Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Джованнетти, А. С. Холево, А. Мари, Мажоризация и аддитивность для многомодовых бозонных гауссовских каналов, *ТМФ*, 2015, том 182, номер 2, 338–349

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8777>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 17:54:26

© 2015 г. В. Джованнетти*, А. С. Холево[†], А. Мари*

МАЖОРИЗАЦИЯ И АДДИТИВНОСТЬ ДЛЯ МНОГОМОДОВЫХ БОЗОННЫХ ГАУССОВСКИХ КАНАЛОВ

Получено многомодовое обобщение мажоризационной теоремы для бозонных гауссовских каналов, в частности даны достаточные условия, при которых глауберовские когерентные состояния являются единственными минимизаторами для вогнутых функционалов от выходного состояния такого канала. Обсуждаются прямые следствия этой многомодовой мажоризации для позитивного решения известной проблемы аддитивности в случае гауссовских каналов. В частности, доказана аддитивность минимальных выходных энтропий Реньи произвольного порядка $p > 1$. Наконец, дается альтернативный, более простой вывод свойства мажоризации для функции Хусими, полученного Либом и Соловей.

Ключевые слова: квантовая теория информации, бозонный гауссовский канал связи, классическая пропускная способность, калибровочная инвариантность, минимальная выходная энтропия, гауссовский оптимизатор, аддитивность.

DOI: 10.4213/tmf8777

1. ВВЕДЕНИЕ

Недавно было получено доказательство *гипотезы о гауссовских оптимизаторах* в квантовой теории информации для класса бозонных гауссовских калибровочно-ковариантных или калибровочно-контравариантных каналов [1]. Гипотеза состоит в том, что минимальная выходная энтропия бозонного гауссовского канала достигается на вакуумном (а также на любом когерентном) состоянии. В работе [2] этот результат был усилен для одномодовых каналов: было показано, что выходные состояния, соответствующие вакуумному или когерентному входу, мажоризируют выходные состояния для любых других входов, в том смысле, что они минимизируют широкий класс выпуклых функционалов от выходных состояний. Детальное обсуждение, мотивацию и возможности применения этих результатов в квантовой оптике и коммуникациях можно найти в работах [1], [2].

*NEST, Scuola Normale Superiore e Istituto Nanoscienze-CNR, Pisa, Italy

[†]Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва, Россия.

E-mail: holevo@mi.ras.ru

В настоящей работе получены дальнейшие результаты в этом направлении. В разделе 2 мы даем многомодовое обобщение результата статьи [2], в частности точную формулировку достаточных условий, при которых когерентные состояния являются *единственными* оптимизаторами. Мы также обсуждаем прямые следствия этой многомодовой мажоризации для позитивного решения еще одной знаменитой гипотезы, а именно *проблемы аддитивности* в случае гауссовских каналов. В частности, мы демонстрируем аддитивность минимальных выходных энтропий Реньи произвольного порядка $p > 1$, что обобщает результаты Джованнетти и Ллойда [3] для целых значений p и специальных каналов.

В разделе 4 мы получаем обобщение мажоризационного результата работы Либа и Соловей [4] на основе метода статьи [1]. Верль [5] ввел понятие *классической энтропии* квантового состояния ρ по формуле

$$S_{\text{cl}}(\rho) = - \int_{\mathbb{C}^s} \langle z | \rho | z \rangle \ln \langle z | \rho | z \rangle \frac{d^{2s} z}{\pi^s},$$

где $\langle z | \rho | z \rangle$ – функция Хусими, $|z\rangle$ – глауберовские когерентные векторы, s – число мод. Либ [6] использовал точные значения констант в неравенстве Хаусдорфа–Юнга для преобразования Фурье и в неравенстве Юнга для свертки, чтобы доказать гипотезу Верля [5]: $S_{\text{cl}}(\rho)$ принимает минимальное значение для любого когерентного состояния $\rho = |\zeta\rangle\langle\zeta|$. Недавно Либ и Соловей [4] дали другое доказательство, основанное на аналогичном результате для блоховских спиновых когерентных состояний. Более того, на этом пути они смогли установить мажоризационное свойство глауберовских когерентных состояний. В разделе 4 мы предлагаем еще один (и, по-видимому, наиболее естественный) подход к доказательству некоторого обобщения этого свойства, мотивированный недавним решением проблемы гауссовских оптимизаторов [1].

