Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. О. Соловьев, Бигравитация в гамильтоновом формализме. Тетрадный подход, *ТМФ*, 2015, том 182, номер 2, 350–364

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8775>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.82.47.9

26 апреля 2023 г., 14:01:02

© 2015 г.

В. О. Соловьев*

БИГРАВИТАЦИЯ В ГАМИЛЬТОНОВОМ ФОРМАЛИЗМЕ. ТЕТРАДНЫЙ ПОДХОД

Тетрадный формализм используется для вычисления квадратного корня из матрицы, возникающего в потенциале де Рам–Габададзе–Толи. В минимальном случае получены уравнения связи и их алгебра. Показано, что число гравитационных степеней свободы соответствует безмассовому и массивному полям гравитации. Дух Бульвара–Дезера исключается благодаря двум связям второго рода.

Ключевые слова: бигравитация, биметрическая гравитация, гамильтонов формализм, массивная гравитация, теория гравитации.

DOI: 10.4213/tmf8775

1. ВВЕДЕНИЕ

Проблемы темной энергии и темной материи можно пытаться решить с помощью изменения теории гравитации на больших расстояниях. Среди возможных вариантов новой теории рассматриваются массивная гравитация и бигравитация [1]–[3]. Предложенный в работах де Рам, Габададзе и Толи (дРГТ) [4] потенциал взаимодействия двух метрик дРГТ позволяет построить модель Вселенной в виде двух слабо связанных миров, в каждом из которых имеются своя метрика пространства-времени и свой набор полей материи. При обращении в нуль коэффициентов при потенциале дРГТ каждый из миров описывается общей теорией относительности (ОТО) и теорией ее источников, т. е. полей материи. Таким образом, принцип соответствия требует только малости упомянутых коэффициентов и выбора одного из миров в качестве “нашего”, для которого гравитационная постоянная и вид лагранжиана материи считаются известными. Влияние “теневого мира” проявляется в появлении массивного гравитона в дополнение к безмассовому. При этом полное число гравитационных степеней свободы, как было показано в ряде работ, равняется 7 (2 для безмассового гравитона и 5 для массивного), духовая степень свободы [5] отсутствует. Было построено несколько доказательств последнего утверждения как с помощью метрического формализма [6], [7], так и с помощью тетрадного формализма [8]–[11].

---

*Институт физики высоких энергий, Национальный исследовательский центр “Курчатовский институт”, Протвино, Московская обл., Россия. E-mail: Vladimir.Soloviev@ihep.ru

К сожалению, ввиду громоздкости и сложности большинства упомянутых работ эти доказательства нелегко воспроизвести. Как правило, разные авторы используют разные обозначения и разные переменные. Своей прозрачностью выделяется работа Хинтербишлера и Розен [8], продемонстрировавших преимущество тетрадного подхода над метрическим, но не давших полного анализа связей теории. Мы хотим подчеркнуть, что работа [8] дает только схему доказательства, но не полное доказательство.

Позднее более полный анализ проделали другие авторы. Им пришлось использовать множество новых переменных и специальных трюков, что несколько затемнило сделанные логические шаги и полученные результаты. никоим образом не оспаривая приоритет и правильность уже опубликованных работ, мы здесь впервые предлагаем полный анализ гамильтоновой структуры бигравитации с потенциалом дРГТ в тетрадном гамильтоновом формализме по схеме, предложенной Хинтербишлером и Розен [8]. Наш путь близок к подходу, развитому Клусоном [11], но отличается от него стремлением свести к минимуму число канонических переменных и, соответственно, число связей, а также выбором переменных и некоторыми выводами, которые будут приведены в разделе 7.

Если в метрическом подходе каноническими координатами являются только две индуцированные метрики η_{ij} и γ_{ij} , имеющие по шесть независимых компонент каждая, то в тетрадном подходе их заменяют две 9-компонентные триады f_{ai} и e_{bj} . Все остальные переменные являются вспомогательными, так как в лагранжиане не содержатся их производные по времени. Такие переменные определяются (исключаются) из дополнительных уравнений, которые являются не гамильтоновыми связями, а лишь условиями согласования гамильтоновых связей с динамикой. Достаточно трех новых связей первого рода и шести новых связей второго рода, чтобы прийти к прежнему числу независимых переменных, прочие связи в новом формализме будут все теми же известными связями, с которыми мы уже сталкивались в метрическом подходе. Напоминаем, что в метрическом подходе к бигравитации обнаруживаются четыре связи первого рода, соответствующие свободе выбора времени и пространственных координат, и две связи второго рода, отвечающие за исключение духовых степеней свободы.

В настоящей работе мы стремились использовать те же обозначения, что и в статьях [12], где изучался гамильтонов формализм бигравитации в метрических переменных. В указанных работах мы обошли трудности, связанные с отсутствием явного выражения для потенциала, заменив субстанцию акциденцией, т.е. используя ряд аксиом. Тем интереснее получить в тетрадном подходе новые возможности, возникающие при появлении явных формул для потенциала и его производных, и сравнить полученные здесь и в публикациях [12] результаты.

2. ТЕТРАДНЫЕ ПЕРЕМЕННЫЕ И ИХ ОПТИМАЛЬНЫЙ ВЫБОР

В гамильтоновом формализме необходимо явно отделить временную координату от пространственных. Состояние задается на пространственноподобной гиперповерхности, вложенной в пространство-время. Эволюция соответствует движению этой гиперповерхности через пространство-время, или непрерывному переходу от одной гиперповерхности состояния к другой, т.е. требуется однопараметрическое семейство пространственноподобных гиперповерхностей. Временной координатой t

служит параметр, непрерывно и монотонно нумерующий гиперповерхности, а произвольные пространственные координаты x^i вводятся на одной гиперповерхности и продолжаются на другие так, чтобы линии, соединяющие точки с одними и теми же значениями координат, могли служить мировыми линиями наблюдателей, т. е. были бы времениподобными.

В подходе Арновитта–Дезера–Мизнера (АДМ) [13] выбор семейства пространственноподобных гиперповерхностей $t = \text{const}$ и внутренних координат x^i определяется исходной системой координат пространства-времени X^μ :

$$t = X^0, \quad x^i = X^i,$$

тогда метрика в координатном базисе принимает вид

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -N^2 + \gamma_{mn}N^mN^n & \gamma_{jk}N^k \\ \gamma_{ik}N^k & \gamma_{ij} \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где N , N^i называются функциями смещения и сдвига.

