Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. Г. Амосов, Оценка выходной энтропии тензорного произведения двух квантовых каналов, *ТМФ*, 2015, том 182, номер 3, 453–464

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8776>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.84.234.179

26 апреля 2023 г., 06:52:54

© 2015 г.

Г. Г. Амосов*

ОЦЕНКА ВЫХОДНОЙ ЭНТРОПИИ ТЕНЗОРНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ ДВУХ КВАНТОВЫХ КАНАЛОВ

Найдена нетривиальная нижняя граница для приращения энтропии при действии на класс состояний составных квантовых систем тензорного произведения тождественного и произвольного каналов. С помощью полученного результата оценивается снизу выходная энтропия тензорного произведения дефазирующего и произвольного каналов. Дается классификация каналов, демпфирующих фазу, которые являются частным случаем дефазирующих каналов.

Ключевые слова: квантовый канал, составная квантовая система, сцепленность, энтропия фон Неймана.

DOI: 10.4213/tmf8776

1. ВВЕДЕНИЕ

Одной из наиболее важных задач квантовой теории информации является вычисление изменения информационных емкостей при внешнем воздействии на квантовую систему. Большинство используемых емкостей определяется на основе энтропии фон Неймана. Мы рассматриваем задачу нахождения нижней границы для приращения энтропии состояния составной системы в случае, когда возмущение воздействует только на ее подсистему. Нетривиальность данной задачи связана с феноменом сцепленности для составных квантовых систем, который отсутствует для классических систем.

Рассмотрим состояние $\rho \in \mathfrak{S}(K)$, где $\mathfrak{S}(K)$ обозначает множество положительных операторов с единичным следом в гильбертовом пространстве¹⁾ K . Тогда для заданного квантового канала (линейного вполне положительного отображения) Ω на множестве всех ограниченных операторов $B(K)$ в K можно рассмотреть приращение энтропии по отношению к действию такого канала:

$$S(\Omega(\rho)) - S(\rho). \quad (1)$$

¹⁾Если обратное не оговаривается специально, гильбертовы пространства предполагаются бесконечномерными.

Здесь через S обозначена энтропия фон Неймана, $S(\rho) = -\text{Tr}(\rho \ln \rho)$, для которой $0 \leq S(\rho) \leq +\infty$. Приращение энтропии является важной характеристикой, поскольку определяет величину смешанности для квантового канала [1].

Рассмотрим разложение Крауса для Ω :

$$\Omega(\rho) = \sum_{j=1}^{+\infty} V_j \rho V_j^*, \quad (2)$$

При условии существования сильного предела

$$\text{s-lim}_{N \rightarrow +\infty} \sum_{j=1}^N V_j V_j^* = \Omega(I)$$

и в предположении, что $S(\rho) < +\infty$, в работе [2] была получена нижняя граница для приращения энтропии (1):

$$S(\Omega(\rho)) - S(\rho) \geq -\text{Tr}(\rho \ln \Omega(I)). \quad (3)$$

В контексте составных систем было бы интересно вычислить приращение энтропии состояния $\rho \in \mathfrak{S}(H \otimes K)$ относительно действия тензорного произведения тождественного канала $\text{Id}: B(H) \rightarrow B(H)$ и канала Ω , т. е.

$$S((\text{Id} \otimes \Omega)(\rho)) - S(\rho). \quad (4)$$

Рассмотрим выпуклое замыкание S_Ω выходной энтропии состояния $\rho \in \mathfrak{S}(K)$, определенное в работе [3] по формуле

$$S_\Omega(\rho) = \inf_{\rho = \sum \pi_j \rho_j} \sum_j \pi_j S(\Omega(\rho_j)). \quad (5)$$

Мы высказываем следующую гипотезу о связи между величинами (4) и (5):

ГИПОТЕЗА 1. *Имеет место неравенство*

$$S((\text{Id} \otimes \Omega)(\rho)) - S(\rho) \geq S_\Omega(\text{Tr}_H(\rho)). \quad (6)$$

В настоящей работе найден достаточно широкий класс состояний ρ , для которых оценка (6) верна.