2. МАЖОРИЗАЦИЯ ДЛЯ КАЛИБРОВОЧНО-КОВАРИАНТНЫХ КАНАЛОВ

Приведем некоторые определения и обозначения из работы [1], ограничиваясь случаем каналов с совпадающими входным и выходным пространствами. Рассмотрим s -мерное комплексное гильбертово пространство $\mathbf{Z}$, которое может рассматриваться как $2s$ -мерное вещественное пространство, снабженное симплектической формой $z, z' \rightarrow 2 \operatorname{Im} z^* z'$. Мы будем рассматривать векторы из $\mathbf{Z}$ как s -мерные комплексные векторы-столбцы, при этом (комплексно-линейные) операторы в $\mathbf{Z}$ представляются комплексными $(s \times s)$ -матрицами, а звездочка обозначает эрмитово сопряжение. Калибровочная группа действует в $\mathbf{Z}$ как умножение на $e^{i\phi}$, где ϕ – вещественное число, называемое фазой. Квантование Вейля задается унитарными операторами смещения $D(z)$, действующими неприводимо в пространстве представления $\mathcal{H}$ и удовлетворяющими каноническим коммутационным соотношениям

$$D(z) D(z') = e^{-i \operatorname{Im} z^* z'} D(z + z'). \quad (1)$$

Вводя операторы уничтожения и рождения рассматриваемой бозонной системы $a_j, a_j^\dagger$, $j = 1, \dots, s$, которые удовлетворяют коммутационным соотношениям $[a_j a_k^\dagger] = \delta_{jk} I$,

мы можем записать операторы $D(z)$ как

$$D(z) = \exp \left[\sum_{j=1}^s (z_j a_j^\dagger - \bar{z}_j a_j) \right]. \quad (2)$$

Калибровочная группа имеет унитарное представление $\phi \rightarrow U_\phi = e^{i\phi N}$ в $\mathcal{H}$, где $N = \sum_{j=1}^s a_j^\dagger a_j$ – оператор числа квантов. Представление калибровочной группы в $\mathcal{H}$ действует по формуле $U_\phi^* D(z) U_\phi = D(e^{i\phi} z)$, $\phi \in [0, 2\pi]$. Состояние ρ называется калибровочно-инвариантным, если оператор плотности коммутирует со всеми U_ϕ , или же, что эквивалентно, его характеристическая функция $\phi(z) = \text{Tr } \rho D(z)$ инвариантна относительно действия калибровочной группы. В частности, гауссовские калибровочно-инвариантные состояния задаются характеристической функцией вида

$$\phi(z) = e^{-z^* \alpha z}, \quad (3)$$

где α – комплексная корреляционная матрица, удовлетворяющая соотношению $\alpha \geq I/2$, где I – единичная $(s \times s)$ -матрица. Вакуумное состояние $|0\rangle\langle 0|$ отвечает случаю $\alpha = I/2$.

Каналом Φ в $\mathcal{H}$ называется линейное, вполне положительное, сохраняющее след отображение банахова пространства операторов со следом, действующих в $\mathcal{H}$ (подробнее см., например, [7]). Канал называется *калибровочно-ковариантным*, если

$$\Phi[U_\phi \rho U_\phi^*] = U_\phi \Phi[\rho] U_\phi^*. \quad (4)$$

В картине Гейзенберга бозонный гауссовский калибровочно-ковариантный канал Φ [1] описывается сопряженным каналом Φ^* , действующим на операторы смещения по формуле

$$\Phi^*[D(z)] = D(K^* z) e^{-z^* \mu z}, \quad (5)$$

где K – комплексная матрица, а μ – эрмитова матрица, удовлетворяющая неравенству

$$\mu \geq \pm \frac{1}{2}(I - KK^*). \quad (6)$$

Калибровочно-ковариантный канал называется *квантово-ограниченным*, если μ – минимальное решение неравенства (6). Специальными случаями отображений (5) являются аттенюатор и усилитель, которые характеризуются матрицей K , удовлетворяющей неравенствам $KK^* \leq I$ и $KK^* \geq I$ соответственно. Нас особенно будут интересовать *квантово-ограниченный аттенюатор*, который отвечает случаю