В подходе Кухаржа [14] используются две координатные системы, одна из которых (X^α) является произвольной системой координат пространства-времени, а другая связана с выбранным однопараметрическим семейством пространственноподобных гиперповерхностей, таким, что через любую точку пространства-времени проходит ровно одна гиперповерхность, причем время t является параметром монотонно нумерующим гиперповерхности, а три координаты x^i непрерывно и взаимно однозначно нумеруют точки этих гиперповерхностей. Связь между системами координат дается функциями вложения

$$X^\alpha = e^\alpha(x^i, t).$$

Тогда, если выбор семейства гиперповерхностей сделан, величины

$$e_i^\alpha(x^k, t) \equiv \frac{\partial e^\alpha}{\partial x^i}$$

будут одновременно векторами пространства-времени и ковекторами пространства. Индуцированная на гиперповерхности состояния $t = \text{const}$ метрика определяется формулой

$$\gamma_{ij}(x^k, t) = g_{\mu\nu} e_i^\mu e_j^\nu.$$

Обратные матрицы к метрикам $g_{\mu\nu}$ и γ_{ij} будут обозначаться как $g^{\mu\nu}$ и γ^{ij} соответственно. Мы можем с их помощью поднимать и опускать как греческие, так и латинские индексы:

$$\bar{e}_{\alpha i} = g_{\alpha\beta} e_i^\beta, \quad \bar{e}_\alpha^i = g_{\alpha\beta} e_j^\beta \gamma^{ij}.$$

Здесь с помощью черты над буквой мы отличаем те величины, в определении которых использована метрика, от исходных величин e_i^α , которые от метрики не зависят. В дальнейшем при рассмотрении бигравитации, когда добавится другая метрика $f_{\mu\nu}$, черта будет указывать на величины, построенные с помощью метрики $g_{\mu\nu}$.

Введем ковектор нормали к гиперповерхности

$$n_\alpha e_i^\alpha = 0,$$

которому, используя метрику $g_{\mu\nu}$, сопоставим нормированный вектор:

$$\bar{n}^\alpha = g^{\alpha\beta} \bar{n}_\beta, \quad g^{\mu\nu} \bar{n}_\mu \bar{n}_\nu = -1.$$

По базису $(\bar{n}^\alpha, e_i^\alpha)$ можно разложить любые пространственно-временные векторы и тензоры. В частности, в формализме Кухаржа функции смещения и сдвига являются компонентами разложения по этому базису векторного поля времени:

$$\frac{\partial}{\partial t} = N n^\alpha + N^i e_i^\alpha. \quad (2)$$

Пусть в пространстве-времени заданы тетрады, т.е. четыре векторных поля E_A^μ , $A = (0, a)$, $a = 1, 2, 3$, ортонормированных в каждой точке

$$g_{\mu\nu} E_A^\mu E_B^\nu \equiv E_A^\mu E_{\mu B} = h_{AB},$$

где $h_{AB} = \text{diag}(-1, +1, +1, +1)$, обратную матрицу обозначим как h^{AB} . Тогда определив E_μ^A как $h^{AB} E_{\mu B}$, можно выразить поле метрики через поля тетрад:

$$g_{\mu\nu} = E_\mu^A E_\nu^B h_{AB}, \quad g^{\mu\nu} = E_A^\mu E_B^\nu h^{AB}.$$

В дальнейшем мы будем использовать тетрады в качестве основных переменных теории гравитации и бигравитации. Для гамильтонова формализма наиболее удобно за времениподобный вектор E_0^μ взять вектор единичной нормали к гиперповерхности $\bar{n}^\mu$, тогда остальные три вектора E_a^μ будут касательными к гиперповерхности, поэтому их можно связать с триадами, через которые (аналогично сказанному выше о тетрадах и метрике пространства-времени (при замене A на a , h_{AB} на δ_{ab})) выражается индуцированная 3-метрика

$$\gamma_{ij} = e_i^a e_j^b \delta_{ab} \equiv e_i^a e_j^a \equiv e_{ia} e_{ja},$$

где $e_i^a \equiv e_{ia}$. Связь тетрад с триадами имеет вид

$$E_a^\mu = e_{ia} \bar{e}^{\mu i} \equiv e_{ia} e_j^\mu \gamma^{ij},$$

и обратная связь

$$e_{ia} = E_a^\mu \bar{e}_{\mu i} \equiv E_a^\mu e_i^\nu g_{\mu\nu}.$$

Для метрики получаем

$$g^{\mu\nu} = -E_0^\mu E_0^\nu + E_a^\mu E_a^\nu = -\bar{n}^\mu \bar{n}^\nu + \gamma^{ij} e_i^\mu e_j^\nu. \quad (3)$$

В ковариантных компонентах

$$\begin{aligned} E_\mu^0 &= -\bar{n}_\mu, & E_\mu^a &= e_i^a \bar{e}_\mu^i \equiv e_i^a e_j^\alpha g_{\alpha\mu} \gamma^{ij}, \\ g_{\mu\nu} &= -E_\mu^0 E_\nu^0 + E_\mu^a E_\nu^a = -\bar{n}_\mu \bar{n}_\nu + \bar{e}_\mu^i \bar{e}_\nu^j \gamma_{ij}. \end{aligned} \quad (4)$$

Если в подходе АДМ метрика пространства-времени разлагается по координатному базису пространства-времени (1) и имеет десять компонент N , N^i , γ_{ij} , то в формализме Кухаржа она разлагается по базису $(\bar{n}^\alpha, e_i^\alpha)$, один из векторов которого является единичным и ортогональным к остальным векторам. Вследствие этого при таком разложении метрика имеет лишь шесть нетривиальных компонент (см. (3), (4)).

3. ПОТЕНЦИАЛ БИГРАВИТАЦИИ В ТЕТРАДНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

В метрическом подходе лагранжиан бигравитации является суммой двух отдельных вкладов от каждой из метрик $f_{\mu\nu}$, $g_{\mu\nu}$, по форме совпадающих с лагранжианом ОТО, за вычетом потенциала взаимодействия:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}^{(f)} + \mathcal{L}^{(g)} - N\tilde{U}, \quad (5)$$

где $N\tilde{U} = \sqrt{-g}U$ – плотность потенциала взаимодействия двух метрик, построенного без производных, чисто алгебраически. В настоящей работе мы будем рассматривать только потенциал дРГТ [4], для которого в теории отсутствует духовая степень свободы [6]. Более того, мы ограничимся так называемым минимальным случаем.

В метрическом формализме для получения явного вида потенциала используется смешанный тензор $g^{\mu\alpha}f_{\alpha\nu}$, рассматриваемый как матрица, из которой должен быть извлечен матричный квадратный корень:

$$X^\mu_\nu = \sqrt{g^{\mu\alpha}f_{\alpha\nu}}.$$

Потенциалом дРГТ называется линейная комбинация

$$U = \sum_{i=0}^4 \beta_i U_i$$

симметричных многочленов от собственных значений матрицы X^μ_ν , которые могут быть представлены через следы от степеней матрицы:

$$\begin{aligned} U_0 &= 1, & U_1 &= \text{Tr } X, & U_2 &= \frac{1}{2}((\text{Tr } X)^2 - \text{Tr } X^2), \\ U_3 &= \frac{1}{6}((\text{Tr } X)^3 - 3 \text{Tr } X \text{Tr } X^2 + 2 \text{Tr } X^3), & U_4 &= \frac{\sqrt{-f}}{\sqrt{-g}}. \end{aligned}$$

Здесь мы рассмотрим только минимальный вариант потенциала дРГТ

$$\sqrt{-g}U = \beta_0\sqrt{-g} + \beta_1\sqrt{-g}U_1 + \beta_4\sqrt{-f}.$$

Очевидно, что за взаимодействие метрик отвечает только U_1 , прочие вклады соответствуют двум космологическим членам, введенным для каждой из метрик.