Известно, что если бы неравенство (6) соблюдалось для всех состояний вида

$$\rho = (\Phi \otimes \text{Id})(\sigma), \quad \sigma \in \mathfrak{S}(H \otimes K),$$

то минимальная выходная энтропия была бы аддитивна по отношению к взятию тензорных произведений Φ . Доказательство данного свойства было одной из причин появления сформулированной выше гипотезы (см. работу [4]). Отметим, что состояния вида $(\Phi \otimes \text{Id})(|e\rangle\langle e|)$ изучались в статье [5] в несколько другом контексте.

Квантовый канал Φ называется *дефазирующим* [6], [7], если существует ортонормированный базис (e_n) в H , такой что

$$\Phi(|e_n\rangle\langle e_m|) = \lambda_{nm}|e_n\rangle\langle e_m|, \quad (7)$$

где (λ_{nm}) – положительно определенная матрица с $\lambda_{nn} = 1$. Квантовые дефазирующие каналы являются комплементарными к каналам, разрушающим сцепленность [7].

Мы покажем, что (6) взаимосвязано со следующим неравенством:

$$S((\Phi \otimes \Omega)(|e\rangle\langle e|)) \geq S((\Phi \otimes \text{Id})(|e\rangle\langle e|)) + \sum_n \pi_n S(\Omega(|h_n\rangle\langle h_n|)), \quad (8)$$

где

$$|e\rangle\langle e| = \sum_{n,m} \lambda_n \bar{\lambda}_m |e_n\rangle\langle e_m| \otimes |h_n\rangle\langle h_m|,$$

(e_n) – ортонормированная система в H , $h_n \in K$ – единичные векторы, Φ – дефазирующий канал, а Ω – произвольный канал. Неравенство (8) тесно связано со свойством сильной супераддитивности канала Φ , которое введено в работе [3] и подробно обсуждается в работе [8].

В случае $H = L^2(\mathbb{R})$ понятие дефазирующего канала можно расширить до канала Φ , для которого выходное состояние $\Phi(|\psi\rangle\langle\psi|)$ является интегральным оператором вида [9]

$$(\Phi(|\psi\rangle\langle\psi|)\phi)(x) = \int_{\mathbb{R}} \lambda(x, y) \psi(x) \bar{\psi}(y) \phi(y) dy, \quad (9)$$

где $\phi \in L^2(\mathbb{R})$ и $\lambda(x, y)$ – положительно определенное ядро. Мы будем называть (9) *обобщенным дефазирующим каналом*. Используя обобщенные собственные векторы оператора координаты, можно представить действие (9) в виде

$$\Phi(|x\rangle\langle y|) = \lambda(x, y) |x\rangle\langle y|. \quad (10)$$

Уравнение (10) нужно понимать в смысле (9).

Рассмотрим чистое состояние

$$|e\rangle\langle e| = \int_{\mathbb{R}^2} \lambda(x) \bar{\lambda}(y) |x\rangle\langle y| \otimes |h_x\rangle\langle h_y| dx dy, \quad (11)$$

где $\int_{\mathbb{R}} |\lambda(x)|^2 dx = 1$ и $x \rightarrow h_x$ – измеримая функция, h_x – единичные векторы в K . Более точно, соотношение (11) означает, что для скалярного произведения в составной системе справедливо равенство

$$\langle \phi_1 \otimes \psi_1 | e \rangle \langle e | \phi_2 \otimes \psi_2 \rangle = \int_{\mathbb{R}^2} \lambda(x) \bar{\lambda}(y) \bar{\phi}_1(x) \phi_2(y) \langle \psi_1 | h_x \rangle \langle h_y | \psi_2 \rangle dx dy,$$

где $\phi_1, \phi_2 \in H$ и $\psi_1, \psi_2 \in K$. Аналогично (8) мы покажем, что верно следующее неравенство:

$$S((\Phi \otimes \Omega)(|e\rangle\langle e|)) \geq S((\Phi \otimes \text{Id})(|e\rangle\langle e|)) + \int_{\mathbb{R}} \pi(x) S(\Omega(|h_x\rangle\langle h_x|)) dx, \quad (12)$$

где $\pi(x) = |\lambda(x)|^2$; здесь Φ – обобщенный дефазирующий канал, а Ω – произвольный канал.