$$KK^* \leq I, \quad \mu = \frac{1}{2}(I - KK^*), \quad (7)$$

и *квантово-ограниченный усилитель*, для которого

$$KK^* \geq I, \quad \mu = \frac{1}{2}(KK^* - I). \quad (8)$$

Эти каналы диагонализуются: используя разложение по сингулярным числам $K = V_B K_d V_A$, где V_A, V_B – унитарные матрицы, а K_d – диагональная матрица с неотрицательными значениями на диагонали, имеем $KK^* = V_B K_d K_d^* V_B^*$, и

$$\Phi[\rho] = U_B \Phi_d[U_A \rho U_A^*] U_B^*, \quad (9)$$

где Φ_d – тензорное произведение

$$\Phi_d = \bigotimes_{j=1}^s \Phi_j \quad (10)$$

одномодовых квантово-ограниченных каналов, определяемых матрицей K_d , а U_A , U_B – канонические унитарные преобразования, действующие в $\mathcal{H}$, такие что

$$U_B^* D(z) U_B = D(V_B^* z), \quad U_A^* D(z) U_A = D(V_A^* z)$$

(отметим, что $U_A|0\rangle = |0\rangle$, $U_B|0\rangle = |0\rangle$).

ТЕОРЕМА 1. 1. Пусть Φ – гауссовский калибровочно-ковариантный канал, а f – вогнутая функция на отрезке $[0, 1]$, такая что $f(0) = 0$, тогда

$$\mathrm{Tr} f(\Phi[\rho]) \geq \mathrm{Tr} f(\Phi[|\zeta\rangle\langle\zeta|]) = \mathrm{Tr} f(\Phi[|0\rangle\langle 0|]) \quad (11)$$

для всех состояний ρ и любого когерентного состояния $|\zeta\rangle\langle\zeta|$ (значение в правой части одно и то же для всех когерентных состояний в силу свойства ковариантности относительно смещений гауссовского канала [7]).

2. Пусть функция f строго вогнута, а канал Φ удовлетворяет одному из двух условий:

а) матрица K обратима и¹⁾

$$\mu > \frac{1}{2}(KK^* - I); \quad (12)$$

б) $KK^* > I$ и $\mu = (KK^* - I)/2$ (таким образом, Φ является квантово-ограниченным усилителем).

Тогда равенство в (11) достигается, только если ρ – когерентное состояние.

В случае одной моды такого рода результат был получен в работе [2]. Нашей целью является обобщение на многомодовый случай, в частности точная формулировка условий в утверждении 2 теоремы 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. В силу вогнутости функции f достаточно доказать неравенство (11) для чистых состояний $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$. Как показано в [1] (см. также предположение 2 в приложении А), всякий калибровочно-ковариантный канал может быть представлен как композиция $\Phi = \Phi_2 \circ \Phi_1$ квантово-ограниченного аттенюатора Φ_1 с матрицей K_1 и квантово-ограниченного усилителя Φ_2 с матрицей K_2 . Тогда рассуждение, аналогичное рассуждению из работы [2], показывает, что достаточно доказать неравенство (11) только для усилителя Φ_2 . В самом деле, если

$$\mathrm{Tr} f(\Phi_2[|\psi\rangle\langle\psi|]) \geq \mathrm{Tr} f(\Phi_2[|0\rangle\langle 0|]) \quad (13)$$

для любого вектора состояния $|\psi\rangle$, мы можем рассмотреть спектральное разложение

$$\Phi_1[|\psi\rangle\langle\psi|] = \sum_j p_j |\phi_j\rangle\langle\phi_j|,$$

¹⁾Для эрмитовых матриц M, N строгое неравенство $M > N$ означает, что матрица $M - N$ положительно определена.

где $p_j > 0$, тогда

$$\begin{aligned} \operatorname{Tr} f(\Phi[|\psi\rangle\langle\psi|]) &= \operatorname{Tr} f(\Phi_2[\Phi_1[|\psi\rangle\langle\psi|]]) \geq \\ &\geq \sum_j p_j \operatorname{Tr} f(\Phi_2[|\phi_j\rangle\langle\phi_j|]) \geq \\ &\geq \operatorname{Tr} f(\Phi_2[|0\rangle\langle 0|]) = \\ &= \operatorname{Tr} f(\Phi_2[\Phi_1[|0\rangle\langle 0|]]) = \operatorname{Tr} f(\Phi[|0\rangle\langle 0|]), \end{aligned} \quad (14)$$

поскольку вакуум является инвариантным состоянием квантово-ограниченного аттенюатора.

