \ln(|\mu|/\alpha)$. Формулы для S_+ и S_3 дают распределение намагниченности с характерным локальным масштабом изменения $L^{-1} \sim |k \nabla \mu_R|$ и волновым числом $K \sim |k \nabla (\mu_I - \beta)|$, соответствующими пространственной модуляции магнитной структуры образца. При $KL \gg 1$ соотношение

(2.17) описывает неоднородный магнетик спирального типа с эффектом множественного образования сателлитов основных гармоник.

Полученные выше “солитонные” решения позволяют оценить вычисленный для них функционал энергии. Для этого предположим, что функция α , помимо пространственных переменных, зависит еще и от температуры: $\alpha = \alpha(\mathbf{r}, T)$. Точный вид такой зависимости может быть найден, вообще говоря, в результате рассмотрения системы на решетке [17, 18], что, однако, выходит за рамки данной работы. Поэтому здесь мы ограничимся лишь оценками энергии и теплоемкости вблизи критической точки.

Согласно теории Ландау [19] функции α и β вблизи точки Кюри T_c ведут себя следующим образом:

$$\alpha(r, T) \approx f_0(r)t, \quad \beta(r, T) \approx g_0(r)t, \quad t = \frac{T_c - T}{T_c}. \quad (2.18)$$

Вторая оценка в (2.18) вытекает из первой и того факта, что величины α и β (как и f_0 с g_0) связаны между собой условиями Коши–Римана. При малых α , β ($t \rightarrow 0^+$) из (2.9) имеем

$$\mu = -\frac{\alpha^2}{2v} \left(1 + \frac{i\beta}{v} \right) + O(|\gamma|^4). \quad (2.19)$$

Энергия рассматриваемой системы определяется выражением

$$E = \frac{1}{2} \int_{\Omega} dx dy (\nabla \mathbf{M})^2 = \frac{1}{2} \int_{\Omega} dx dy \left[\frac{(\nabla \alpha)^2}{4\alpha} + \alpha (\nabla \mathbf{S})^2 \right], \quad (2.20)$$

где Ω – область, занимаемая образцом. Это соотношение можно переписать в виде

$$E = \int_{\Omega} d^2 r \left[\alpha \operatorname{Tr}(S_z S_{\bar{z}}) + \frac{\alpha_z \alpha_{\bar{z}}}{2\alpha} \right] = E_1 + E_0. \quad (2.21)$$

Используя равенства

$$d^2 r = dx dy = -\frac{1}{2i} d\gamma \wedge d\bar{\gamma} \frac{1}{\gamma_z \bar{\gamma}_{\bar{z}}}, \quad d\alpha \wedge d\beta = -\frac{1}{2i} d\gamma \wedge d\bar{\gamma},$$

получим

$$E_0 = \frac{1}{8} \int_{\Omega'} \frac{d\alpha d\beta}{\alpha}, \quad E_1 = \int_{\Omega'} \frac{d\alpha d\beta}{\gamma_z \bar{\gamma}_{\bar{z}}} \operatorname{Tr}(S_z S_{\bar{z}}). \quad (2.22)$$

Здесь Ω' – область на плоскости переменных (α, β) , полученная при конформном отображении $\gamma(z)$ области Ω на плоскости (x, y) . Из (2.22) следует, что

$$E_0 = \frac{1}{8} (\beta_2 - \beta_1) \ln \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \sim (T_c - T) \ln(T_c - T), \quad (2.23)$$

откуда, в частности, можно найти вклад в теплоемкость:

$$c_0 = \frac{\partial E}{\partial T} \sim \ln[e(T_c - T)]. \quad (2.24)$$

Для оценок величин E_1 и $c_1 = \partial E_1 / \partial T$ необходим явный вид решения для S . Рассмотрим вначале простейшее решение (2.16). Тогда находим

$$E_1 = 8 \int_{\Omega'} \frac{d\alpha d\beta}{\gamma_z \bar{\gamma}_{\bar{z}}} \alpha \theta_z \theta_{\bar{z}} = 8 \int_{\Omega'} d\alpha d\beta \alpha \theta_\gamma \theta_{\bar{\gamma}}, \quad (2.25)$$

причем для θ_γ , $\theta_{\bar{\gamma}}$ имеем соотношения

$$\theta_\gamma = \frac{1}{2i} \left(\ln \left(\frac{\varrho}{\bar{\varrho}} \right) \right)_\gamma, \quad \theta_{\bar{\gamma}} = \frac{1}{2i} \left(\ln \left(\frac{\varrho}{\bar{\varrho}} \right) \right)_{\bar{\gamma}}. \quad (2.26)$$

Используя метод деформаций, развитый в [20], можно показать, что

$$\begin{aligned} \left(\frac{4\alpha}{\mu - \alpha} \right)_\gamma &= \frac{1}{\mu - \alpha} + \frac{1}{\mu + \alpha}, \\ \left(\frac{4\alpha}{\mu + \alpha} \right)_{\bar{\gamma}} &= \frac{1}{\mu - \alpha} + \frac{1}{\mu + \alpha}, \end{aligned} \quad (2.27)$$

откуда, полагая $\mu = \varrho$, найдем

$$\theta_\gamma = \frac{1}{2i} \frac{\varrho + \bar{\varrho}}{(\varrho + \alpha)(\bar{\varrho} - \alpha)}, \quad \theta_{\bar{\gamma}} = \frac{1}{2i} \frac{\varrho + \bar{\varrho}}{(\varrho - \alpha)(\bar{\varrho} + \alpha)}$$

и, следовательно, согласно (2.25) получим

$$E_1 = 2 \int_{\Omega'} d\alpha d\beta \frac{\alpha(\varrho + \bar{\varrho})^2}{|\varrho^2 - \alpha^2|^2}. \quad (2.28)$$

Учитывая (2.18), (2.19) и полагая размеры Ω' конечными, вблизи точки Кюри окончательно будем иметь

$$E_0 \approx t \ln t, \quad c_0 \approx \ln t, \quad E_1 \approx t^3, \quad c_1 \approx t^3. \quad (2.29)$$

Таким образом, фоновая теплоемкость изменяется по закону, характерному для двумерной модели Изинга [17, 18] с критическим индексом, равным нулю, а энергия и теплоемкость состояния возбуждения над вакуумом изменяются по степенным законам.

При вычислении энергии для более сложных решений формулу (2.21) удобно записать в виде

$$E = \int_{\Omega'} d\alpha d\beta \left[\frac{\alpha}{\gamma_z \bar{\gamma}_{\bar{z}}} (2S_{3z} S_{3\bar{z}} + |S_{+z}|^2 + |S_{+\bar{z}}|^2) + \frac{1}{8\alpha} \right]. \quad (2.30)$$

Рассмотрим решение (2.15) и положим в нем $|\mu| = \alpha \operatorname{tg} \Phi$, $\Phi \in [0, \pi/2)$. Тогда имеем

$$\begin{aligned} S_+ &= -\frac{c}{\alpha^2 D} \left[-B \cos 2\Phi + iA \operatorname{tg} \theta \right], \quad S_3 = 1 - \frac{2|c|^2}{\alpha^2 D}, \\ D &= \frac{1}{4} \frac{A^2}{\alpha^2 \cos^2 \theta} - B^2 \sin^2 \Phi, \quad D = \overline{D}, \end{aligned} \quad (2.31)$$

где $\theta = \arg \mu$, $A = 1 + |c|^2$, $B = 2 - A$. Используя метод деформаций, получим

$$\begin{aligned}\Phi_z &= \frac{\cos^2 \Phi}{\alpha} \gamma_z \left[|\varrho|^2 \frac{\bar{\varrho} - \varrho - 2\alpha}{(\varrho + \alpha)(\bar{\varrho} - \alpha)} - \frac{1}{2} \operatorname{tg} \Phi \right], \\ \Phi_{\bar{z}} &= \frac{\cos^2 \Phi}{\alpha} \bar{\gamma}_{\bar{z}} \left[|\varrho|^2 \frac{\bar{\varrho} - \varrho - 2\alpha}{(\varrho - \alpha)(\bar{\varrho} + \alpha)} - \frac{1}{2} \operatorname{tg} \Phi \right].\end{aligned}\quad (2.32)$$

Учитывая (2.31), (2.32), найдем

$$E_0, E_1 \approx t \ln t, \quad c_0, c_1 \approx \ln t, \quad (2.33)$$

т.е. для решения (2.15) фоновая энергия и теплоемкость вносят тот же вклад, что и соответствующие величины для состояний с возбуждениями.