Квантовый дефазирующий канал (7) называется каналом, *демпфирующим фазу*, если

$$\lambda_{nm} = \lambda_{n-m}, \quad \bar{\lambda}_n = \lambda_{-n} \quad (13)$$

для некоторых комплексных чисел $(\lambda_n)_{n=0}^{N-1}$, являющихся дискретным преобразованием Фурье распределения вероятностей $(\pi_n)_{n=0}^{N-1}$ [10]. В работе [10] неравенство (8) было получено для канала Φ , демпфирующего фазу, в случае $\dim H < +\infty$. В настоящей работе мы расширим определение каналов, демпфирующих фазу, на бесконечномерные пространства. Далее на основе теоремы Бохнера [11] мы дадим полную классификацию всех каналов, демпфирующих фазу.

Материал работы излагается следующим образом. В разделе 2 доказаны некоторые результаты, касающиеся приращения энтропии. В качестве приложения доказаны неравенства (8) и (12) для дефазированных каналов. Раздел 3 посвящен описанию квантовых каналов, демпфирующих фазу, вида (13), а также их обобщениям. В последнем разделе содержатся заключительные замечания.

2. ПРИРАЩЕНИЕ ЭНТРОПИИ

Найдем более точную границу для приращения энтропии (3), где роль тождественного оператора I играет ортогональный проектор P , $\text{supp } \rho \subset \text{supp } P$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Предположим, что для состояния $\rho \in \mathfrak{S}(H)$, $S(\rho) < +\infty$, имеется ортогональный проектор P , такой что*

$$\text{supp } \rho \subset \text{supp } P$$

и существует сильный предел

$$\text{s-lim}_{N \rightarrow +\infty} \sum_{j=1}^N V_j P V_j^* = \Omega(P).$$

Тогда

$$S(\Omega(\rho)) - S(\rho) \geq -\text{Tr}(\Omega(\rho) \ln \Omega(P)).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы будем следовать методу доказательства из работы [2]. Выберем ортонормированный базис (e_k) в подпространстве носителя $\text{supp } P$ так, что состояние ρ , $\text{supp } \rho \subset \text{supp } P$, может быть представлено в виде

$$\rho = \sum_k \nu_k |e_k\rangle \langle e_k|.$$

В силу условий предложения

$$S(\rho) = -\text{Tr}(\rho \ln \rho) = \sum_k \nu_k (-\ln \nu_k) < +\infty.$$

Следовательно, существует оператор F , такой что

$$\text{Tr}(\rho F) < +\infty, \quad \text{Tr}(\exp(-\beta F)) < +\infty, \quad \beta > 0. \quad (14)$$

Действительно, достаточно положить

$$F = \sum_k \mu_k (-\ln \nu_k) |e_k\rangle \langle e_k|,$$

где (μ_k) подобраны таким образом, что $\mu_k \uparrow +\infty$, но $\sum_k \mu_k \nu_k (-\ln \nu_k)$ все еще сходится. Это позволяет определить состояние ρ_β по формуле

$$\rho_\beta = \frac{P \exp(-\beta F)}{\text{Tr}(P \exp(-\beta F))}. \quad (15)$$

Монотонность квантовой относительной энтропии $S(\rho\|\sigma) = \text{Tr}(\rho(\ln \rho - \ln \sigma))$ приводит к тому, что

$$S(\Omega(\rho)\|\Omega(\rho_\beta)) \leq S(\rho\|\rho_\beta). \quad (16)$$

С другой стороны,

$$S(\rho\|\rho_\beta) = -S(\rho) + \beta \text{Tr}(\rho F) + \ln \text{Tr}(P \exp(-\beta F)),$$

следовательно, неравенство (16) влечет

$$\text{Tr}(\Omega(\rho)(-\ln \Omega(\rho_\beta))) \leq S(\Omega(\rho)) - S(\rho) + \beta \text{Tr}(\rho F) + \ln \text{Tr}(P \exp(-\beta F)). \quad (17)$$

Подставляя (15) в (17), получаем

$$S(\Omega(\rho)) - S(\rho) \geq \text{Tr}\{\Omega(\rho)(-\ln \Omega(P \exp(-\beta F)))\} - \beta \text{Tr}(\rho F).$$

Неравенство $P \exp(-\beta F) \leq P$ влечет $\ln \Phi(P \exp(-\beta F)) \leq \ln \Phi(P)$ в силу операторной монотонности функции $\ln x$ на $\mathbb{R}_+$. Взяв предел $\beta \rightarrow 0$, получаем требуемый результат.