Теперь докажем неравенство (13). Поскольку

$$\min_{\rho} \operatorname{Tr} f(\Phi_2[\rho]) = \min_{\rho} \operatorname{Tr} f(U_B \Phi_d[U_A^* \rho U_A] U_B^*) = \min_{\rho} \operatorname{Tr} f(\Phi_d[\rho]),$$

то достаточно рассмотреть диагональный усилитель. Доказательство для одномодового квантово-ограниченного усилителя основывается на том факте, что комплементарный канал имеет представление (также основанное на предложении 2 (см. приложение А))

$$\tilde{\Phi}_2 = T \circ \Phi_2 \circ \Phi'_1, \quad (15)$$

где T – операция транспонирования, определенная соотношением $T[D(z)] = D(-\bar{z})$, $\bar{z}$ – комплексно-сопряженный вектор, а Φ'_1 – другой квантово-ограниченный аттенюатор с матрицей $K'_1 = \sqrt{I - K_2^{-2}}$. Но для диагонального многомодового усилителя выражение для комплементарного канала, а также представление (15) (с диагональным аттенюатором Φ'_1) следуют из результата для каждой моды.

Из представления (15) вытекает, что ненулевые спектры операторов плотности $\Phi_2[\rho]$ и $\Phi_2 \circ \Phi'_1[\rho]$ совпадают для чистых входных состояний $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ [1]. Тогда аналогично первому неравенству в цепочке (14) имеем

$$\begin{aligned} \operatorname{Tr} f(\Phi_2[|\psi\rangle\langle\psi|]) &= \operatorname{Tr} f(\Phi_2[\Phi'_1[|\psi\rangle\langle\psi|]]) \geq \\ &\geq \sum_j p'_j \operatorname{Tr} f(\Phi_2[|\phi'_j\rangle\langle\phi'_j|]), \end{aligned} \quad (16)$$

где

$$\Phi'_1[|\psi\rangle\langle\psi|] = \sum_j p'_j |\phi'_j\rangle\langle\phi'_j|, \quad p'_j > 0, \quad (17)$$

– спектральное разложение выхода квантово-ограниченного аттенюатора Φ'_1 . Предположим, что функция f строго вогнута, тогда мы придем к заключению, что для любого чистого минимизатора $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ функционала $\operatorname{Tr} f(\Phi_2[|\psi\rangle\langle\psi|])$ сумма (17) с необходимостью содержит только одно слагаемое, т. е.

$$\Phi'_1[|\psi\rangle\langle\psi|] = |\phi'\rangle\langle\phi'|. \quad (18)$$

В самом деле, в противном случае в силу строгой вогнутости функции f неравенство в (16) является строгим, что противоречит предположению о том, что $|\psi\rangle\langle\psi|$ является минимизатором функционала $\operatorname{Tr} f(\Phi_2[|\psi\rangle\langle\psi|])$ (строгая вогнутость функции f также исключает минимизаторы, не являющиеся чистыми). Далее, рассмотрим сначала усилитель с матрицей $K_2 > I$, тогда соответствующий аттенюатор Φ'_1 определяется матрицей $K'_1 = \sqrt{I - K_2^{-2}}$ такой, что $0 < K'_1 < I$. Используем следующую лемму.

ЛЕММА 1. Пусть Φ'_1 – диагональный квантово-ограниченный аттенюатор, определяемый матрицей K'_1 , такой, что $0 < K'_1 < I$. Тогда из условия (18) вытекает, что $|\psi\rangle\langle\psi|$ – когерентное состояние.

Для одной моды эта лемма соответствует лемме 2 работы [2], из которой следует, что любое чистое входное состояние ρ такое, что $\Phi'_1[\rho]$ – также чистое состояние, является когерентным. Доказательство опирается на явное выражение для комплементарного канала $\tilde{\Phi}'_1$. Используя это выражение для каждой моды, мы можем обобщить доказательство на случай диагонального многомодового канала Φ'_1 .

Это доказывает неравенство (13) для строго выпуклых функций f и для усилителей Φ_2 с матрицей $K_2 > I$. Произвольная вогнутая функция f может быть затем монотонно аппроксимирована строго выпуклыми функциями, если положить $f_\varepsilon(x) = f(x) - \varepsilon x^2$ и перейти к пределу $\varepsilon \downarrow 0$ в (13).