Рассмотрим решение (2.17). Используя те же обозначения, что и в предыдущем примере, запишем это решение в виде

$$\begin{aligned}S_+ &= e^{ik\beta} + \frac{2|c|^2}{\alpha^2 D} e^{ik\beta} \left[\cos(\eta + i\sigma) \sin 2\Phi \cos \eta - \frac{\operatorname{ch} \xi}{\cos \theta} \operatorname{ch}(\xi - i\theta) \right], \\ S_3 &= -\frac{2|c|^2}{\alpha^2 D} [-\cos 2\Phi \operatorname{sh} \xi \cos \eta + \operatorname{tg} \theta \operatorname{ch} \xi \sin \eta].\end{aligned}$$

Вычисляя соответствующие производные и оценивая интегралы аналогично предыдущим случаям, получим

$$E_0, E_1 \approx t \ln t, \quad c_0, c_1 \approx \ln t. \quad (2.34)$$

Изложенный здесь подход содержит, таким образом, три основных составляющих: интегрируемость модели, метод одевания и метод деформаций, и является в значительной мере универсальным. Поэтому он, по-видимому, мог бы быть использован и в других интересных приложениях двумерных (интегрируемых) моделей.

В заключение этого раздела покажем, как в рамках модели неоднородного магнетика осуществляется переход к однородному случаю. Для этого рассмотрим систему (2.8) и выражение (2.9), содержащее “скрытый” спектральный параметр u . Полагая $\lambda = \varrho/\alpha$ и устремляя α к единице, получим

$$\varrho = i\beta - u + \sqrt{(u-1)(u+1-i\beta)} = \lambda. \quad (2.35)$$

Поскольку $\gamma(z, \bar{z}) = \alpha(z, \bar{z}) + i\beta(z, \bar{z})$, $z = x + iy$, является аналитической функцией, то из условий Коши–Римана следует, что $\beta \rightarrow \beta_0$ при $\alpha \rightarrow 1$, где β_0 – некоторая константа, которую мы положим равной нулю. Тогда из (2.35) будем иметь $u = -(\lambda + 1/\lambda)/2$, и, значит, соответствие между однородным и неоднородным случаями на языке спектральных параметров дается “отраженной” функцией Жуковского.

3. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ПОЛМАЙЕРА И КАЛИБРОВОЧНАЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ ДВУМЕРНЫХ ИНТЕГРИРУЕМЫХ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ

Рассмотрим $(2 + 0)$ - $O(3)$ -нелинейную σ -модель на полуплоскости $R_+^2 = \{(x, y): -\infty < x < +\infty, y \geq 0\}$:

$$\mathbf{S}_{z\bar{z}} + (\mathbf{S}_z \mathbf{S}_{\bar{z}}) \mathbf{S} = 0, \quad (3.1)$$

где $\mathbf{S}(x, y) = (S_1, S_2, S_3)$, $|\mathbf{S}|^2 = 1$, $\mathbf{S}_z = (\mathbf{S}_x - i\mathbf{S}_y)/2$. Модель (3.1) совпадает с эллиптической версией модели $\mathbf{n}$ -поля [21] и является одним из вариантов модели киральных полей. Будем предполагать, что $\mathbf{S}(x, 0)$ и $\mathbf{S}_y(x, 0)$ – заданные гладкие функции, причем (если не оговорено противное)

$$\mathbf{S}(x, 0) \rightarrow (\cos 2x, \sin 2x, 0), \quad |x| \rightarrow \infty, \quad (3.2)$$

т.е. вектор $\mathbf{S}$ ищется в классе функций, имеющих смысл спиральных структур [22]. Следуя [23], предположим также, что на R_+^2 справедливы соотношения

$$\mathbf{S}_z^2 = \mathbf{S}_{\bar{z}}^2 = 1, \quad (3.3)$$

откуда следуют связи

$$\mathbf{S}_x^2 - \mathbf{S}_y^2 = 4, \quad \mathbf{S}_x \mathbf{S}_y = 0, \quad (3.4)$$

которые, очевидно, совместны с (3.1).

Полагая $f(z, \bar{z}) = \mathbf{S}_z \mathbf{S}_{\bar{z}}$, выполним преобразование Полмайера, считая, что

$$\mathbf{S}_{z\bar{z}} = c_1 \mathbf{S} + c_2 \mathbf{S}_z + c_3 \mathbf{S}_{\bar{z}},$$

где $c_i = c_i(z, \bar{z})$, $i = 1, 2, 3$, – некоторые комплекснозначные функции. Нетрудно видеть, что $c_1 = -1$, $c_2 = -ff_z/(1 - f^2)$, $c_3 = f_z/(1 - f^2)$, откуда следует уравнение на функцию $f(z, \bar{z})$

$$f_{z\bar{z}} = 1 - f^2 - \frac{ff_z f_{\bar{z}}}{1 - f^2}. \quad (3.5)$$

Это уравнение интегрируемо, поскольку является условием совместности линейной матричной системы

$$\Psi_z = A\Psi, \quad \Psi_{\bar{z}} = B\Psi, \quad (3.6)$$

где $\Psi = \Psi(z, \bar{z})$, $A = A(z, \bar{z})$, $B = B(z, \bar{z}) \in \text{Mat}(2, \mathbb{C})$, а матрицы A и B имеют вид

$$A = \frac{1}{2}i\lambda\sigma_3 + \frac{\partial f}{2\sqrt{f^2 - 1}}\sigma_1, \quad B = \frac{1}{2}if\lambda\sigma_3 + \frac{1}{2\lambda}\sqrt{f^2 - 1}\sigma_2. \quad (3.7)$$

Здесь $\lambda \in \mathbb{C}$ – спектральный параметр, $|f| > 1$.

В дальнейшем будет полезным понятие “фазового” пространства нелинейного эллиптического уравнения, которое естественно ввести по аналогии с гиперболическим случаем [21]. Выполним это на примере уравнений (3.1) и (3.5).

Производящий функционал модели (3.1), (3.2) имеет вид

$$F^{(S)} = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_0^{\infty} dy \left[\frac{1}{2} (S_x^2 + S_y^2) + \frac{\nu_1}{2} (S^2 - 1) + \nu_2 S S_y - 2 \right], \quad (3.8)$$

где ν_j , $j = 1, 2$, — множители Лагранжа. Фазовое пространство $\mathcal{M}^{(S)}$ образовано гладкими функциями $S_i(x, 0)$, $S_{iy}(x, 0)$, $i = 1, 2, 3$, а аналог гамильтоновых уравнений есть

$$S_y = \{H^{(S)}, S\}, \quad (S_y)_y = \{H^{(S)}, S_y\}, \quad (3.9)$$

причем “гамильтониан” модели задается следующим образом:

$$H^{(S)} = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left[\frac{1}{2} (S_y^2 - S_x^2) + 2 \right]. \quad (3.10)$$

Пуассонова структура фазового пространства определяется ненулевыми фундаментальными скобками с учетом связей, входящих в (3.8) [21]:

$$\begin{aligned} \{S_{ay}(x), S_b(x')\} &= [\delta_{ab} - S_a(x)S_b(x)]\delta(x - x'), \\ \{S_{ay}(x), S_{by}(x')\} &= -[S_{ay}(x)S_b(x) - S_{by}S_a(x)]\delta(x - x'). \end{aligned}$$