Теперь перейдем к рассмотрению составных систем $H \otimes K$. Предложение 1 позволит нам доказать следующую теорему.

ТЕОРЕМА 1. *Предположим, что $\rho \in \mathfrak{S}(H \otimes K)$ имеет вид*

$$\rho = \sum_{n,m} \lambda_{mn} |e_n\rangle\langle e_m| \otimes |h_n\rangle\langle h_m|, \quad (18)$$

где (e_n) – ортонормированный базис в H , $h_n \in K$ – единичные векторы, а (λ_{mn}) – положительно определенная матрица. Тогда

$$S((\text{Id} \otimes \Omega)(\rho)) \geq S(\rho) + \sum_n \pi_n S(\Omega(|h_n\rangle\langle h_n|)),$$

где $\pi_n = \lambda_{nn}$ и Ω – произвольный квантовый канал.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что состояние $\rho \in \mathfrak{S}(H \otimes K)$ имеет вид (18). Следуя работе [10], определим ортогональный проектор P по формуле

$$P = \sum_n |e_n\rangle\langle e_n| \otimes |h_n\rangle\langle h_n|. \quad (19)$$

Тем самым $P\rho = \rho P = \rho$, следовательно,

$$\text{supp } \rho \subset \text{supp } P.$$

Применяя предложение 1 к состоянию ρ и каналу $\Phi = \text{Id} \otimes \Omega$, получаем

$$S((\text{Id} \otimes \Omega)(\rho)) - S(\rho) \geq -\text{Tr}((\text{Id} \otimes \Omega)(\rho) \ln(\text{Id} \otimes \Omega)(P)).$$

Далее, в силу (19) правая часть неравенства, приведенного выше, представляется в виде

$$\begin{aligned} \text{Tr}((\text{Id} \otimes \Omega)(\rho) \ln(\text{Id} \otimes \Omega)(P)) &= \\ &= \text{Tr} \left(\sum_{n,m} \lambda_{nm} |e_n\rangle\langle e_m| \otimes \Omega(|h_n\rangle\langle h_m|) \sum_k |e_k\rangle\langle e_k| \otimes \ln(\Omega(|h_k\rangle\langle h_k|)) \right) = \\ &= \text{Tr} \left(\sum_n \lambda_{nn} \Omega(|h_n\rangle\langle h_n|) \ln(\Omega(|h_n\rangle\langle h_n|)) \right). \end{aligned}$$

Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Предположим, что $\rho \in \mathfrak{S}(H \otimes K)$ имеет вид*

$$\rho = \sum_{n,m} \lambda_{mn} |e_n\rangle\langle e_m| \otimes |h_n\rangle\langle h_m|, \quad (20)$$

где (e_n) – ортонормированный базис в H , $h_n \in K$ – единичные векторы и (λ_{mn}) – положительно определенная матрица. Тогда

$$S((\text{Id} \otimes \Omega)(\rho)) - S(\rho) \geq S_\Omega(\text{Tr}_H(\rho)).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО непосредственно следует из неравенства

$$\sum_n \pi_n S(\Omega(|h_n\rangle\langle h_n|)) \geq S_\Omega(\sigma),$$

где $\sigma = \sum_n \pi_n |h_n\rangle\langle h_n|$.