Трудность построения гамильтонова формализма в метрических переменных состоит в невозможности аналитически извлечь из матричного выражения квадратный корень. В работе [6] было предложено сложное преобразование переменных, с помощью которого авторам удалось выяснить наличие в теории двух дополнительных связей второго рода, исключающих духовую степень свободы. В ряде других работ использовался метод полей Штюкельберга. Еще одно направление [12] заключалось в том, чтобы начиная с функции потенциала общего вида вывести условия, при которых реализуются свойства потенциала дРГТ. Однако наиболее прямой путь построения гамильтонова формализма был предложен в статье [8], он состоит в том, чтобы непосредственно извлечь квадратный корень из матрицы с помощью тетрадных переменных. В бигравитации нам потребуется удвоенный набор тетрадных переменных

$$g^{\mu\nu} = E^\mu_A E^\nu_B h_{AB}, \quad f^{\mu\nu} = F^\mu_A F^\nu_B h_{AB},$$

на который следует наложить условия симметричности

$$E_A^\mu F_\mu^B - E^{\mu B} F_{\mu A} = 0. \quad (6)$$

Действительно, в этом случае решением уравнения

$$g^{\mu\alpha} f_{\alpha\nu} = X_\beta^\mu X_\nu^\beta$$

является матрица

$$X_\nu^\mu = E^{\mu A} F_{\nu A}.$$

К сожалению, мы не можем взять в качестве второй тетрады $F_{\nu A}$ величины, построенные аналогично E_A^μ (см. раздел 2) как компоненты оптимальной для гамильтонова формализма ОТО тетрады на основе метрики $f_{\mu\nu}$. До тех пор пока потенциал U выражен только через два метрических тензора, он инвариантен относительно преобразований каждой из тетрад по отдельности, однако, выражая его непосредственно через тетрады с использованием условий симметричности, мы приходим к потенциалу, инвариантному только относительно диагональных (синхронных) лоренц-вращений тетрад

$$E^{\mu A} \rightarrow \Lambda_B^A E^{\mu B}, \quad F_{\nu B} \rightarrow F_{\nu B} \Lambda_A^B.$$

Поэтому мы можем сделать только одну из тетрад оптимальной, а вторую должны считать общей. Как было отмечено в работе [8], любая общая тетрада получается из оптимальной некоторым преобразованием буста

$$\Lambda_B^A = \begin{pmatrix} \varepsilon & p_b \\ p^a & \delta_b^a + \frac{1}{\varepsilon + 1} p^a p_b \end{pmatrix}, \quad \varepsilon = \sqrt{1 + p_a p^a}, \quad (7)$$

где

$$p^a = p_a, \quad h_{AB} \Lambda_C^A \Lambda_D^B = h_{CD}.$$

Тогда матрица X_ν^μ будет иметь следующий общий вид:

$$X_\nu^\mu = E_A^\mu F_\nu^A, \quad F_\nu^A = \Lambda_B^A(p) \mathcal{F}_\nu^B,$$

при этом

$$\begin{aligned} E_0^\mu &= \bar{n}^\mu, & \mathcal{F}_\mu^0 &= -n_\mu, \\ E_a^\mu &= e_{ia} \gamma^{ij} e_j^\mu, & \mathcal{F}_\mu^a &= f_{ia} \eta^{ij} e_j^\beta f_{\beta\mu}, \\ \gamma_{ij} &= e_i^a e_j^b \delta_{ab}, & \eta_{ij} &= f_i^a f_j^b \delta_{ab}, \end{aligned} \quad (8)$$

а след матрицы X_ν^μ определяется формулой

$$\begin{aligned} \text{Tr } X &= E_A^\mu \Lambda_B^A(p) \mathcal{F}_\mu^B = \\ &= -\varepsilon n_\mu \bar{n}^\mu + f_{\mu\nu} \bar{n}^\mu e_j^\nu (p_a f^{ja}) + \gamma^{ij} (e_{ia} f_j^a) + \frac{\gamma^{ij} (e_{ia} p^a) (f_j^b p_b)}{\varepsilon + 1}. \end{aligned}$$

Учитывая полученную в работах [12] связь между двумя базисами

$$\bar{n}^\mu = \sqrt{-g^{\perp\perp}} n^\mu - \frac{g^{\perp i}}{\sqrt{-g^{\perp\perp}}} e_i^\mu \quad (9)$$

и используя введенные там определения переменных u , u^i :

$$u = \frac{1}{\sqrt{-g^{\perp\perp}}}, \quad u^i = -\frac{g^{\perp i}}{g^{\perp\perp}},$$

где

$$g^{\perp\perp} = g_{\mu\nu} n^\mu n^\nu, \quad g^{\perp i} = -g_{\mu\nu} n^\mu e^{\nu i},$$

получаем вид простейшего потенциала (для $\beta_1 \neq 0$, $\beta_2 = \beta_3 = 0$)

$$\tilde{U} = \beta_0 u \sqrt{\gamma} + \beta_1 \sqrt{\gamma} \left(\varepsilon + u(f_i^a e_a^i) + \frac{u}{\varepsilon + 1} (f_i^a p_a)(e_b^i p^b) - u^i (f_i^a p_a) \right) + \beta_4 \sqrt{\eta},$$

или

$$\tilde{U} = \beta_0 u e + \beta_1 e[\varepsilon + u z - (u f p)] + \beta_4 f, \quad (10)$$

где мы ввели обозначения

$$x_{ab} = f_i^a e_b^i, \quad x = x_{aa}, \quad y_{ab} = p_a p_c x_{cb}, \quad y = y_{aa}, \quad z_{ab} = x_{ab} + \frac{y_{ab}}{\varepsilon + 1}, \\ z = z_{aa}, \quad e = \det \|e_{ia}\|, \quad f = \det \|f_{ia}\|, \quad (u f p) = u^i f_i^a p_a.$$

Полезно также обозначение $x^{ij} = f^{ia} e^{ja}$. Переменные x_{ab} , x^{ij} служат переходными матрицами между триадами:

$$f_i^a x^{ab} = e^{ib}, \quad x_{ab} e_i^b = f_{ia}, \\ f_i^a x^{ij} = e^{ja}, \quad x^{ij} e_j^a = f^{ia}.$$

Потенциал (10) линеен по переменным u , u^i и, очевидно, удовлетворяет уравнению Монжа–Ампера

$$\det \left\| \frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial u^a \partial u^b} \right\| = 0,$$

что является необходимым условием отсутствия духов в теории. Ранг гессиана, который в метрическом подходе [12] мы принимали равным 3, здесь равен нулю.