В случае диагонального усилителя Φ_2 с матрицей $K_2 \geq I$ возьмем произвольную последовательность диагональных операторов $K^{(n)} > I$, $K^{(n)} \rightarrow K_2$, и рассмотрим соответствующие диагональные усилители $\Phi_2^{(n)}$. Тогда $\|\Phi_2^{(n)}[\rho] - \Phi_2[\rho]\|_1 \rightarrow 0$ и $\text{Tr } f(\Phi_2^{(n)}[\rho]) \rightarrow \text{Tr } f(\Phi_2[\rho])$ для любой вогнутой полигональной функции f на $[0, 1]$ такой, что $f(0) = 0$. Это следует из того, что всякая такая функция является липшицевой, $|f(x) - f(y)| \leq \varkappa|x - y|$, откуда получаем

$$|\text{Tr } f(\Phi_2^{(n)}[\rho]) - \text{Tr } f(\Phi_2[\rho])| \leq \varkappa \|\Phi_2^{(n)}[\rho] - \Phi_2[\rho]\|_1.$$

Отсюда вытекает, что неравенство (13) выполняется для полигональных вогнутых функций f и всех квантово-ограниченных усилителей, следовательно, в силу второго неравенства в цепочке (14) неравенство (11) с такими функциями f выполняется для всех гауссовских калибровочно-ковариантных каналов. Для произвольной вогнутой функции f на отрезке $[0, 1]$ найдется монотонно неубывающая последовательность вогнутых полигональных функций f_m , поточечно сходящаяся к f . Переходя к пределу $m \rightarrow \infty$, получаем первое утверждение теоремы.

2. Случай “а”. Заметим, что из условий, налагаемых на канал Φ , следует, что в разложении $\Phi = \Phi_2 \circ \Phi_1$ аттенюатор Φ_1 определяется матрицей K_1 такой, что $0 < K_1^* K_1 < I$ (см. приложение А, замечание 1). Применяя рассуждение, использующее соотношения (16) со строго вогнутой функцией f , к соотношениям (14), получаем, что для любого чистого минимизатора $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ функционала $\text{Tr } f(\Phi[|\psi\rangle\langle\psi|])$ выход квантово-ограниченного аттенюатора $\Phi_1[|\psi\rangle\langle\psi|]$ с необходимостью является чистым состоянием. Применяя лемму 1 к аттенюатору Φ_1 , мы заключаем, что $|\psi\rangle\langle\psi|$ является когерентным состоянием.

Случай “б”. В этом случае мы просто применяем рассуждение, использующее соотношения (16) со строго вогнутой функцией f , к квантово-ограниченному усилителю $\Phi = \Phi_2$. ■

Теорема 1 может быть обобщена на гауссовские калибровочно-контравариантные каналы, удовлетворяющие соотношению $\Phi[U_\phi \rho U_\phi^*] = U_\phi^* \Phi[\rho] U_\phi$ вместо (4). Доказательство следует из того факта, что комплементарный канал $\tilde{\Phi}_2$ к диагональному квантово-ограниченному усилителю Φ_2 является как раз диагональным квантово-ограниченным калибровочно-ковариантным каналом (подробнее см. [1]).

3. СЛЕДСТВИЯ ДЛЯ АДДИТИВНОСТИ

Для любого значения $p > 1$ выходная чистота канала Φ определяется соотношением

$$\nu_p(\Phi) = \sup_{\rho \in \mathfrak{S}(\mathcal{H})} \text{Tr } \Phi[\rho]^p.$$

СЛЕДСТВИЕ 1. Для любого гауссовского калибровочно-ковариантного канала Φ выходная чистота равна $\nu_p(\Phi) = \text{Tr } \Phi[|0\rangle\langle 0|]^p$. Имеет место свойство мультипликативности

$$\nu_p(\Phi \otimes \Psi) = \nu_p(\Phi)\nu_p(\Psi) \quad (19)$$

для любых двух гауссовских калибровочно-ковариантных каналов Φ и Ψ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое утверждение получаем из теоремы 1, полагая $f(x) = -x^p$, так что $\nu_p(\Phi) = -\min_{\rho} \text{Tr } f(\Phi[\rho])$. Второе утверждение тогда следует из того факта, что канал $\Phi \otimes \Psi$ также является калибровочно-ковариантным, и из мультипликативности вакуумного состояния. ■

Выходная чистота канала (5) может быть вычислена явно как

$$\nu_p(\Phi) = \det \left[\left(\mu + \frac{KK^*}{2} + \frac{I}{2} \right)^p - \left(\mu + \frac{KK^*}{2} - \frac{I}{2} \right)^p \right].$$

Эта формула следует из того, что состояние $\Phi[|0\rangle\langle 0|]$ является гауссовским с матрицей ковариаций $\mu + KK^*/2$, а также из явных формул для спектра гауссовского оператора плотности [8].