Тогда, если F и G — произвольные гладкие функционалы, то

$$\begin{aligned} \{F, G\} &= \int dx \left\{ \left[\frac{\delta F}{\delta S_y} \frac{\delta G}{\delta S} - \frac{\delta F}{\delta S} \frac{\delta G}{\delta(\delta_y S)} \right] + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\delta G}{\delta S_y} S \right) \left[\left(\frac{\delta F}{\delta S} S \right) - \left(\frac{\delta F}{\delta S_y} S_y \right) \right] + \left(\frac{\delta F}{\delta S_y} S \right) \left[\left(\frac{\delta G}{\delta S_y} S_y \right) - \left(\frac{\delta G}{\delta S} S \right) \right] \right\}. \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь уравнение (3.5), считая, что $f(x, 0)$, $f_y(x, 0)$ — заданные гладкие вещественнозначные функции, причем $f(x, 0) \rightarrow 1$, $f_x(x, 0), f_y(x, 0) \rightarrow 0$ при $|x| \rightarrow \infty$, так что второй член в (3.5) обращается на бесконечности в нуль. Производящий функционал этого уравнения имеет вид

$$F^{(f)} = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_0^{+\infty} \left[\frac{1}{2} \frac{f_x^2 + f_y^2}{f^2 - 1} + 4(1 - f) \right].$$

“Фазовое” пространство $\mathcal{M}^{(f)}$ образовано функциями $q = \ln |f + \sqrt{f^2 - 1}|$ ($|f| > 1$) и $p = f_y / \sqrt{|f^2 - 1|}$, а уравнения “движения” дают

$$q_y = \{H^{(f)}, q\}, \quad q_{yy} = \{H^{(f)}, q_y\}.$$

Здесь “гамильтониан” равен

$$H^{(f)} = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[\frac{1}{2} p^2 - \frac{1}{2} \frac{(f_x^2)}{f^2 - 1} - 4(1 - f) \right],$$

а пуассонова структура “фазового” пространства определяется фундаментальными скобками¹⁾: $\{p(x), q(x')\} = \delta(x - x')$.

Уравнение (3.5) полезно тем, что порождает широкое семейство интегрируемых эллиптических уравнений. В дальнейшем будем считать (если не оговорено противное), что $u = u(z, \bar{z})$ — гладкая, вещественнозначная функция, определенная на R_+^2 , и, кроме того,

$$u(x, y) \rightarrow 0, \quad |x| \rightarrow 0. \quad (3.11)$$

Положим $f(z, \bar{z}) = \text{ch } u$. Тогда из (3.5) получим уравнение

$$\Delta u = -4 \text{sh } u. \quad (3.12)$$

Это уравнение возникает в теории двумерных систем Больцмана–Пуассона с отрицательными температурами [24], а также при некоторых редукциях модели Черна–Саймонса [25]. Это уравнение имеет и геометрический смысл, описывая вложение поверхности отрицательной кривизны в трехмерное евклидово пространство [26].

Используя КЭ задач (3.1), (3.2) и (3.11), (3.12), доказанную в [4, 5], а также (3.4) и определение функции f , имеем

$$S_x^2 = 4 \text{ch}^2 \frac{u}{2}, \quad S_y^2 = 4 \text{sh}^2 \frac{u}{2}. \quad (3.13)$$

Эти соотношения связывают между собой “потенциалы” обеих граничных задач. Из них следует, в частности, что КЭ не налагает никаких ограничений на соответствующие “фазовые” пространства (при этом, разумеется, $f > 1$).

Приведем некоторые другие варианты выбора функции $f(z, \bar{z})$ и соответствующие им уравнения, имеющие интересные и важные физические приложения,

$$f(z, \bar{z}) = -\text{ch } u, \quad \partial \bar{\partial} u = \text{sh } u, \quad (3.14)$$

$$f(z, \bar{z}) = e^{\pm u}, \quad \partial \bar{\partial} u = -2 \text{sh } u \pm \frac{\partial u \bar{\partial} u}{e^{\pm 2u} - 1}, \quad (3.15)$$

$$f(z, \bar{z}) = -e^{\pm u}, \quad \partial \bar{\partial} u = 2 \text{sh } u \pm \frac{\partial u \bar{\partial} u}{e^{\pm 2u} - 1}, \quad (3.16)$$

$$f(z, \bar{z}) = \mp \cos u, \quad \partial \bar{\partial} u = \pm \sin u, \quad (3.17)$$

$$f(z, \bar{z}) = \pm \sin u, \quad \partial \bar{\partial} u = \pm \cos u. \quad (3.18)$$

¹⁾Подчеркнем, что здесь мы не ставим своей целью построение гамильтонова формализма для эллиптических уравнений. К сожалению, в этом случае у нас нет “наглядных” переменных типа действие–угол и все аналогии с гиперболическими переменными оказываются достаточно условными.

Рассмотрим вопрос о КЭ задач (3.1) и (3.11), (3.17). Для этого заметим, что уравнение (3.1) можно переписать в виде

$$c_{ikl} S_k \partial \bar{\partial} S_l = 0,$$

где $c_{ikl} = \epsilon_{ikl}$, ϵ_{ikl} — полностью антисимметричный тензор в R^3 . Уравнение (3.12), а также (3.14)–(3.16) соответствуют, таким образом, модели магнетика с компактным многообразием. Для уравнений (3.16)–(3.18) эта ситуация меняется, и искомая КЭ достигается на некомпактном многообразии $S \in SU(1, 1)$. Положим

$$S = \begin{pmatrix} iS^3 & S^1 - iS^2 \\ S^1 + iS^2 & -iS^3 \end{pmatrix}, \quad S^2 = I. \quad (3.19)$$

Из условия $\det S = -1$ и (3.19) имеем

$$(S^1)^2 + (S^2)^2 - (S^3)^2 = 1;$$

это геометрически означает, что конец вектора $\mathbf{S}$ скользит по поверхности однополостного гиперболоида (в отличие от единичной сферы в “компактном” случае). Матрица S разлагается по базисным элементам алгебры Ли $su(1, 1)$: $S = S^i \pi_i$, причем $\pi_\alpha \pi_\beta = \eta_{\alpha\beta} + i c_{\alpha\beta}^\gamma \pi_\gamma$, где $\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3$, $\eta = \{\eta_{\alpha\beta}\} = \text{diag}(1, 1, -1)$ — метрика Киллинга, $c_{\alpha\beta}^\gamma$ — структурные константы алгебры $su(1, 1)$, а коммутационные соотношения имеют вид $[\pi_\alpha, \pi_\beta] = 2i c_{\alpha\beta}^\gamma \pi_\gamma$.

Для уравнения (3.17) (со знаком “+”) из (3.4) и выражения для f находим

$$\begin{aligned} (S_x^1)^2 + (S_x^2)^2 - (S_x^3)^2 &= 4 \sin^2 \frac{u}{2}, \\ (S_y^1)^2 + (S_y^2)^2 - (S_y^3)^2 &= -4 \cos^2 \frac{u}{2}, \end{aligned}$$

а из требования сохранения асимптотики получаем, что КЭ с (3.1), (3.2) достигается при условии $u(x, 0) \rightarrow \pi \pmod{2\pi}$; при этом ограничения на пространстве $\mathcal{M}^{(S)}$ соответствующей $O(1, 2)$ - σ -модели имеют вид системы дифференциальных неравенств

$$\begin{aligned} 0 &\leq (S_x^1)^2 + (S_x^2)^2 - (S_x^3)^2 \leq 4, \\ -4 &\leq (S_y^1)^2 + (S_y^2)^2 - (S_y^3)^2 \leq 0. \end{aligned}$$

Совершенно аналогично устанавливаются условия КЭ и с другими уравнениями из приведенного списка.

Уравнения (3.15), (3.16), по-видимому, являются новыми. Интересно найти применения этим уравнениям, рассматривая их как обобщение уравнений Больцмана–Пуассона (при положительных температурах для (3.16) и отрицательных для (3.15)) на случай

квантово-классической системы, а также осуществить их квантование. Мы не исключаем и другие возможные приложения этих уравнений в физике и геометрии (некоторый регулярный метод получения $(2+0)$ -уравнений в дифференциальной геометрии поверхностей дан в [27])²⁾.