Условия симметричности (6) дают шесть уравнений, их можно переписать в виде

$$G_a \equiv p_a + u p_b x_{ba} - u^j f_j^b \left(\delta_{ab} + \frac{p_a p_b}{\varepsilon + 1} \right) = 0, \quad (11)$$

$$G_{ab} \equiv x_{ab} - x_{ba} + \frac{p_c}{\varepsilon + 1} (p_a x_{cb} - p_b x_{ca}) \equiv z_{[ab]} = 0, \quad (12)$$

где в индексе квадратными скобками мы обозначили антисимметризацию индексов, а круглыми в дальнейшем будем обозначать симметризацию. Первое из условий можно понимать как фиксирующее переменную u^i :

$$u^i = \frac{p_a f^{ib}}{\varepsilon} \left[\delta_{ab} + u \varepsilon \left(x_{ab} - \delta_{ab} \frac{y}{\varepsilon(\varepsilon + 1)} \right) \right]. \quad (13)$$

Второе условие является первичной связью на канонические переменные.

4. ГАМИЛЬТОНИАН И ПЕРВИЧНЫЕ СВЯЗИ

Лагранжиан бигравитации (5) является суммой двух отдельных вкладов от каждой из метрик минус потенциал взаимодействия. Аналогично гамильтониан (с учетом условий симметричности тетрад (11), (12)) может быть записан в виде

$$H = H^{(f)} + H^{(g)} + \int d^3x (N\tilde{U} + \Lambda^a G_a + \Lambda^{ab} G_{ab}).$$

В тетрадном формализме бигравитации каноническими переменными мы считаем 36 функций (f_{ia}, Π^{ia}) , (e_{ia}, π^{ia}) , при этом каждый из гамильтонианов $H^{(f)}$, $H^{(g)}$ включает в себя первичные связи, обеспечивающие свободу выбора триад e_i^a и f_i^a ,

$$L_{ab} = f_{ia}\Pi_b^i - f_{ib}\Pi_a^i, \quad \bar{L}_{ab} = e_{ia}\pi_b^i - e_{ib}\pi_a^i. \quad (14)$$

Каждая из этих связей входит в действие и, соответственно, в гамильтониан со своим множителем Лагранжа:

$$H = \int d^3x (N\mathcal{H} + N^i \mathcal{H}_i + \lambda^{ab} L_{ab}) + \int d^3x (\bar{N} \bar{\mathcal{H}} + \bar{N}^i \bar{\mathcal{H}}_i + \bar{\lambda}^{ab} \bar{L}_{ab}) + \int d^3x (N\tilde{U} + \Lambda^a G_a + \Lambda^{ab} G_{ab}).$$

Следующие формулы дополняют соотношения (8) между каноническими переменными метрического и тетрадного формализма:

$$\Pi^{ij} = \frac{1}{4}(f^{ia}\Pi^{ja} + f^{ja}\Pi^{ia}), \quad \pi^{ij} = \frac{1}{4}(e^{ia}\pi^{ja} + e^{ja}\pi^{ia}).$$

Скобки Пуассона для тетрадных переменных имеют вид

$$\begin{aligned} \{f_{ia}(x), \Pi^{jb}(y)\} &= \delta_a^b \delta_i^j \delta(x, y) = \{e_{ia}(x), \pi^{jb}(y)\}, \\ \{f_{ia}(x), e_{jb}(y)\} &= 0 = \{\pi^{ia}(x), \Pi^{jb}(y)\} = \{f_{ia}(x), f_{jb}(y)\}, \\ \{e_{ia}(x), e_{jb}(y)\} &= 0 = \{\pi^{ia}(x), \pi^{jb}(y)\} = \{\Pi^{ia}(x), \Pi^{jb}(y)\}. \end{aligned}$$

Разумеется, можно называть переменные f_{ia} , Π^{ia} , e_{ia} , π^{ia} не тетрадными, а триадными. Как обсуждалось выше, добавление вектора единичной нормали гиперповерхности превращает триаду в оптимальную тетраду, а преобразование Лоренца (7) делает из нее общую тетраду.

Скобки Пуассона импульсов метрического формализма, выраженных через триадные (они же тетрадные) переменные, обращаются в нуль только на поверхности связей, т. е. в слабом смысле:

$$\begin{aligned} \{\Pi^{ij}(x), \Pi^{kl}(y)\} &= \frac{1}{4}(\eta^{ik} \mathcal{M}^{jl} + \eta^{il} \mathcal{M}^{jk} + \eta^{jk} \mathcal{M}^{il} + \eta^{jl} \mathcal{M}^{ik}), \\ \{\pi^{ij}(x), \pi^{kl}(y)\} &= \frac{1}{4}(\gamma^{ik} \bar{\mathcal{M}}^{jl} + \gamma^{il} \bar{\mathcal{M}}^{jk} + \gamma^{jk} \bar{\mathcal{M}}^{il} + \gamma^{jl} \bar{\mathcal{M}}^{ik}), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^{ij} &= \frac{1}{4} L_{ab} f^{ja} f^{ib} \equiv \frac{1}{4} (f^{ia} \Pi_a^j - f^{ja} \Pi_a^i), \\ \bar{\mathcal{M}}^{ij} &= \frac{1}{4} \bar{L}_{ab} e^{ja} e^{ib} \equiv \frac{1}{4} (e^{ia} \pi_a^j - e^{ja} \pi_a^i). \end{aligned}$$

Аналогичным образом в тетрадных переменных алгебры скобок Пуассона связей $\mathcal{H}$, $\mathcal{H}_i$ и $\overline{\mathcal{H}}$, $\overline{\mathcal{H}}_i$ отличаются от приведенных ниже выражений (15), (16) на вклады, пропорциональные $\mathcal{M}^{ik}$ и $\overline{\mathcal{M}}^{ik}$ соответственно.

Скобки Пуассона величин $\mathcal{H}$, $\mathcal{H}_i$ и $\overline{\mathcal{H}}$, $\overline{\mathcal{H}}_i$ имеют в бигравитации тот же вид, что и в двух копиях ОТО с метриками $f_{\mu\nu}$ и $g_{\mu\nu}$ соответственно:

$$\begin{aligned}\{\mathcal{H}(x), \mathcal{H}(y)\} &= [\eta^{ik}(x)\mathcal{H}_k(x) + \eta^{ik}(y)\mathcal{H}_k(y)]\delta_{,i}(x, y), \\ \{\mathcal{H}_i(x), \mathcal{H}_k(y)\} &= \mathcal{H}_i(y)\delta_{,k}(x, y) + \mathcal{H}_k(x)\delta_{,i}(x, y), \\ \{\mathcal{H}_i(x), \mathcal{H}(y)\} &= \mathcal{H}(x)\delta_{,i}(x, y)\end{aligned}\quad (15)$$