СЛЕДСТВИЕ 2. *Соотношение (8) выполняется для дефазирующего канала Φ , действующего по формуле*

$$\Phi(|e_n\rangle\langle e_m|) = \lambda_{nm} |e_n\rangle\langle e_m|.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для заданного единичного вектора $e \in H \otimes K$ и ортонормированного базиса (e_n) в H существуют единичные векторы $h_n \in K$ и набор комплексных чисел ν_n , $\sum_n |\nu_n|^2 = 1$, такие что

$$|e\rangle\langle e| = \sum_{n,m} \nu_n \bar{\nu}_m |e_n\rangle\langle e_m| \otimes |h_n\rangle\langle h_m|.$$

В результате получается состояние

$$\rho = (\Phi \otimes \text{Id})(|e\rangle\langle e|) = \sum_{n,m} \lambda_{nm} \nu_n \bar{\nu}_m |e_n\rangle\langle e_m| \otimes |h_n\rangle\langle h_m|,$$

удовлетворяющее условиям теоремы 1 при замене λ_{nm} на $\lambda_{nm} \nu_n \bar{\nu}_m$, что приводит к требуемому результату.

Теперь положим $H = L^2(\mathbb{R})$ и рассмотрим обобщенные собственные векторы $|x\rangle$ оператора координаты $\hat{x}$, действующего в H по формуле

$$(\hat{x}f)(x) = xf(x), \quad \cdot f(\cdot) \in H,$$

так что

$$\hat{x}|x\rangle = x|x\rangle, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (21)$$

Применяя предложение 1, мы также докажем следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 2. *Предположим, что $\rho \in \mathfrak{S}(H \otimes K)$ имеет вид*

$$\rho = \int_{\mathbb{R}^2} \lambda(x, y) |x\rangle\langle y| \otimes |h_x\rangle\langle h_y| dx dy, \quad (22)$$

где $h_x \in K$ – единичные векторы и $\lambda(x, y)$ – положительно определенная функция. Тогда

$$S((\text{Id} \otimes \Omega)(\rho)) \geq S(\rho) + \int_{\mathbb{R}} \pi(x) S(\Omega(|h_x\rangle\langle h_x|)) dx,$$

где $\pi(x) = \lambda(x, x)$ и Ω – произвольный квантовый канал.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть состояние $\rho \in \mathfrak{S}(L^2(\mathbb{R}) \otimes K)$ имеет вид (22). Определим ортогональный проектор P по формуле

$$P = \int_{\mathbb{R}} |x\rangle\langle x| \otimes |h_x\rangle\langle h_x| dx. \quad (23)$$

Непосредственно проверяется, что $\rho P = P\rho = \rho$. Следовательно,

$$\text{supp } \rho \subset \text{supp } P.$$

Применяя предложение 1 к состоянию ρ и каналу $\Phi = \text{Id} \otimes \Omega$, получаем

$$S((\text{Id} \otimes \Omega)(\rho)) - S(\rho) \geq -\text{Tr}((\text{Id} \otimes \Omega)(\rho) \ln(\text{Id} \otimes \Omega)(P)).$$

Принимая во внимание равенства (22) и (23), получаем для правой части последнего неравенства

$$\begin{aligned} & \text{Tr}((\text{Id} \otimes \Omega)(\rho) \ln(\text{Id} \otimes \Omega)(P)) = \\ &= \text{Tr} \left(\int_{\mathbb{R}^2} \lambda(x, y) |x\rangle\langle y| \otimes \Omega(|h_x\rangle\langle h_y|) dx dy \int_{\mathbb{R}} |z\rangle\langle z| \otimes \ln(\Omega(|h_z\rangle\langle h_z|)) dz \right) = \\ &= \text{Tr} \left(\int_{\mathbb{R}} \lambda(x, x) \Omega(|h_x\rangle\langle h_x|) \ln(\Omega(|h_x\rangle\langle h_x|)) dx \right). \end{aligned}$$

СЛЕДСТВИЕ 3. *Предположим, что $\rho \in \mathfrak{S}(H \otimes K)$ имеет вид*

$$\rho = \int_{\mathbb{R}^2} \lambda(x, y) |x\rangle\langle y| \otimes |h_x\rangle\langle h_y| dx dy,$$

где $h_x \in K$ – единичные векторы и $\lambda(x, y)$ – положительно определенная функция. Тогда

$$S((\text{Id} \otimes \Omega)(\rho)) - S(\rho) \geq S_{\Omega}(\text{Tr}_H(\rho)),$$

где Ω – произвольный квантовый канал.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО непосредственно следует из неравенства

$$\int_{\mathbb{R}} \pi(x) S(\Omega(|h_x\rangle\langle h_x|)) dx \geq S_{\Omega}(\sigma),$$

где $\sigma = \int_{\mathbb{R}} \pi(x) |h_x\rangle\langle h_x| dx$.