В [28] была предложена релятивистски-инвариантная модель теории поля, которая в эллиптическом варианте и однокомпонентном случае имеет вид

$$\partial\bar{\partial}w = -w(1-w^2) - \frac{w\partial w\bar{\partial}w}{1-w^2}, \quad w = \bar{w}. \quad (3.20)$$

Уравнение (3.20) естественно назвать эллиптической моделью Гетманова (близкое к этому уравнение было рассмотрено в [29] для комплекснозначной функции). Известно, что в гиперболическом варианте эта модель калибровочно-эквивалентна уравнению синус-Гордон в пространстве Минковского [28]. Решение (3.20) легко связать с решением уравнения (3.5): $f = 1 - 2w^2$. Это позволяет, в частности, из $F^{(f)}$ получить плотность производящего функционала для (3.20):

$$\hat{F}^{(G)} = 8 \left(\frac{\partial w \bar{\partial} w}{w^2 - 1} + w^2 \right).$$

Установленные здесь варианты КЭ ряда моделей на полуплоскости с моделью (3.1), (3.2), строго говоря, нуждаются в более строгом математическом доказательстве, включая демонстрацию переходов от этих моделей к σ -модели. Очевидно, что в каждом конкретном случае это может быть сделано с помощью соответствующих ассоциированных линейных задач и построения матриц калибровочного преобразования.

4. ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ sh-ГОРДОН

Рассмотрим плазму, состоящую из электронов и однозарядных ионов. Предполагается, что температура электронов и ионов одинакова и каждая из компонент плазмы срелаксировала к распределению Больцмана. В этом случае безразмерный потенциал электрического поля u удовлетворяет уравнению Пуассона–Больцмана [30]

$$\Delta u = 4 \operatorname{sh} u. \quad (4.1)$$

Здесь $u = e\Phi/T$, Δ – двумерный оператор Лапласа в безразмерных переменных, $\mathbf{r} = \mathbf{R}/2r_D$, e – заряд электрона, T – температура, Φ – размерный потенциал, $\mathbf{R}$ – размерный радиус-вектор, $r_D = T/(8\pi en_0)^{1/2}$ – дебаевский радиус, $n_0 = n_{0e} = n_{0i}$ – концентрации электронов и ионов.

Уравнение (4.1) возникает и в других физических задачах: в теории сильных электролитов, пленок собственных проводников [31], $O(2,1)$ - σ -модели [32], при вычислении

²⁾ Точные решения уравнения (3.16) методом преобразования Дарбу построены в [7], где также рассмотрена связь этого уравнения с уравнением Бицадзе.

электростатического вклада в свободную энергию молекулы ДНК [33] и т.д. К этому же уравнению приводит и размерная редукция (от четырех измерений к двум) уравнений самодуальности для $SU(2)$ -значных полей Янга–Миллса при специальном выборе анзаца [34]. В [34] предполагалось, что имеет место спонтанное нарушение калибровочной симметрии: часть компонент потенциалов стремится при $r \rightarrow \infty$ к постоянным матрицам, причем половина из них играет роль хиггсовских бозонов, что и приводит к соответствующей (4.1) массивной теории поля.

Заметим также, что имеются достаточно строгие процедуры вывода (4.1) из цепочки уравнений Боголюбова–Борна–Грина–Кирквуда–Ивона [35].

Будем предполагать, что (4.1) определено на полуплоскости R_+^2 , причем

$$u(x, y) \rightarrow 0, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow \infty, \quad (4.2)$$

где $u = u(x, y)$ – вещественнозначная и достаточно гладкая функция.

Целесообразно рассмотреть вначале линеаризованный вариант (4.1), (4.2), соответствующий приближению Дебая–Хюккеля. В этом случае решение, полученное в параметризации преобразования Фурье, имеет вид

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda} b_B(\lambda) e^{ik(\lambda)x - l(\lambda)y}, \\ b_B(\lambda) &= \frac{1}{4} \int dx e^{-ik(\lambda)x} [l(\lambda)u(x, 0) - u_y(x, 0)]. \end{aligned} \quad (4.3)$$

В (4.3) $k(\lambda) = \lambda - \lambda^{-1}$, $l(\lambda) = \lambda + \lambda^{-1}$. Предполагается, что поверхностная плотность заряда на границе $u_y(x, 0)$ при $|x| \rightarrow \infty$ убывает быстрее, чем $\exp(-2|x|)$. При этом величина $b_B(\lambda)$ допускает аналитическое продолжение с вещественной оси в область на плоскости комплексной переменной $\lambda = \lambda_R + i\lambda_I$, ограниченную строфоидой $\lambda_R^2(2 - \lambda_I) - \lambda_I(\lambda_I - 1)^2 < 0$ и включающую в себя единичную полуокружность в правой полуплоскости. В указанной области $b_B(\lambda) = b_B(1/\bar{\lambda})$ в силу вещественности u .

Решение (4.3) имеет место при граничном условии

$$b_B(\lambda) = 0, \quad \lambda = \bar{\lambda} < 0, \quad (4.4)$$

$$u(x, 0) + \frac{1}{\pi} \int dx' K_0(2|x - x'|) u_y(x', 0) = 0, \quad (4.5)$$

вытекающем из требования ограниченности u при $r \rightarrow \infty$. В (4.5) $K_0(x)$ – функция Макдональда. Равенство (4.5) является преобразованием Фурье от соотношения (4.4). Асимптотика решения (4.3) при $r \rightarrow \infty$ вычисляется методом перевала:

$$u(\mathbf{r}, \alpha) \simeq (\pi r)^{-\frac{1}{2}} b_B[i \exp(-i\alpha)] \exp(-2r), \quad (4.6)$$

где $x = r \cos \alpha$, $y = r \sin \alpha$. Выражение (4.6) описывает эффект линейного дебаевского экранирования.

Перейдем к задаче (4.1), (4.2), предполагая, что заданные функции $u(x, 0)$ и $u_y(x, 0)$ не могут в заданном классе функций (например, в классе Шварца) быть произвольными, а связаны некоторым условием (аналогичным (4.5)), сформулированным ниже.

Соответствующая вспомогательная линейная система уравнений для (4.1) имеет вид

$$\Psi_x = \left[\left(i \frac{\lambda}{2} + \frac{\operatorname{ch} u}{2i\lambda} \right) \sigma_3 - \frac{u_z}{2} \sigma_2 - \frac{\operatorname{sh} u}{2\lambda} \sigma_1 \right] \Psi, \quad (4.7)$$

$$\Psi_y = \left[- \left(\frac{\lambda}{2} + \frac{\operatorname{ch} u}{2\lambda} \right) \sigma_3 - i \frac{u_z}{2} \sigma_2 - \frac{\operatorname{sh} u}{2i\lambda} \sigma_1 \right] \Psi. \quad (4.8)$$

Введем матричные решения Йоста (4.7), заданные асимптотиками

$$\Psi^\pm = (\Psi_1^\pm, \Psi_2^\mp) = e^{ikx\sigma_3/2} (1 + o(1)), \quad x \rightarrow \pm\infty. \quad (4.9)$$

Положим

$$\Psi^+ = \Psi^- T(\lambda), \quad T(\lambda) = \begin{pmatrix} a(\lambda) & b(\lambda) \\ c(\lambda) & d(\lambda) \end{pmatrix}, \quad \lambda = \bar{\lambda}, \quad (4.10)$$

где $T(\lambda)$ – матрица перехода. Она обладает свойствами, следующими из (4.7), (4.10),

$$T(-\lambda) = \sigma_2 T(\lambda) \sigma_2, \quad \bar{T}(\lambda) = T\left(\frac{1}{\bar{\lambda}}\right), \quad (4.11)$$

а также свойством унимодулярности $\det T(\lambda) = 1$. Из (4.11) имеем

$$\bar{a}(\lambda) = a\left(\frac{1}{\bar{\lambda}}\right), \quad \bar{b}(\lambda) = b\left(\frac{1}{\bar{\lambda}}\right), \quad (4.12)$$

причем вторая инволюция имеет место, строго говоря, при $\lambda = \bar{\lambda}$, однако допускает аналитическое продолжение в некоторую область на комплексной плоскости (более точная информация об этой области в дальнейшем нам не понадобится). Положим $\phi^\pm = \Psi^\pm e^{-ikx\sigma_3/2} = (\phi_1^\pm, \phi_2^\mp)$. Тогда интегральные уравнения Вольterra прямой задачи, эквивалентные (4.7), примут вид

$$\phi_j^\pm(x, \lambda) = e_j + \int dx' g_j^\pm(x - x', \lambda) Q(x', \lambda) \phi_j^\pm(x', \lambda), \quad (4.13)$$