и

$$\begin{aligned}\{\overline{\mathcal{H}}(x), \overline{\mathcal{H}}(y)\} &= [\gamma^{ik}(x)\overline{\mathcal{H}}_k(x) + \gamma^{ik}(y)\overline{\mathcal{H}}_k(y)]\delta_{,i}(x, y), \\ \{\overline{\mathcal{H}}_i(x), \overline{\mathcal{H}}_k(y)\} &= \overline{\mathcal{H}}_i(y)\delta_{,k}(x, y) + \overline{\mathcal{H}}_k(x)\delta_{,i}(x, y), \\ \{\overline{\mathcal{H}}_i(x), \overline{\mathcal{H}}(y)\} &= \overline{\mathcal{H}}(x)\delta_{,i}(x, y).\end{aligned}\quad (16)$$

Отличие только в том, что в бигравитации выражения $\mathcal{H}$, $\mathcal{H}_i$ и $\overline{\mathcal{H}}$, $\overline{\mathcal{H}}_i$ уже не являются связями. В метрическом подходе имеют место формулы

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= \mathcal{H}_M - \frac{\sqrt{\eta}}{\kappa^{(f)}}(R^{(\eta)} - 2\Lambda^{(f)}) - \frac{\kappa^{(f)}}{\sqrt{\eta}}\left(\frac{\Pi^2}{2} - \text{Tr } \Pi^2\right), \\ \overline{\mathcal{H}} &= \overline{\mathcal{H}}_M - \frac{\sqrt{\gamma}}{\kappa^{(g)}}(R^{(\gamma)} - 2\Lambda^{(g)}) - \frac{\kappa^{(g)}}{\sqrt{\gamma}}\left(\frac{\pi^2}{2} - \text{Tr } \pi^2\right),\end{aligned}$$

и

$$\mathcal{H}_i = \mathcal{H}_{iM} - 2\Pi_{i|j}^j, \quad \overline{\mathcal{H}}_i = \overline{\mathcal{H}}_{iM} - 2\pi_{i|j}^j,$$

где $\mathcal{H}_M$, $\mathcal{H}_{iM}$, $\overline{\mathcal{H}}_M$, $\overline{\mathcal{H}}_{iM}$ – вклады полей двух типов материи.

Поскольку величины N , N^i , $\overline{N}$, $\overline{N}^i$ являются компонентами разложения одного и того же векторного поля времени (2) по двум различным базисам (n^α, e_i^α) , $(\overline{n}^\alpha, e_i^\alpha)$, то связь между базисами (9) определяет и связь между компонентами:

$$\overline{N} = Nu, \quad \overline{N}^i = N^i + Nu^i.$$

Кроме (f_{ia}, Π^{ia}) , (e_{ia}, π^{ia}) в гамильтониане имеются неканонические переменные, скорости изменения которых в действие не входят. Заметим, что переменные N , N^i , u , u^i , λ^{ab} , $\overline{\lambda}^{ab}$, Λ^a , Λ^{ab} входят в гамильтониан линейно. Варьирование действия по этим переменным приводит к новым уравнениям¹⁾. Мы увидим, что только часть этих уравнений является первичными связями, налагаемыми на канонические переменные, другая часть может быть использована для нахождения некоторых из перечисленных выше вспомогательных переменных. Для дальнейшего удобно заменить связи (14) их симметричной и антисимметричной комбинациями:

$$\begin{aligned}L_{ab}^+ &\equiv L_{ab} + \overline{L}_{ab} = 0, \\ L_{ab}^- &\equiv L_{ab} - \overline{L}_{ab} = 0,\end{aligned}$$

¹⁾В работе [11] действие варьируется еще и по переменной p_a , что дает три других уравнения для определения переменной u^i (в работе [11] соответствующей переменной является n^i) вместо наших уравнений (11), которые представляют собой половину условий симметричности (6), необходимых для эквивалентности тетрадной и метрической формулировок бигравитации. Вторая половина условий симметричности (12) возникает в работе [11] как вторичная связь.

изменив соответственно лагранжевы множители:

$$\begin{aligned}\lambda_{ab}^+ &= \frac{1}{2}(\lambda_{ab} + \bar{\lambda}_{ab}), \\ \lambda_{ab}^- &= \frac{1}{2}(\lambda_{ab} - \bar{\lambda}_{ab}).\end{aligned}$$

Варьируя гамильтониан

$$\begin{aligned}\mathcal{H} = \int d^3x & (N(\mathcal{H} + u\bar{\mathcal{H}} + u^i\bar{\mathcal{H}}_i + \tilde{U}) + N^i(\mathcal{H}_i + \bar{\mathcal{H}}_i) + \\ & + \lambda_{ab}^+ L_{ab}^+ + \lambda_{ab}^- L_{ab}^- + \Lambda^a G_a + \Lambda^{ab} G_{ab})\end{aligned}\quad (17)$$

по λ_{ab}^+ , λ_{ab}^- , получаем связи

$$\begin{aligned}L_{ab}^+ &\equiv f_{ia}\Pi_b^i - f_{ib}\Pi_a^i + e_{ia}\pi_b^i - e_{ib}\pi_a^i = 0, \\ L_{ab}^- &\equiv f_{ia}\Pi_b^i - f_{ib}\Pi_a^i - e_{ia}\pi_b^i + e_{ib}\pi_a^i = 0.\end{aligned}$$

Варьируя гамильтониан по Λ^a , Λ^{ab} , получаем условия симметричности (11), (12). Варьирование по u после учета условий симметричности дает

$$\mathcal{S} \equiv \frac{1}{N} \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta u} = \bar{\mathcal{H}} + \frac{\partial \tilde{U}}{\partial u} = \bar{\mathcal{H}} + \beta_1 e z = 0, \quad (18)$$

а варьирование по u^i , также с учетом (11), (12), дает

$$\mathcal{S}_i \equiv \frac{1}{N} \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta u^i} = \bar{\mathcal{H}}_i + \frac{\partial \tilde{U}}{\partial u^i} = \bar{\mathcal{H}}_i - \beta_1 e f_i^a p_a = 0. \quad (19)$$

Из последнего уравнения можно выразить переменную p_a :

$$p_a = \frac{1}{\beta_1 e} f_a^i \bar{\mathcal{H}}_i, \quad (20)$$

тогда

$$\varepsilon \equiv \sqrt{1 + p_a p^a} = \frac{\sqrt{(\beta_1 e)^2 + \eta^{mn} \bar{\mathcal{H}}_m \bar{\mathcal{H}}_n}}{\beta_1 e}.$$

Таким образом, из (13) следует

$$u^i = \frac{\bar{\mathcal{H}}_i}{\beta_1 e \varepsilon} \left[\eta^{ik} + u \varepsilon \left(x^{ik} - \eta^{ik} \frac{y}{\varepsilon(\varepsilon + 1)} \right) \right]. \quad (21)$$