СЛЕДСТВИЕ 4. Неравенство (12) выполнено для обобщенного дефазирующего канала Φ , действующего по формуле

$$\Phi(|x\rangle\langle y|) = \lambda(x, y) |x\rangle\langle y|,$$

и произвольного канала Ω .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для произвольного единичного вектора $e \in L^2(\mathbb{R}) \otimes K$ найдутся такая измеримая функция $x \rightarrow h_x$, заданная на действительной оси $\mathbb{R}$, со значениями в множестве единичных векторов $h_x \in K$, а также функция $\nu(x)$, $\int_{\mathbb{R}} |\nu(x)|^2 dx = 1$, для которых

$$|e\rangle\langle e| = \int_{\mathbb{R}^2} \nu(x) \bar{\nu}(y) |x\rangle\langle y| \otimes |h_x\rangle\langle h_y| dx dy. \quad (24)$$

Применяя обобщенный дефазирующий канал Φ к (24), получаем состояние

$$\rho = (\Phi \otimes \text{Id})(|e\rangle\langle e|) = \int_{\mathbb{R}^2} \lambda(x, y) \nu(x) \bar{\nu}(y) |x\rangle\langle y| \otimes |h_x\rangle\langle h_y| dx dy. \quad (25)$$

Оно удовлетворяет условию теоремы 2, если заменить $\lambda(x, y)$ на $\lambda(x, y) \nu(x) \bar{\nu}(y)$.

3. КВАНТОВЫЕ КАНАЛЫ, ДЕМПФИРУЮЩИЕ ФАЗУ

Напомним, что квантовый дефазирующий канал Φ , определенный формулой (7), называется квантовым каналом, демпфирующим фазу, если выполнено условие (13). Аналогичным образом, на основе обобщенного дефазирующего канала Φ , определенного формулой (10), можно ввести понятие обобщенного канала, демпфирующего фазу, для которого должны быть выполнены условия

$$\lambda(x, y) = \lambda(x - y), \quad \lambda(-x) = \bar{\lambda}(x). \quad (26)$$

Поскольку ядра λ_{nm} в (7) и $\lambda(x, y)$ в (10) являются положительно определенными, то же условие следует наложить на функции λ_n и $\lambda(x)$:

$$\sum_{n,m} \lambda_{n-m} c_n \bar{c}_m \geq 0, \quad \sum_{n,m} \lambda(x_n - x_m) c_n \bar{c}_m \geq 0$$

для любого выбора $c_n \in \mathbb{C}$ и $x_n \in \mathbb{R}$, где $1 \leq n \leq N < +\infty$. Таким образом, для классификации всех каналов, демпфирующих фазу, можно применить следующую теорему (теорему Бохнера [11]).

ТЕОРЕМА 3. Предположим, что f – положительно определенная функция на локально компактной абелевой группе G , нормированная условием $f(e) = 1$. Тогда существует единственная вероятностная мера μ на дуальной группе $\hat{G}$, такая что

$$f(g) = \int_{\hat{G}} \langle \hat{h}, g \rangle d\mu(\hat{h}).$$

Рассмотрим три возможных случая, соответствующие $G = \mathbb{Z}_N$, $G = \mathbb{Z}$ и $G = \mathbb{R}$.