где $j = 1, 2$, $e_1 = (1, 0)^T$, $e_2 = (0, 1)^T$, а матрица Q есть

$$Q(x, \lambda) = \begin{pmatrix} \frac{\operatorname{ch} u - 1}{2i\lambda} & -\frac{\operatorname{sh} u}{2\lambda} + \frac{iu_z}{2} \\ -\frac{\operatorname{sh} u}{2\lambda} - \frac{iu_z}{2} & -\frac{\operatorname{ch} u - 1}{2i\lambda} \end{pmatrix}.$$

Здесь $g_j^\pm$ – затравочные функции Грина:

$$\begin{aligned} g_1(x, \lambda) &= \mp \theta(\mp x) \operatorname{diag}(1, e^{-ikx}), \\ g_2(x, \lambda) &= \pm \theta(\pm x) \operatorname{diag}(e^{ikx}, 1). \end{aligned} \quad (4.14)$$

Из (4.13) следует, что

$$\phi_1^+, \phi_2^- \in H(\Omega^+), \quad \phi_1^-, \phi_2^+ \in H(\Omega^-), \quad (4.15)$$

где $H(\Omega)$ – класс функций, аналитичных в области Ω , $\Omega^+ = \{\lambda: \operatorname{Im} \lambda > 0\}$.

Учитывая (4.10) и (4.13), имеем интегральные представления для данных рассеяния $a(\lambda)$ и $b(\lambda)$:

$$a(\lambda) = 1 - \int dx \langle e_1^T, Q(x, \lambda) \phi_1^+(x, \lambda) \rangle, \quad (4.16)$$

$$b(\lambda) = \int dx e^{-ik(\lambda)x} \langle e_1^T, Q(x, \lambda) \phi_2^+(x, \lambda) \rangle, \quad (4.17)$$

где символ $\langle, \rangle$ означает скалярное произведение векторов в $\mathbb{C}^2$. Из уравнения (4.8) стандартным образом следуют соотношения, описывающие эволюцию спектральных данных,

$$a(y, \lambda) = a(y, 0), \quad b(y, \lambda) = b(0, \lambda) e^{-l(\lambda)y}, \quad (4.18)$$

откуда легко видеть, что требование конечности $b(y, \lambda)$ для любого $y > 0$ приводит к условию

$$b(\lambda) = 0, \quad \lambda = \bar{\lambda} < 0, \quad (4.19)$$

и, следовательно, в спектре оператора ассоциированной линейной задачи возникает лачуна (см. также [3, 36]). Обратившись к (4.17), видим, что в терминах функций $u(x, 0)$ и $u_y(x, 0)$ возникает условие, аналогичное (4.5).

Рассмотрим подробнее свойства коэффициента $a(\lambda)$. Из (4.16) следует $a(\lambda) = 1 + O(1/\lambda)$, $|\lambda| \rightarrow \infty$, $a(\lambda) \in H(\Omega^+)$, а из унитарности $T(\lambda)$ и (4.19) имеем $a(\lambda)a(-\lambda) = 1$. Отсюда с учетом (4.16) получим $a(0) = 1$. Предположив теперь, что существуют простые нули коэффициента $a(\lambda)$: $a(\lambda_n) = 0$, $\operatorname{Im} \lambda_n > 0$, $n = 1, \dots, N$, и учитывая условие $u = \bar{u}$, а также (4.12), будем иметь еще одно представление для $a(\lambda)$:

$$a(\lambda) = \prod_{n=1}^{2N_1} \frac{\lambda - \lambda_n}{\lambda + \lambda_n} \prod_{m=2N_1+1}^{2N_1+N_2} \frac{(\lambda - \lambda_m) \left(\lambda - \frac{1}{\bar{\lambda}_m} \right)}{(\lambda + \lambda_m) \left(\lambda + \frac{1}{\bar{\lambda}_m} \right)}, \quad (4.20)$$

где $2N_1 + 2N_2 = N$, а нули λ_n , $1 \leq n \leq 2N_1$, лежат на единичной окружности (аналогии кинков для гиперболического варианта уравнения синус-Гордон [21]). Нули λ_m и $1/\bar{\lambda}_m$,

$2N_1 + 1 \leq m \leq 2N_1 + N_2$, образуют инверсию относительно единичной окружности (аналоги бризеров [21]). Очевидно, что топологический заряд в модели отсутствует³⁾.

Из первого соотношения (4.18) следует, в частности, что величину $\ln a(\lambda)$ можно рассматривать как производящий функционал интегралов “движения”. Стандартная процедура приводит систему уравнений для элементов столбца ϕ_1^+ к следующему уравнению Риккати:

$$F_x + Q_{12}F^2 = -ik(\lambda)F + (Q_{22} - Q_{11})F + Q_{21}, \quad (4.21)$$

где $F = \phi_{21}^+/\phi_{11}^+$, а для $\ln a(\lambda)$ получим

$$\ln a(\lambda) = - \int_{-\infty}^{\infty} dx [Q_{11} + Q_{12}F]. \quad (4.22)$$

Полагая

$$\begin{aligned} F &= \sum_{k=0}^{\infty} F_{-k} \lambda^k, \quad |\lambda| \rightarrow 0; \quad F = \sum_{k=1}^{\infty} F_k \lambda^{-k}, \quad |\lambda| \rightarrow \infty; \\ R &= Q_{11} + Q_{12}F = \sum_{k=0}^{\infty} R_{-k} \lambda^k, \quad |\lambda| \rightarrow 0; \quad R = \sum_{k=1}^{\infty} R_k \lambda^{-k}, \quad |\lambda| \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

из (4.21) будем иметь

$$\begin{aligned} R_{-1} &= \frac{i}{2}[(\operatorname{ch} u - 1) + u_z^2] + \frac{i}{2}u_x^2 - i\partial_x^2 \ln\left(\frac{\operatorname{ch} u}{2}\right) - \frac{\operatorname{ch} u - 1}{2\partial_x\left(\frac{u_z}{\operatorname{sh} u}\right)}, \\ R_0 &= \partial_x \ln\left(\frac{\operatorname{ch} u}{2}\right), \quad R_1 = -\frac{i}{2}[(\operatorname{ch} u - 1) + u_z^2], \\ R_2 &= -\frac{1}{8}\partial_x(u_z^2) \end{aligned}$$

и т.д. Поскольку левая часть (4.22) не зависит от y , то правую часть можно вычислять при $y = 0$, что дает бесконечное число законов сохранения.

Пусть теперь

$$\ln a(\lambda) = \sum_{s=1}^{\infty} I_s \lambda^{-s}, \quad |\lambda| \rightarrow \infty$$

и

$$\ln a(\lambda) = \sum_{s=0}^{\infty} I_{-s} \lambda^s, \quad |\lambda| \rightarrow 0.$$

Из (4.12) следует, что $I_s = \bar{I}_{-s}$, $I_{2s} = 0$ и $I_0 = 0$. Используя (4.20)–(4.22), приходим к тождеству следов ($s = 1, 2, \dots$):

$$\frac{2}{2s-1} \left[\sum_{m=1}^{2N_1} \lambda_m^{2s-1} + \sum_{n=2N_1+1}^{2N_1+N_2} (\lambda_n^{2s-1} + \bar{\lambda}_n^{-2s+1}) \right] = \int dx R_{2s-1}(x). \quad (4.23)$$

³⁾В отличие от уравнения $\Delta u = \sin u$ (см. [37, 38]).

Величины R_{2s} представляют собой либо нули, либо полные производные по x , интегралы от которых обращаются в нуль вследствие (4.2).