Минимальная выходная энтропия Реньи канала Φ выражается через выходную чистоту по формуле

$$\check{R}_p(\Phi) = \frac{1}{1-p} \ln \nu_p(\Phi),$$

а свойство мультипликативности (19) может быть переписано как аддитивность минимальной выходной энтропии Реньи

$$\check{R}_p(\Phi \otimes \Psi) = \check{R}_p(\Phi) + \check{R}_p(\Psi). \quad (20)$$

В пределе $p \downarrow 1$ (или полагая $f(x) = -x \ln x$) мы получаем аддитивность минимальной выходной энтропии фон Неймана, впервые установленную в [1].

$$\min_{\rho_{12}} H((\Phi \otimes \Psi)[\rho_{12}]) = \min_{\rho_1} H(\Phi[\rho_1]) + \min_{\rho_2} H(\Psi[\rho_2]).$$

Свойство аддитивности, установленное в работе [1], является несколько более общим в том отношении, что оно охватывает и случай, когда один из каналов калибровочно-ковариантный, а другой – калибровочно-контравариантный. С другой стороны, доказательство в [1] ограничено требованием конечности вторых моментов рассматриваемых состояний, тогда как в настоящем доказательстве этого не требуется.

4. МАЖОРИЗАЦИЯ ДЛЯ ГАУССОВСКОГО КВАНТОВО-КЛАССИЧЕСКОГО КАНАЛА

Полезно рассматривать отображение $\rho \rightarrow \langle z|\rho|z \rangle$ как “квантово-классический” гауссовский канал, который преобразует гауссовские операторы плотности в плотности гауссовских распределений. Мы рассмотрим несколько более общее преобразование:

$$\rho \rightarrow p_\rho(z) = \text{Tr } \rho D(z) \rho_0 D(z)^*,$$

где $D(z)$ – операторы смещения, ρ_0 – гауссовское калибровочно-инвариантное состояние с квантовой характеристической функцией $\phi_0(z) = e^{-z^* \alpha_0 z}$, где $\alpha_0 \geq I/2$. Отметим, что $p_\rho(z) = \langle z|\rho|z \rangle$, если ρ_0 – вакуумное состояние, отвечающее корреляционной матрице $\alpha_0 = I/2$.

Функция $p_\rho(z)$ ограничена единицей и является непрерывной плотностью распределения вероятностей, причем нормировка следует из разложения единичного оператора в $\mathcal{H}$:

$$\int_{\mathbb{C}^s} D(z) \rho_0 D(z)^* \frac{d^{2s}z}{\pi^s} = I_{\mathcal{H}}.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть f – вогнутая функция на $[0, 1]$ такая, что $f(0) = 0$, тогда для произвольного состояния ρ

$$\int_{\mathbb{C}^s} f(p_\rho(z)) \frac{d^{2s}z}{\pi^s} \geq \int_{\mathbb{C}^s} f(p_{|\zeta\rangle\langle\zeta|}(z)) \frac{d^{2s}z}{\pi^s}. \quad (21)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любого $c > 0$ рассмотрим “измерительно-приготовительный” канал Φ_c , определенный соотношением

$$\Phi_c[\rho] = \int \frac{d^{2s}z}{\pi^s c^{2s}} \text{Tr}[\rho D(c^{-1}z) \rho_0 D^*(c^{-1}z)] D(z) \rho'_0 D^*(z), \quad (22)$$

где ρ'_0 – другое калибровочно-инвариантное гауссовское состояние с характеристической функцией $\phi'_0(z) = e^{-z^* \alpha'_0 z}$. Отображение (22) является калибровочно-ковариантным гауссовским каналом, который в картине Гейзенберга действует на $D(z)$ как (ср. [1])

$$\Phi_c^*[D(z)] = D(cz) e^{-z^* (\alpha'_0 + c^2 \alpha_0) z}.$$

Поэтому согласно теореме 1

$$\text{Tr } f(\Phi_c[\rho]) \geq \text{Tr } f(\Phi_c[|\zeta\rangle\langle\zeta|]) \quad (23)$$

для всех состояний ρ и любого когерентного состояния $|\zeta\rangle\langle\zeta|$. Мы докажем предложение, переходя к пределу $c \rightarrow \infty$.