Варьируя действие бигравитации по N , N^i , находим

$$\begin{aligned}\mathcal{R} &\equiv \mathcal{H} + u\bar{\mathcal{H}} + u^i\bar{\mathcal{H}}_i + \tilde{U} = \mathcal{H} + u\mathcal{S} + u^i\mathcal{S}_i + \beta_1 e \varepsilon = 0, \\ \mathcal{R}_i &\equiv \mathcal{H}_i + \bar{\mathcal{H}}_i = 0,\end{aligned}\quad (22)$$

Так как, решая уравнения (19) и (11), нам удалось исключить вспомогательные переменные p_a , u^i , гамильтониан принимает вид

$$\mathcal{H} = \int d^3x (N(\mathcal{R}' + u\mathcal{S}) + N^i \mathcal{R}_i + \lambda_{ab}^+ L_{ab}^+ + \lambda_{ab}^- L_{ab}^- + \Lambda_{ab} G_{ab}),$$

где можно записать полный набор первичных связей:

$$\mathcal{R}' \equiv \mathcal{H} + \beta_1 e\varepsilon = 0, \quad (23)$$

$$\mathcal{R}_i \equiv \mathcal{H}_i + \bar{\mathcal{H}}_i = 0, \quad (24)$$

$$\mathcal{S} = \bar{\mathcal{H}} + \beta_1 ez = 0, \quad (25)$$

$$G_{ab} \equiv z_{[ab]} = 0, \quad (26)$$

$$L_{ab}^+ \equiv f_{ia}\Pi_b^i - f_{ib}\Pi_a^i + e_{ia}\pi_b^i - e_{ib}\pi_a^i = 0, \quad (27)$$

$$L_{ab}^- \equiv f_{ia}\Pi_b^i - f_{ib}\Pi_a^i - e_{ia}\pi_b^i + e_{ib}\pi_a^i = 0. \quad (28)$$

5. СОГЛАСОВАНИЕ ПЕРВИЧНЫХ СВЯЗЕЙ С ДИНАМИКОЙ

Мы должны обеспечить сохранение первичных уравнений связи при эволюции, для этого требуется вычисление скобок Пуассона между связями. Если сокращенно обозначить через L^A любую связь из набора L_{ab} , $\bar{L}_{ab}$, L_{ab}^+ , L_{ab}^- и через H_B любое из выражений типа $\mathcal{H}$, $\bar{\mathcal{H}}$, $\mathcal{H}_i$, $\bar{\mathcal{H}}_i$, e , f , то все скобки Пуассона типа $\{L^A, H_B\}$ в слабом смысле будут равны нулю, так как представляют собой линейные комбинации связей L^A . В итоге получаем следующие результаты:

$$\begin{aligned} \{L_{ab}^+, \mathcal{S}\} &\approx \beta_1 e \{L_{ab}^+, z\} \approx 0, \\ \{L_{ab}^-, \mathcal{S}\} &\approx \beta_1 e \{L_{ab}^-, z\} \approx -2\beta_1 e G_{ab} \delta(x, y) \approx 0, \\ \{L_{ab}^+, G_{cd}\} &= [\delta_{ac} G_{bd} + \delta_{ad} G_{cb} - \delta_{bc} G_{ad} - \delta_{bd} G_{ca}] \delta(x, y) \approx 0, \\ \{L_{ab}^-, G_{cd}\} &= [\delta_{ac} z_{(bd)} - \delta_{ad} z_{(cb)} - \delta_{bc} z_{(ad)} + \delta_{bd} z_{(ca)}] \delta(x, y) \neq 0, \\ \{\mathcal{R}'(x), \mathcal{R}'(y)\} &= [\eta^{ik}(x) \mathcal{R}_i(x) + \eta^{ik}(y) \mathcal{R}_i(y)] \delta_{,k}(x, y) \approx 0, \\ \{\mathcal{R}'(x), \mathcal{R}_i(y)\} &= -\mathcal{R}'(y) \delta_{,i}(y, x) \approx 0, \\ \{\mathcal{S}(x), \mathcal{R}_i(y)\} &= -\mathcal{S}(y) \delta_{,i}(y, x) \approx 0, \\ \{\mathcal{S}(x), \mathcal{S}(y)\} &= J^i(x) \mathcal{S}(x) \delta_{,i}(x, y) - J^i(y) \mathcal{S}(y) \delta_{,i}(y, x) \approx 0, \\ \{\mathcal{S}(x), \mathcal{R}'(y)\} &= -K^i(y) \mathcal{S}(y) \delta_{,i}(y, x) + \Omega \delta(x, y), \end{aligned} \quad (29)$$

где J^i , K^i даются в приложении формулами (39). Кроме того, возникает новое выражение

$$\Omega = \frac{\partial \mathcal{R}'}{\partial \Pi^{ia}} \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial f_{ia}} - \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \pi^{ia}} \frac{\partial \mathcal{R}'}{\partial e_{ia}} + \Omega', \quad (30)$$

где Ω' приведено в (40). Тогда с учетом (29) на поверхности первичных связей получаем

$$\dot{\mathcal{R}}' = \{\mathcal{R}', H\} \approx -Nu\Omega, \quad (31)$$

$$\dot{\mathcal{R}}_i = \{\mathcal{R}_i, H\} \approx 0, \quad (32)$$

$$\dot{\mathcal{S}} = \{\mathcal{S}, H\} \approx Nu\Omega, \quad (33)$$

$$\dot{G}_{ab} = \{G_{ab}, H\} \approx \lambda_{cd}^- [G_{ab}, L_{cd}^-] + \int d^3x \Lambda_{cd}(x) \{G_{ab}, G_{cd}(x)\}, \quad (34)$$

$$\dot{L}_{ab}^+ = \{L_{ab}^+, H\} \approx 0, \quad (35)$$

$$\dot{L}_{ab}^- = \{L_{ab}^-, H\} \approx \Lambda_{cd} [L_{ab}^-, G_{cd}], \quad (36)$$

где квадратные скобки обозначают коэффициенты при дельта-функции в соответствующих ультралокальных скобках Пуассона, например

$$\{L_{ab}^-, G_{cd}\} \equiv [L_{ab}^-, G_{cd}]\delta(x, y).$$

Учитывая невырожденность матрицы $\|\{L_{ab}^-, G_{cd}\}\|$, следующую из (29), можно заключить, что связи L_{ab}^-, G_{cd} оказываются связями второго рода. Для сохранения первичных связей при эволюции уравнение (36) необходимо, чтобы было выполнено равенство $\Lambda_{cd} = 0$, тогда из (34) следует требование $\lambda_{cd}^- = 0$, а из уравнений (31) и (33) получаем вторичную связь

$$\Omega = 0.$$

После подстановки найденных значений лагранжевых множителей гамильтониан бигравитации принимает вид

$$H = \int d^3x (N(\mathcal{R}' + u\mathcal{S}) + N^i \mathcal{R}_i + \lambda_{ab}^+ L_{ab}^+).$$