Перейдем к решению обратной задачи. Стандартные рассуждения, использующие аналитические свойства решений $\phi_{1,2}^\pm$, приводят к задаче Римана о восстановлении ку-сочно-аналитической вектор-функции по ее скачку на границе ($\lambda = \bar{\lambda}$):

$$\frac{\phi_2^+(x, y, \lambda)}{a(\lambda)} = \phi_2^-(x, y, \lambda) + r(y, \lambda)e^{ik(\lambda)x}\phi_1^+(x, y, \lambda), \quad (4.24)$$

где $r(y, \lambda) = b(y, \lambda)/a(\lambda) = b(0, \lambda)/a(\lambda)e^{-l(\lambda)y} = r(0, \lambda)e^{-l(\lambda)y}$ — коэффициент отражения. В итоге после ряда вычислений получаем следующую систему сингулярных интегральных уравнений обратной задачи:

$$\begin{aligned} \phi_1^+ = e_1 + i \sum_{n=1}^N \frac{m_n(y)e^{ik(\lambda_n)x}}{\lambda + \lambda_n} \sigma_2 \phi_{1n}^+(x, y) - \\ - \int_0^\infty \frac{d\mu}{2\pi} \frac{r(y, \mu)e^{ik(\mu)x}}{\mu + \lambda + i0} \sigma_2 \phi_1^+(\mu), \end{aligned} \quad (4.25)$$

$$\begin{aligned} \phi_{1m}^+ = e_1 + i \sum_{n=1}^N \frac{m_n(y)e^{ik(\lambda_n)x}}{\lambda_m + \lambda_n} \sigma_2 \phi_{1n}^+(x, y) - \\ - \int_0^\infty \frac{d\mu}{2\pi} \frac{r(y, \mu)e^{ik(\mu)x}}{\mu + \lambda_m} \sigma_2 \phi_1^+(\mu), \end{aligned} \quad (4.26)$$

где $N = 2(N_1 + N_2)$, $m_n = b_n/a'(\lambda_n)$ — коэффициенты перехода дискретного спектра, причем $m_n = -\lambda_n^2 \bar{m}_n$ при $1 \leq n \leq 2N_1$ и $m_n = -\bar{\lambda}_n^2 m_{n+N_2}$ при $2N_1 + 1 \leq n \leq 2N_1 + N_2$. В (4.25), (4.26) $\phi_1^+(x, y, \lambda)$ и $\phi_{1n}^+(x, y)$ — собственные функции непрерывного и дискретного спектров, соответственно.

Систему (4.25), (4.26) необходимо дополнить формулами восстановления потенциала. Полагая

$$\phi^+(x, y, \lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \phi_k^+ \lambda^k, \quad |\lambda| \rightarrow 0,$$

подставляя это разложение в матричное уравнение для ϕ^+ и сравнивая с соответствующим разложением (4.7), найдем одну из формул восстановления потенциала:

$$i \operatorname{sh} \frac{u}{2} = \sum_{n=1}^N \frac{\phi_{11n}^+ e^{ik(\lambda_n)x}}{\lambda_n} m_n(y) - \int_0^\infty \frac{d\mu}{2\pi i} \frac{r(y, \mu)}{\mu} \phi_{11}^+(x, y, \mu) e^{ik(\mu)x}. \quad (4.27)$$

Аналогичное разложение при $|\lambda| \rightarrow \infty$ дает

$$\frac{u_x - iu_y}{4} = \sum_{i=1}^N \phi_{11i}^+ e^{ik(\lambda_i)x} m_i(y) - \int_0^\infty \frac{d\mu}{2\pi i} r(y, \mu) \phi_{11}^+(x, y, \mu) e^{ik(\mu)x}. \quad (4.28)$$

Соотношения (4.25)–(4.28) позволяют построить простейшие решения уравнения (4.1). Рассмотрим вначале “бессолитонный” случай $a(\lambda) = 1$. Система (4.25) при $r \rightarrow \infty$ тогда легко итерируется, и первая итерация дает $\phi_{11}^+(r, \lambda) = 1 + O(1/r)$. Тогда из (4.27) с учетом того, что $u(r, \alpha) \rightarrow 0$, $r \rightarrow \infty$, $\alpha \in [0, \pi]$, имеем

$$u(r, \alpha) \cong \int_0^\infty \frac{d\mu}{\pi} \frac{b(0, \mu)}{\mu} e^{rf(\mu)}, \quad (4.29)$$

где $f(\mu) = ik(\mu) \cos \alpha - l(\mu) \sin \alpha$. Считая возможным аналитическое продолжение $b(\mu)$ в требуемую область на комплексной плоскости, получим

$$u(r, \alpha) \cong \frac{b(0, ie^{-i\alpha})}{\sqrt{\pi r}} e^{-2r} \left[1 + O\left(\frac{e^{-2r}}{r}\right) \right], \quad r \rightarrow \infty. \quad (4.30)$$

Сравнивая это выражение с (4.6), видим, что они отличаются лишь заменой $b_B \rightarrow b$ и (4.30) переходит в (4.6) в случае достаточно слабых полей. Такой эффект можно назвать квазилинейным дебаевским экранированием: его масштаб такой же, как и в линейном случае, а влияние сильных полей сводится к перенормировке предэкспоненциального фактора – эффективного заряда границы, дающего вклад в асимптотику потенциала.

Пусть теперь $b(\lambda) = 0$, $0 \leq \lambda \leq \infty$, т.е. рассматривается случай безотражательных потенциалов. Система уравнений обратной задачи сводится тогда к системе линейных алгебраических уравнений. С учетом (4.28) получаем N -“солитонное” решение

$$u(x, y) = 2 \ln \frac{\Delta^+}{\Delta^-}, \quad \Delta^\pm = \det \left(\delta_{mn} \pm \frac{im_n(y)}{\lambda_m + \lambda_n} \exp \left\{ i \frac{x}{2} [k(\lambda_n) - k(\lambda_m)] \right\} \right). \quad (4.31)$$

Здесь $1 \leq m, n \leq N$. Одному из таких простейших решений (аналогу бризера) отвечает $N_1 = 0$, $N_2 = 1$, $\lambda_1 = 1/\bar{\lambda}_2 = \exp(\gamma + i\theta)$, $m_1(0) = \lambda_1^2 m_2(0) = \exp(\delta + i\rho)$. Из (4.31) следует

$$u(x, y) = 2 \ln \frac{1+h}{1-h}, \quad h = \frac{\sin[2r \operatorname{sh} \gamma \cos(\theta + \alpha) + \rho - \theta] \operatorname{ch} \gamma}{\operatorname{ch} \left[2r \operatorname{ch} \gamma \sin(\theta + \alpha) + \gamma - \delta - \ln \frac{\operatorname{th} \gamma}{2} \right]}. \quad (4.32)$$

В случае общего положения ($\theta + \alpha \neq 0, \pi$) это решение описывает волну зарядовой плотности, при $r \rightarrow \infty$ затухающую по закону

$$u \sim \exp(-2r \operatorname{ch} \gamma |\sin(\theta + \alpha)|). \quad (4.33)$$

Параметры, входящие в (4.32), могут быть связаны со значениями поля на границе $y = 0$ посредством тождеств следов (4.23), принимающих вид

$$\operatorname{ch} \gamma \cos \theta = -\frac{1}{32} \int dx u_x(x, 0) u_y(x, 0), \quad (4.34)$$

$$\operatorname{ch} \gamma \sin \theta = -\frac{1}{32} \int dx \left[4(\operatorname{ch} u(x, 0) - 1) + \frac{1}{2}(u_x^2(x, 0) - u_y^2(x, 0)) \right]. \quad (4.35)$$

При $\theta + \alpha = \pi$, как видно из (4.32), затухание поля отсутствует, т.е. в этом направлении имеет место дальний порядок — возникает когерентная структура распределения электрического поля и плотностей компонент плазмы с существенным разделением зарядов. Отметим также, что при $h = \pm 1$ решение (4.32) становится сингулярным (этот случай здесь не рассматривается).