В доказательстве мы также используем простое обобщение неравенств Березина–Либа [9]:

$$\int_{\mathbb{C}^s} f(\underline{p}(z)) \frac{d^{2s}z}{\pi^s} \leq \text{Tr } f(\sigma) \leq \int_{\mathbb{C}^s} f(\bar{p}(z)) \frac{d^{2s}z}{\pi^s}, \quad (24)$$

справедливых для любого квантового состояния, допускающего представление

$$\sigma = \int_{\mathbb{C}^s} \underline{p}(z) D(z) \rho'_0 D(z)^* \frac{d^{2s}z}{\pi^s}$$

с плотностью распределения вероятностей $\underline{p}(z)$. В правой части (24)

$$\bar{p}(z) = \text{Tr } \sigma D(z) \rho'_0 D^*(z).$$

Оригинальные неравенства относятся к случаю, когда ρ_0 – чистое состояние, но доказательство применимо и в этом более общем случае (см. приложение Б). В неравенствах (24) следует предположить, что функция f определена на $[0, \infty)$ (в самом деле, функция $\underline{p}(z)$ может быть неограниченной). Мы временно предположим это.

Полагая $\sigma = \Phi_c[\rho]$, из (22) получаем

$$\underline{p}(z) = \frac{1}{c^{2s}} \text{Tr } \rho D(c^{-1}z) \rho_0 D^*(c^{-1}z) = \frac{1}{c^{2s}} p_\rho(c^{-1}z),$$

тогда как

$$\bar{p}(z) = \text{Tr } \Phi_c[\rho] D(z) \rho'_0 D(z)^* = \int_{\mathbb{C}^s} \underline{p}(w) \text{Tr } \rho'_0 D(z-w) \rho'_0 D(z-w)^* \frac{d^{2s}w}{\pi^s}. \quad (25)$$

Используя квантовую формулу Парсеваля [10], имеем

$$\begin{aligned} \pi^{-s} \text{Tr } \rho'_0 D(z) \rho'_0 D(z)^* &= \int_{\mathbb{C}^s} \phi'_0(w)^2 e^{2i \text{Im } z^* w} \frac{d^{2s}w}{\pi^{2s}} = \\ &= \pi^{-s} \det(2\alpha'_0)^{-1} e^{-z^* [\alpha'_0]^{-1} z / 2} \equiv q_{\alpha'_0}(z) \end{aligned}$$

– плотность гауссовского распределения вероятностей. Подставляя это выражение в (25), получаем

$$\begin{aligned} \bar{p}(z) &= \int d^{2s}w \underline{p}(w) q_{\alpha'_0}(z-w) = \\ &= \int d^{2s}w' p_\rho(w') q_{\alpha'_0}(z-cw') = \\ &= \frac{1}{c^{2s}} p_\rho * q_{\alpha'_0/c^2}(c^{-1}z). \end{aligned} \quad (26)$$

Здесь $q_{\alpha'_0/c^2}(z) = c^{2s} q_{\alpha'_0}(cz)$ – плотность гауссовского распределения вероятностей, стремящаяся к дельта-функции при $c \rightarrow \infty$.

После замены переменных $c^{-1}z \rightarrow z$ неравенства (24) принимают вид

$$\int_{\mathbb{C}^s} f(c^{-2s} p_\rho(z)) \frac{d^{2s}z}{\pi^s} \leq c^{-2s} \text{Tr } f(\Phi_c[\rho]) \leq \int_{\mathbb{C}^s} f(c^{-2s} p_\rho * q_{\alpha'_0/c^2}(z)) \frac{d^{2s}z}{\pi^s}.$$

Подставляя $\rho = |\zeta\rangle\langle\zeta|$, получаем

$$\int_{\mathbb{C}^s} f(c^{-2s} p_{|\zeta\rangle\langle\zeta|}(z)) \frac{d^{2s}z}{\pi^s} \leq c^{-2s} \text{Tr } f(\Phi_c[|\zeta\rangle\langle\zeta|]) \leq \int_{\mathbb{C}^s} f(c^{-2s} p_{|\zeta\rangle\langle\zeta|} * q_{\alpha'_0/c^2}(z)) \frac{d^{2s}z}{\pi^s}.$$