Условие согласования вторичной связи Ω с динамикой приводит к уравнению, из которого определяется вспомогательная переменная u :

$$\dot{\Omega} = \{\Omega, H\} = \int d^3x N\{\Omega, \mathcal{R}\} = \int d^3x (N\{\Omega, \mathcal{R}'\} + Nu\{\Omega, \mathcal{S}\}) = 0. \quad (37)$$

При этом имеют значение два момента: во-первых, скобка Пуассона $\{\Omega, \mathcal{S}\}$ должна быть отлична от нуля, во-вторых, если мы хотим, чтобы переменная u не зависела от лагранжева множителя N , что в принципе необязательно, то упомянутая скобка, а также скобка $\{\Omega, \mathcal{R}'\}$ должны быть ультралокальными, т. е. должны иметь вид

$$\{\Omega, \mathcal{S}\} = [\Omega, \mathcal{S}]\delta(x, y), \quad \{\Omega, \mathcal{R}'\} = [\Omega, \mathcal{R}']\delta(x, y). \quad (38)$$

Подтверждение первого свойства мы видим в том, что при вычислении скобки $\{\Omega, \mathcal{S}\}$ возникают билинейные по импульсам разной природы выражения без производных:

$$\beta_1 e \frac{\partial^2 z}{\partial f_{ia} \partial e_{jb}} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \Pi^{ia}} \frac{\partial \bar{\mathcal{H}}}{\partial \pi^{jb}}.$$

В других связях таких выражений не встречается. Поскольку связь Ω получается в результате вычисления скобки Пуассона $\{\mathcal{S}, \mathcal{R}'\}$, из тождества Якоби для связей можно вывести соотношения

$$\begin{aligned} \{\Omega(x), \mathcal{S}(z)\}\delta(x, y) - \{\Omega(z), \mathcal{S}(x)\}\delta(z, y) &\approx 0, \\ \{\Omega(y), \mathcal{R}'(z)\}\delta(x, y) - \{\Omega(z), \mathcal{R}'(y)\}\delta(x, z) &\approx 0. \end{aligned}$$

Второе свойство, т. е. соотношения (38), будет выполнено, если в приведенных выше скобках Пуассона не появятся вторые производные от дельта-функции, тогда

$$u = -\frac{\{\Omega, \mathcal{R}'\}}{\{\Omega, \mathcal{S}\}}.$$

К сожалению, нам пока не удалось доказать, что это действительно так.

6. КЛАССИФИКАЦИЯ СВЯЗЕЙ

В итоге связями первого рода оказываются связи

$$\begin{aligned}\mathcal{R}' &\equiv \mathcal{H} + \beta_1 e\varepsilon = 0, \\ \mathcal{R}_i &\equiv \mathcal{H}_i + \bar{\mathcal{H}}_i = 0, \\ L_{ab}^+ &\equiv f_{ia}\Pi_b^i - f_{ib}\Pi_a^i + e_{ia}\pi_b^i - e_{ib}\pi_a^i = 0.\end{aligned}$$

Стоящие при них лагранжевы множители N , N^i , λ_{ab}^+ остаются произвольными, что соответствует инвариантности формализма при диагональных диффеоморфизмах пространства-времени и диагональных вращениях пространственных триад.

Связи L_{ab}^- , G_{cd} , $\mathcal{S}$, Ω оказываются связями второго рода:

$$\{L_{ab}^-, G_{cd}\} \neq 0, \quad \{\Omega, \mathcal{S}\} \neq 0,$$

при этом $\mathcal{S}$ и Ω служат для исключения духовой степени свободы и аналогичны соответствующим связям в метрическом подходе [12].

Связи можно классифицировать по их зависимости от импульсов Π^{ia} , π^{ia} . Производные от импульсов присутствуют только в выражениях для $\mathcal{H}_i$, $\bar{\mathcal{H}}_i$, которые, в свою очередь, входят линейно в связи первого рода $\mathcal{R}_i$ и в выражение p_a . Алгебраическая (без производных) зависимость от импульсов в связях $\mathcal{R}'$, $\mathcal{S}$ является квадратичной, а в связях L_{ab}^+ , L_{ab}^- , Ω – линейной.

Если удастся доказать, что скобки Пуассона связей (38) являются ультралокальными, то легко будет построить скобки Дирака и полностью исключить из гамильтониана все связи второго рода. Тогда уравнения движения будут порождаться гамильтонианом, содержащим только связи первого рода, умноженные на соответствующие произвольные лагранжевы множители. Гамильтониан бигравитации в тетрадном подходе для минимального потенциала дРГТ в этом случае примет вид

$$H = \int d^3x (N\mathcal{R}' + N^i\mathcal{R}_i + \lambda_{ab}^+ L_{ab}^+),$$

т. е. будет линейной комбинацией $n_{f.c.} = 7$ связей первого рода с произвольными лагранжевыми множителями.

Независимо от этих предположений каноническими переменными в построенном формализме бигравитации являются два набора триад f_{ia} , e_{ia} и сопряженные им импульсы Π^{ia} , π^{ia} , что дает $n = 36$ переменных. Кроме связей первого рода переменные подчиняются $n_{s.c.} = 8$ связям второго рода

$$\mathcal{S} = 0, \quad G_{ab} = 0, \quad L_{ab}^- = 0, \quad \Omega = 0,$$

которые задаются соотношениями (25), (26), (28) и (30) соответственно. Число степеней свободы определяется формулой

$$n_{\text{DOF}} = \frac{1}{2}(n - 2n_{f.c.} - n_{s.c.}) = 7.$$

Остальные переменные, входившие в первоначальный гамильтониан (17), как мы показали, однозначно определяются через канонические переменные и, возможно, лагранжев множитель N : p_a дается формулой (20), u^i находим из уравнения (21), а u – из уравнения (37). Множители λ_{ab}^- , Λ_{ab} , как было показано, согласно (34), (36) обращаются в нуль.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы показали, что тетрадный подход позволяет построить канонический формализм бигравитации в минимальном случае ($\beta_2 = \beta_3 = 0$) традиционными методами, при этом удастся избежать сложных матричных замен переменных. Мы уверены в том, что аналогичная картина имеет место и для общего потенциала. И структура связей, и их алгебра соответствуют результатам, полученным в рамках метрического подхода как с использованием преобразования Розен–Хасана [6], так и аксиоматическим путем [12], [15]. Основная идея тетрадного подхода к бигравитации была выдвинута Хинтербишлером и Розен [8]. В настоящей работе мы отталкивались от тетрадного представления ОТО, развитого в известных работах Дезера, Тейтельбойма, Энно и других [16]. Подобный подход ранее развивался Клузоном [11]. В отличие от работы Клусона, мы здесь стремились избегать трактовки всех переменных, содержащихся в лагранжиане, как канонических, рассматривая те из них, скорости изменения которых не входят в лагранжиан, как лагранжевы множители. Это существенно уменьшает количество связей, так как некоторые из возникающих уравнений трактуются не как связи, а как уравнения, определяющие лагранжевы множители. Хотя формализм должен давать одни и те же результаты, независимо от субъективного выбора переменных, нам кажется, что использование подхода Кухаржа, т.е. двух систем координат в пространстве-времени, произвольной и связанной с семейством гиперповерхностей, а также переменных $u = \bar{N}/N$ и $u^i = (\bar{N}^i - N^i)/N$ несколько упрощает задачу. Существенные отличия нашего подхода от подхода Клусона обнаруживаются в том, что мы явным образом используем условие симметричности тетрад (6) и не требуем стационарности действия при варьировании по переменной p_a , а также в том, что переменная u в нашей работе определяется из условия согласования связей с динамикой, а в работе [11] она является лагранжевым множителем при связи первого рода и остается произвольной.