3.1. Конечная размерность. Предположим, что гильбертово пространство H имеет конечную размерность, $\dim H = N < +\infty$. Согласно формуле (7)

$$\Phi(|e_n\rangle\langle e_m|) = \lambda_{m-n}|e_n\rangle\langle e_m|, \quad 0 \leq n, m < N.$$

Тогда справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 4. *Комплексные числа (λ_n) являются дискретным преобразованием Фурье распределения вероятностей $(\pi_n)_{n=0}^{N-1}$:*

$$\lambda_n = \sum_{k=0}^{N-1} e^{2\pi nki/N} \pi_k.$$

Более того, существует унитарный оператор $U: H \rightarrow H$ и ортонормированный базис (f_n) в H , такие что

$$Uf_n = f_{n+1} \bmod N, \quad 0 \leq n \leq N-1,$$

и

$$\Phi(\rho) = \sum_{n=0}^{N-1} \pi_n U^n \rho U^{*n}, \quad \rho \in \mathfrak{S}(H).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Здесь нам будет более удобно дать прямое доказательство, не использующее теорему Бохнера. Рассмотрим оператор T , действующий в $\mathbb{C}^N$ по формуле

$$(T\nu)_m = \sum_{n=0}^{N-1} \lambda_{m-n} \nu_n,$$

где $\nu = (\nu_0, \dots, \nu_{N-1}) \in \mathbb{C}^N$. Поскольку λ_n – положительно определенная функция, получаем

$$(\nu, T\nu) \geq 0. \quad (27)$$

Принимая во внимание равенство Парсеваля для дискретного преобразования Фурье, получаем, что (27) приводит к неравенству

$$\sum_{n,m=0}^{N-1} \pi_n |\nu_n|^2 \geq 0$$

для любого выбора комплексных чисел (ν_n) . Это означает, что $\pi_n \geq 0$. С другой стороны,

$$\sum_{n=0}^{N-1} \pi_n = \lambda_0 = 1.$$

Теперь рассмотрим унитарный оператор U , действующий в H по формуле

$$U|e_n\rangle = e^{2\pi ni/N}|e_n\rangle, \quad 0 \leq n < N. \quad (28)$$

Определим ортонормированный базис (f_n) в H , такой что

$$|f_n\rangle = \sum_{m=0}^{N-1} e^{2\pi nmi/N} |e_m\rangle.$$

Применяя оператор (28) к векторам (f_n) , получаем

$$U|f_n\rangle = \sum_{m=0}^{N-1} e^{2\pi(n+1)m/N} |e_m\rangle = |f_n\rangle.$$

3.2. Бесконечная размерность. Положим $\dim H = +\infty$. Фиксируем ортонормированный базис (e_n) и рассмотрим квантовый канал Φ , демпфирующий фазу, который определен формулой (2).

ТЕОРЕМА 5. *Комплексные числа (λ_n) являются преобразованием Фурье вероятностной меры μ на единичной окружности $\mathbb{T}$:*

$$\lambda_n = \int_{\mathbb{T}} e^{2\pi n t i} d\mu(t).$$

Более того, существует унитарное представление $t \rightarrow U_t$ мультипликативной группы $\mathbb{T}$ в H , такое что

$$\Phi(\rho) = \int_{\mathbb{T}} U_t \rho U_t^* d\mu(t), \quad \rho \in \mathfrak{S}(H).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно теореме Бохнера существует вероятностная мера μ , такая что

$$\lambda_n = \int_{\mathbb{T}} e^{2\pi n t i} d\mu(t).$$

Определим унитарное представление $\mathbb{T} \ni t \rightarrow U_t$ по формуле

$$U_t|e_n\rangle = e^{2\pi n t i}|e_n\rangle, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Рассмотрим квантовый канал $\tilde{\Phi}$ следующего вида:

$$\tilde{\Phi}(\rho) = \int_{\mathbb{T}} U_t \rho U_t^* d\mu(t), \quad \rho \in \mathfrak{S}(H).$$

Получаем, что

$$\tilde{\Phi}(|e_n\rangle\langle e_m|) = \int_{\mathbb{T}} e^{2\pi(n-m)t i} d\mu(t) = \lambda_{n-m}|e_n\rangle\langle e_m|.$$

Следовательно, $\tilde{\Phi} = \Phi$.