Другое простейшее решение (аналог кинка), следующее из (4.31), получается при $N_1 = 1$, $N_2 = 0$, $\lambda_n = e^{i\theta_n}$, $n = 1, 2$, $m_{1,2}(0) = ie^{\delta_{1,2} + i\theta_{1,2}}$:

$$h = \frac{\operatorname{ch} \left[2r \sin \left(\frac{\theta_1 - \theta_2}{2} \right) \cos \left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2} + \alpha \right) - \frac{\delta_1 - \delta_2}{2} \right] \operatorname{ctg} \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}}{\operatorname{sh} \left[2r \cos \left(\frac{\theta_1 - \theta_2}{2} \right) \sin \left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2} + \alpha \right) - \frac{\delta_1 + \delta_2}{2} - \ln \left(\frac{1}{2} \operatorname{tg} \left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \right) \right) \right]}. \quad (4.36)$$

Этот случай соответствует нелинейному дебаевскому экранированию. При $r \rightarrow \infty$ имеем

$$h \sim e^{-2r \sin(\theta_1 + \alpha) + 2\delta_1} + e^{-2r \sin(\theta_2 + \alpha) + 2\delta_2}, \quad 0 < \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} + \alpha < \pi. \quad (4.37)$$

В (4.37) “выживает” член с меньшим коэффициентом при $2r$ в экспоненте: этот коэффициент всегда меньше единицы, т.е. при нелинейном дебаевском экранировании поле затухает медленнее, чем в квазилинейном случае, причем затухание является анизотропным. Параметры, характеризующие затухание в (4.37), могут быть связаны с граничными значениями полей с помощью формул следов (4.34), (4.35), если в них заменить $\operatorname{ch} \gamma$ на $\cos[(\theta_1 - \theta_2)/2]$, а θ на $(\theta_1 + \theta_2)/2$.

Более медленный закон убывания потенциала при нелинейном дебаевском экранировании объясняется влиянием давления электрического поля: оно “расталкивает” электроны и ионы в поляризационном облаке, окружающем границу. Обнаруженные здесь коллективные нелинейные явления: нитевидное “просвечивание” плазмы электрическим полем и более медленный характер его затухания, имеют место, по-видимому, только в двумерном случае. При этом поле между точечными зарядами убывает медленнее, чем в трехмерии, что и объясняет возникновение дальних корреляций.

Рассмотрим некоторые энергетические и термодинамические соотношения. Полная энергия среды (в безразмерных величинах) имеет вид

$$E = \int dx dy [(\Delta u)^2 + 4u \operatorname{sh} u]. \quad (4.38)$$

В линейном случае это соотношение можно представить так:

$$E = \int dx dy [(\Delta u)^2 + 4u^2] = E_f^{(x)} + E_f^{(y)} + E_p. \quad (4.39)$$

Пользуясь (4.3) и соотношением

$$\int dx e^{i[k(\lambda) + k(\mu)]x} = \frac{2\pi}{\lambda l(\lambda)} \delta\left(\mu - \frac{1}{\lambda}\right)$$

и вычисляя $E_f^{(x)}$, $E_f^{(y)}$ и E_p , получим

$$E_f^{(x)} = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda} |b_B(\lambda)|^2 \left(\frac{k(\lambda)}{l(\lambda)} \right)^2, \quad E_f^{(y)} = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda} |b_B(\lambda)|^2, \quad (4.40)$$

при этом

$$E = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda} |b_B(\lambda)|^2. \quad (4.41)$$

Переходя к нелинейному случаю, ограничимся “бессолитонным” сектором; при этом мы можем точно вычислить аналогичные величины только для суммы $E_f^{(x)} + E_f^{(y)}$ и только для непрерывного спектра (в остальных случаях интегралы будут расходящимися). Из (4.28) имеем

$$\frac{u_x - iu_y}{4} = - \int_0^\infty \frac{d\mu}{2\pi i \mu} r(y, \mu) \chi_{11}^+(x, y, \mu),$$

где вводится функция $\chi_1^\pm(x, y, \lambda) = \phi_1^\pm(x, y, \lambda) e^{ik(\lambda)x}$. Отсюда следует

$$\begin{aligned} \int dx dy (u_x^2 + u_y^2) &= 4 \int_0^\infty \frac{d\mu d\lambda}{\pi \mu \lambda} r(0, \mu) \bar{r}(0, \lambda) \times \\ &\times \int_0^\infty dy e^{-[l(\lambda) + l(\mu)]x} \int dx \chi_{11}^+(x, \mu) \bar{\chi}_{11}^+(x, \lambda). \end{aligned} \quad (4.42)$$

Таким образом, для вычисления интеграла необходимо знать соотношения ортогональности для функций $\chi_{11}^+(x, \lambda)$. Метод их получения состоит в следующем: написав интегральные уравнения на $\chi_{11}^+(x, \lambda)$ и $\bar{\chi}_{11}^+(x, \lambda)$ и перемножив их, воспользуемся формулами

$$\begin{aligned} \int dx \theta(\xi - x) e^{-i[k(\lambda) - k(\mu)](x - \xi)} &= \frac{\pi \mu \delta(\lambda - \mu)}{l(\lambda)} - iP \frac{1}{k(\lambda) - k(\mu)}, \\ \int dx \theta(\xi_1 - x) \theta(\xi_2 - x) e^{-i[k(\lambda) - k(\mu)]x - ik(\lambda)\xi_1 + ik(\mu)\xi_2} &= \\ &= \left(\frac{\pi \mu \delta(\lambda - \mu)}{l(\mu)} - iP \frac{1}{k(\lambda) - k(\mu)} \right) \Gamma_0, \end{aligned}$$

где P – символ главного значения интеграла,

$$\Gamma_0 = \begin{cases} e^{-ik(\mu)\xi_1 + ik(\mu)\xi_2}, & \xi_1 > \xi_2, \\ e^{ik(\lambda)\xi_2 - ik(\lambda)\xi_1}, & \xi_2 > \xi_1, \\ 1, & \xi_1 = \xi_2. \end{cases}$$

После ряда вычислений найдем

$$\int dx \chi_{11}^+(x, \lambda) \bar{\chi}_{11}^+(x, \lambda) = \frac{\pi \mu \delta(\lambda - \mu)}{l(\mu)} (|a(\mu)|^2 + 1) - iP \frac{a(\lambda) \bar{a}(\mu) - 1}{k(\lambda) - k(\mu)},$$

и окончательно

$$\int dx dy (u_x^2 + u_y^2) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \frac{d\mu}{\mu} |b(\mu)|^2 \left(1 + \frac{1}{|a(\mu)|^2}\right) \left(\frac{k^2(\mu)}{l^2(\mu)} + 1\right). \quad (4.43)$$

Это выражение в линейном пределе $u \rightarrow 0$ ($a(\mu) = 1$) и $b(\mu) \rightarrow b_B(\mu)$ переходит в (4.41).

Рассмотрим вопрос о заряде среды (в целом). Его суммарная величина равна

$$4 \int_{R^2} dx dy \operatorname{sh} u = \int_{R^2} dx dy \Delta u = - \int d\xi u_y(\xi, 0), \quad (4.44)$$

причем если решение u сингулярно, то в правую часть (4.44) необходимо добавить сумму интегралов по контуру, вырезающему соответствующие особенности. Используя решение типа “бризера” и вычисляя эту сумму, можно показать, что она равна нулю, т.е. снова приходим к (4.44). Итак, это соотношение показывает, что электронейтральность надо понимать в том смысле, что суммарный заряд среды и границы равен нулю.

Весьма наглядную физическую интерпретацию имеют и тождества следов (4.34), (4.35). Для того чтобы это показать, введем максвелловский тензор натяжений электрического поля: $T_{\alpha\beta} = \hat{E}_\alpha \hat{E}_\beta - (1/2) \delta_{\alpha\beta} \hat{\mathbf{E}}^2$, где $\hat{\mathbf{E}} = (\hat{E}_x, \hat{E}_y)$ – вектор электрического поля. Учитывая потенциальность этого поля, будем иметь (в размерных единицах)

$$[\operatorname{rot} \hat{\mathbf{E}}, \hat{\mathbf{E}}]_\alpha = \partial_\gamma T_{\alpha\gamma} - 2T_0 \partial_\alpha \left(\operatorname{ch} \left(\frac{e\Phi}{T} \right) - 1 \right), \quad (4.45)$$

где

$$T_{\xi\eta} = \Phi_\xi \Phi_\eta, \quad T_{\eta\eta} = -\frac{1}{2}(\Phi_\xi^2 - \Phi_\eta^2), \quad (4.46)$$

здесь $\xi = (\sqrt{T}/\alpha)x$, $\eta = (\sqrt{T}/\alpha)y$, $\alpha = \sqrt{2\pi e^2 n_0}$. Из (4.45) имеем

$$\partial_\eta \left[T_{\eta\eta} - 2n_0 T \left(\operatorname{ch} \left(\frac{e\Phi}{T} \right) - 1 \right) \right] = -\partial_\xi T_{\eta\xi}. \quad (4.47)$$

С другой стороны, вычисляя силу, действующую на границу со стороны среды, получим $\hat{F}_\xi = \mathbf{0}$ и

$$\hat{F}_\eta = 2en_0 \int_{R_+^2} d\xi d\eta \operatorname{sh} \left(\frac{e\Phi}{T} \right) \Phi_\eta = -2Tn_0 \int d\xi \left(\operatorname{ch} \frac{e\Phi}{T} - 1 \right). \quad (4.48)$$

Сравнивая (4.35)–(4.48) и (4.34), (4.35), видим, что в “тождестве следов” стоят величины, выражаемые через максвелловский тензор натяжений и силу, действующую на границу.