Другая запись действия ОТО, использующая формализм первого порядка и переменные, схожие с переменными Аштекара, принималась за исходную в работах [9], [10], где также был построен канонический формализм бигравитации. Структура и алгебра связей аналогичны полученным в настоящей работе. Однако пока не так легко продемонстрировать связь между двумя подходами, которая, как мы убеждены, должна существовать.

Мы надеемся, что построенный здесь формализм найдет применение при исследовании принципиальных вопросов теории бигравитации, таких как существование частично безмассового предела, проблемы причинности, принципа соответствия с ОТО и др.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Выражения J^i , K^i даются формулами

$$\begin{aligned} J^i &= \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \bar{\mathcal{H}}_i} = \frac{\bar{\mathcal{H}}_k}{\beta_1 e(1 + \varepsilon)} \left(x^{(ik)} - \eta^{ik} \frac{y}{\varepsilon(1 + \varepsilon)} \right), \\ K^i &= \frac{\partial \mathcal{R}'}{\partial \bar{\mathcal{H}}_i} = \frac{\eta^{ij} \bar{\mathcal{H}}_j}{\beta_1 e \varepsilon}. \end{aligned} \quad (39)$$

Для Ω' получаем выражение

$$\begin{aligned}\Omega' = & K^j(P^{ma}e_{ja})_{,m} - P^{ma}K^je_{ma,j} + (J^mK^j\overline{\mathcal{H}}_j)_{,m} - J^m(K^j\overline{\mathcal{H}}_j)_{,m} + \\ & + K^j(J^m\overline{\mathcal{H}}_m)_{,j} + (J^jK^m - K^jJ^m)\overline{\mathcal{H}}_{m,j} + \\ & + (Q^{ma}J^je_{ja})_{,m} + Q^{ma}J^je_{ma,j} - J^j(Q^{ma}e_{ja})_{,m},\end{aligned}\quad (40)$$

где

$$\begin{aligned}P^{ja} &= \frac{\partial}{\partial e_j^a}(\mathcal{S} - \overline{\mathcal{H}}) = e^{ja}\beta_1 e\left(x - \frac{y}{\varepsilon(1+\varepsilon)}\right) - e^{jb}\beta_1 e\left(x^{ba} + \frac{y^{ba}}{1+\varepsilon}\right), \\ Q^{ja} &= \frac{\partial \mathcal{R}'}{\partial e_j^a} = \frac{\beta_1 e e^{ja}}{\varepsilon}, \\ T^{ja} &= \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial f_j^a} = e^{ja}\beta_1 e - f^{jb}\beta_1 e \frac{y^{ab}}{1+\varepsilon} + \eta^{jk} \frac{\overline{\mathcal{H}}_k f^{ia} \overline{\mathcal{H}}_i y}{\beta_1 e \varepsilon (1+\varepsilon)^2}, \\ Y^{ja} &= \frac{\partial}{\partial f_j^a}(\mathcal{R}' - \mathcal{H}) = -\frac{\eta^{jk} \overline{\mathcal{H}}_k f^{ia} \overline{\mathcal{H}}_i}{\beta_1 e \varepsilon}.\end{aligned}\quad (41)$$

Список литературы

- [1] C. J. Isham, A. Salam, J. Strathdee, *Phys. Lett. B*, **31**:5 (1970), 300–302; *Phys. Rev. D*, **3**:4 (1971), 867–873.
- [2] B. Zumino, “Effective Lagrangians and broken symmetries”, *Brandeis University Lectures on Elementary Particles and Quantum Field Theory*, v. 2, eds. S. Deser, M. Grisaru, H. Pendleton, MIT Press, Cambridge, MA, 1970, 437–500.
- [3] T. Damour, I. I. Kogan, *Phys. Rev. D*, **66**:10 (2002), 104024, 17 pp.
- [4] C. de Rham, G. Gabadadze, A. J. Tolley, *Phys. Rev. Lett.*, **106**:23 (2011), 231101, 4 pp., arXiv:1011.1232; *Phys. Lett. B*, **711**:2 (2012), 190–195, arXiv:1107.3820.
- [5] D. G. Boulware, S. Deser, *Phys. Rev. D*, **6**:12 (1972), 3368–3382.
- [6] S. F. Hassan, R. A. Rosen, *JHEP*, **02** (2012), 126, 11 pp., arXiv:1109.3515.
- [7] S. F. Hassan, R. A. Rosen, *JHEP*, **04** (2012), 123, 15 pp., arXiv:1111.2070.
- [8] K. Hinterbichler, R. A. Rosen, *JHEP*, **07** (2012), 047, 33 pp., arXiv:1203.5783.
- [9] S. Alexandrov, K. Krasnov, S. Speziale, *JHEP*, **06** (2013), 068, 31 pp., arXiv:1212.3614.
- [10] S. Alexandrov, *Gen. Rel. Grav.*, **46**:1 (2014), 1639, 20 pp., arXiv:1308.6586.
- [11] J. Kluson, “Hamiltonian formalism of bimetric gravity in vierbein formulation”, arXiv:1307.1974.
- [12] В. О. Соловьев, М. В. Чичикина, *ТМФ*, **176**:3 (2013), 393–407, arXiv:1211.6530; V. O. Soloviev, M. V. Tchichikina, *Phys. Rev. D*, **88**:8 (2013), 084026, 12 pp., arXiv:1302.5096.
- [13] R. Arnowitt, S. Deser, Ch. W. Misner, “The dynamics of general relativity”, *Gravitation: An Introduction to Current Research*, ed. L. Witten, Wiley, New York, 1962, 227–265, arXiv:gr-qc/0405109.
- [14] K. Kuchař, *J. Math. Phys.*, **17**:5 (1976), 777–791; 792–800; 801–820; **18**:8 (1977), 1589–1597.
- [15] D. Comelli, F. Nesti, L. Pilo, *JHEP*, **07** (2013), 161, 24 pp., arXiv:1305.0236.
- [16] S. Deser, C. J. Isham, *Phys. Rev. D*, **14**:10 (1976), 2505–2510; J. E. Nelson, C. Teitelboim, *Ann. Phys.*, **116**:1 (1978), 86–104; M. Henneaux, *Gen. Rel. Grav.*, **9**:11 (1978), 1031–1045.