3.3. Обобщенный канал, демпфирующий фазу. Теперь рассмотрим случай $H = L^2(\mathbb{R})$. Тогда обобщенный канал, демпфирующий фазу, определяется по формуле

$$\Phi(|x\rangle\langle y|) = \lambda(x-y)|x\rangle\langle y|. \quad (29)$$

ТЕОРЕМА 6. *Функция $\lambda(x)$ в (29) является преобразованием Фурье вероятностной меры μ на действительной прямой $\mathbb{R}$:*

$$\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{ixy} d\mu(y).$$

Более того, существует сильно непрерывная однопараметрическая группа унитарных операторов $t \rightarrow U_t$, $U_0 = I$, такая что

$$\Phi(\rho) = \int_{\mathbb{R}} U_t \rho U_t^* d\mu(t), \quad \rho \in \mathfrak{S}(H).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу теоремы Бохнера существует вероятностная мера μ на действительной прямой $\mathbb{R}$, такая что

$$\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{ixy} d\mu(y).$$

Определим сильно непрерывную группу унитарных операторов (U_t) по формуле

$$(U_t \psi)(x) = e^{itx} \psi(x), \quad \psi \in H.$$

Рассмотрим квантовый канал $\tilde{\Phi}$ следующего вида:

$$\tilde{\Phi}(\rho) = \int_{\mathbb{R}} U_t \rho U_t^* d\mu(t), \quad \rho \in \mathfrak{S}(H).$$

Таким образом, для $\psi, \phi, \xi \in H$ получаем

$$(\tilde{\Phi}(|\psi\rangle\langle\phi|)\xi)(x) = \int_{\mathbb{R}^2} e^{it(x-y)} \psi(x) \bar{\phi}(y) \xi(y) dy d\mu(t) = \int_{\mathbb{R}} \lambda(x-y) \psi(x) \bar{\phi}(y) \xi(y) dy.$$

Это означает, что $\tilde{\Phi} = \Phi$.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы получили нетривиальную нижнюю границу приращения энтропии при применении произвольного квантового канала, действующего только на часть системы, для класса составных квантовых систем (следствия 1 и 3). Основываясь на данном результате, мы оценили (снизу) выходную энтропию тензорного произведения дефазировующего квантового канала на произвольный канал (следствия 2 и 4). В конце мы получили классификацию всех квантовых каналов, демпфирующих фазу, которые являются частными случаями дефазировующих каналов (теоремы 4–6).

Благодарности. Автор выражает признательность всем участникам семинара “Квантовая вероятность, статистика, информация” в Математическом институте им. В. А. Стеклова РАН за полезное обсуждение. Особенно автор благодарит А. С. Холево и С. Манчини за внимательное прочтение статьи и замечания, позволившие улучшить изложение. Работа поддержана грантом Российского научного фонда (проект № 14-21-00162).

Список литературы

- [1] R. Alicki, *Isotropic quantum spin channels and additivity questions*, [arXiv: quant-ph/0402080](#).
- [2] А. С. Холево, *Докл. РАН*, **434**:2 (2010), 173–174.
- [3] A. S. Holevo, M. E. Shirokov, *Commun. Math. Phys.*, **249**:2 (2004), 417–430, [arXiv: quant-ph/0306196](#).

- [4] M. B. Ruskai, *Some open problems in quantum information theory*, arXiv: 0708.1902.
- [5] I. Devetak, M. Junge, C. King, M. B. Ruskai, *Commun. Math. Phys.*, **266**:1 (2006), 37–63.
- [6] I. Devetak, P. W. Shor, *Commun. Math. Phys.*, **256**:2 (2005), 287–303, arXiv: quant-ph/0311131.
- [7] А. С. Холево, *ТБП*, **51**:1 (2006), 133–143.
- [8] G. G. Amosov, S. Mancini, *Quantum Inf. Comput.*, **9**:7–8 (2009), 594–609.
- [9] А. С. Холево, *Пробл. передачи информ.*, **44**:3 (2008), 3–18.
- [10] Г. Г. Амосов, *Пробл. передачи информ.*, **49**:3, 32–39.
- [11] W. Rudin, *Fourier Analysis on Groups*, Wiley, New York, 1990.

Поступила в редакцию 7.08.2014,
после доработки 29.09.2014