Рассмотрим некоторые свойства параметра γ , входящего в (4.34), (4.35), считая, что $\gamma = \gamma(T, n_0)$. Заметим, что при $\gamma \rightarrow 0$ решение типа бризера вырождается, собственные значения вспомогательной линейной задачи становятся равными. Пусть это вырождение происходит двояко: а) либо при $n_0 = n_c$ (T произвольная), б) либо при $T = T_c$ (n_0

произвольная). Разлагая в ряд по степеням $(n - n_c)$ или $(T - T_c)$ правые части этих тождеств, найдем поведение γ вблизи критических параметров n_c и T_c .

В случае “а” из (4.34) имеем $\gamma \sim \sqrt{2(n_c - n)/n_c}$, $n \nearrow n_c$. Такое поведение γ справедливо при дополнительном условии, вытекающем из (4.35),

$$\int d\xi \left(\operatorname{ch} \left(\frac{e\Phi_c}{T} \right) - 1 \right) = 0, \quad \Phi_c = \Phi \left(\sqrt{\frac{2\pi e^2 n_c}{T}} \xi, 0 \right). \quad (4.49)$$

Аналогичный анализ в случае “б” дает $\gamma \sim \sqrt{2(T_c - T)/T}$, $T \nearrow T_c$, а условие (4.49) заменяется следующим:

$$4 \int d\xi \left(\operatorname{ch} \left(\frac{e\Phi_c}{T_c} \right) - 1 \right) = \int d\xi \frac{e\Phi_c}{T_c} \operatorname{sh} \left(\frac{e\Phi_c}{T_c} \right), \quad \Phi_c = \Phi \left(\frac{\alpha \xi}{\sqrt{T_c}}, 0 \right). \quad (4.50)$$

Идею о вырождении собственных значений здесь, по-видимому, можно интерпретировать как некоторый “фазовый” переход в данной нелинейной среде. Эта гипотеза, однако, нуждается в дополнительном исследовании.

Авторы признательны А. И. Изергину, П. П. Кулищу и В. Н. Красильникову за внимание к работе и поддержку, оказанную на разных этапах ее выполнения.

Работа была выполнена в рамках гранта РФФИ, код проекта 96-01-00548.

Список литературы

- [1] В. Д. Липовский, С. С. Нижуличев. Вестн. ЛГУ. Сер. Физика, Химия. 1988. Вып. 4 (25). С. 61.
- [2] Е. Ш. Гутшабаиш, В. Д. Липовский. Зап. научн. семин. ЛОМИ. 1990. Т. 180. С. 53.
- [3] Е. Ш. Гутшабаиш, В. Д. Липовский. ТМФ. 1992. Т. 90. № 2. С. 259.
- [4] Г. Г. Варзугин, Е. Ш. Гутшабаиш, В. Д. Липовский. ТМФ. 1995. Т. 104. № 3. С. 513.
- [5] Е. Ш. Гутшабаиш. Вестн. ЛГУ. Сер. Физика, Химия. 1990. Вып. 4 (25). С. 84.
- [6] Е. Ш. Гутшабаиш, В. Д. Липовский. Зап. научн. семин. ЛОМИ. 1992. Т. 199. С. 71.
- [7] Е. Ш. Гутшабаиш. Зап. научн. семин. ЛОМИ. 1997. Т. 245. С. 149.
- [8] В. А. Белинский, В. Е. Захаров. ЖЭТФ. 1978. Т. 75. № 6. С. 1953.
- [9] В. А. Белинский, В. Е. Захаров. ЖЭТФ. 1979. Т. 77. № 1. С. 3.
- [10] D. Maison. Phys.Rev.Lett. 1978. V. 41. № 8. P. 521.
- [11] D. Maison. J. Math. Phys. 1979. V. 20. № 5. P. 871.
- [12] F. A. Bais, R. Sasaki. Nucl. Phys. B. 1982. V. 202. P. 522.
- [13] I. Hauser, F. J. Ernst. J. Math. Phys. 1981. V. 22. № 5. P. 1051.
- [14] Г. Г. Варзугин. ТМФ. 1997. Т. 111. № 3. С. 345.
- [15] A. V. Mikhailov, A. I. Yaremchuk. Nucl. Phys. B. 1982. V. 202. P. 508.
- [16] A. V. Mikhailov. Integrable magnetic models. In: Solitons. Modern problems in condensed matter. V. 17. Ed. Trulinger S. E., Pokrovskii V. L., Zakharov V. E. Amsterdam: North. Holl. Publ. Co., 1986.
- [17] Р. Бэкстер. Точно решаемые модели в статистической механике. М.: Мир, 1985.
- [18] Ю. А. Изюмов, Ю. Н. Скрябин. Статистическая механика магнитоупорядоченных сред. М.: Наука, 1987.
- [19] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982.

- [20] С. П. Бурцев, В. Е. Захаров, А. В. Михайлов. ТМФ. 1987. Т. 70. № 3. С. 323.
- [21] Л. Д. Фаддеев, Л. А. Талтаджян. Гамильтонов подход в теории солитонов. М.: Наука, 1986.
- [22] Ю. А. Изюмов. Дифракция нейтронов на длиннопериодических структурах. М.: Энергоатомиздат, 1987.
- [23] K. Pohlmeyer. Commun. Math. Phys. 1976. V. 46. № 3. P. 207.
- [24] G. Joyce, D. Montgomery. J. Plasma Phys. 1973. V. 10. № 1. P. 107.
- [25] R. Jackiw, So-Young-Pi. Progr. Theor. Phys. Suppl. 1992. V. 107. № 1. P. 1.
- [26] А. И. Бобенко. УМН. 1991. Т. 46. № 4. С. 3.
- [27] Э. Г. Позняк, А. Г. Попов. Докл. РАН. 1993. Т. 332. № 4. С. 418.
- [28] Б. С. Гетманов. Письма в ЖЭТФ. 1977. Т. 25. № 2. С. 132.
- [29] I. V. Barashenkov, B. S. Getmanov. J. Math. Phys. 1993. V. 34. № 7. P. 3054.
- [30] Г. Эккер. Физика полностью ионизированной плазмы. М.: Мир, 1974.
- [31] С. Ю. Доброхотов, В. П. Маслов. Зап. научн. семин. ЛОМИ. 1979. Т. 84. С. 35.
- [32] V. E. Chelnokov, M. G. Tseitlin. Phys. Lett. A. 1983. V. 99. № 4. P. 147.
- [33] М. Д. Франк-Каменецкий, В. В. Аниселевич, А. В. Лукашин. УФН. 1987. Т. 151. № 4. С. 595.
- [34] Ch. K. Sackiogli. J. Math. Phys. 1984. V. 25. № 11. P. 3214.
- [35] D. Montgomery, G. Joyce. Phys. Fluids. 1974. V. 17. № 6. P. 1139.
- [36] M. Jaworski, D. Kaup. Direct and inverse scattering problem associated with elliptic sinh-Gordon equation. Preprint Ins. for Studies. Potsdam: INS, 1989.
- [37] А. Б. Борисов. Нелинейные возбуждения и двумерные топологические солитоны в магнетиках. Докт. дисс. Свердловск: Ин-т физ. металлов, 1986.
- [38] A. B. Borisov, V. V. Kiselev. Physica D. 1988. V. 31. P. 49.

Поступила в редакцию 14.I.1998 г.