Комбинируя последние две формулы с неравенством (23), получаем

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{C}^s} g(p_\rho(z)) \frac{d^{2s}z}{\pi^s} - \int_{\mathbb{C}^s} g(p_{|\zeta\rangle\langle\zeta|}(z)) \frac{d^{2s}z}{\pi^s} &\geq \\ &\geq \int_{\mathbb{C}^s} g(p_\rho(z)) \frac{d^{2s}z}{\pi^s} - \int_{\mathbb{C}^s} g(p_\rho * q_{\alpha'_0/c^2}(z)) \frac{d^{2s}z}{\pi^s}, \end{aligned} \quad (27)$$

где введена функция $g(x) = f(c^{-2s}x)$, которая также является вогнутой. Далее, произвольная вогнутая полигональная функция g на $[0, 1]$, удовлетворяющая условию $g(0) = 0$, может быть получена таким образом из функции

$$f(x) = \begin{cases} g(c^{2s}x), & x \in [0, c^{-2s}], \\ g(1) + g'(1)(x - c^{-2s}), & x \in [c^{-2s}, \infty), \end{cases}$$

поэтому неравенство (27) выполняется для всякой такой функции. Тогда правая часть (27) стремится к нулю при $s \rightarrow \infty$. В самом деле, для полигональной функции выполнено $|g(x) - g(y)| \leq \kappa|x - y|$, и требуемая сходимость вытекает из сходимости $p_\rho * q_{\alpha'_0/c^2} \rightarrow p_\rho$ в L_1 : если $p(z)$ – ограниченная непрерывная плотность распределения вероятностей, то

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{C}^s} |p * q_{\alpha'_0/c^2}(z) - p(z)| d^{2s}z = 0.$$

Таким образом, мы получили (21) для вогнутых полигональных функций f . Однако произвольную вогнутую функцию f на $[0, 1]$ можно приблизить монотонно неубывающей последовательностью вогнутых полигональных функций f_n . Применяя теорему Беппо–Леви, получаем требуемое утверждение. ■

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Композиция $\Phi = \Phi_2 \circ \Phi_1$ двух гауссовских калибровочно-ковариантных каналов Φ_1, Φ_2 подчиняется правилу

$$K = K_2 K_1, \quad (28)$$

$$\mu = K_2 \mu_1 K_2^* + \mu_2. \quad (29)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2 [1]. *Произвольный гауссовский калибровочно-ковариантный канал Φ является композицией квантово-ограниченного аттенюатора Φ_1 и квантово-ограниченного усилителя Φ_2 .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Подставляя

$$\mu_1 = \frac{1}{2}(I - K_1 K_1^*) = \frac{1}{2}(I - |K_1^*|^2), \quad \mu_2 = \frac{1}{2}(K_2 K_2^* - I) = \frac{1}{2}(|K_2^*|^2 - I)$$

в (29) и используя (28), получаем

$$|K_2^*|^2 = K_2 K_2^* = \mu + \frac{1}{2}(K K^* + I) \geq \begin{cases} I, \\ K K^* \end{cases} \quad (30)$$

в силу неравенства (6). Используя операторную монотонность квадратного корня, имеем

$$|K_2^*| \geq I, \quad |K_2^*| \geq |K^*|.$$

Первое неравенство в (30) гарантирует, что выбирая

$$K_2 = |K_2^*| = \sqrt{\mu + \frac{1}{2}(K K^* + I)} \quad (31)$$

и соответствующую матрицу $\mu_2 = (|K_2^*|^2 - I)/2$, мы получаем (диагонализуемый) квантово-ограниченный усилитель.

Тогда, полагая

$$K_1 = |K_2^*|^{-1}K \quad (32)$$

и принимая во внимание второе неравенство в (30), мы получаем

$$K_1^*K_1 = K^*|K_2^*|^{-2}K = K^*\left[\mu + \frac{1}{2}(KK^* + I)\right]^{-1}K \leq I, \quad (33)$$

откуда следует, что $K_1^*K_1 \leq I$, а следовательно, K_1 и соответствующая матрица $\mu_1 = (I - K_1K_1^*)/2$ дают квантово-ограниченный аттенуатор. ■

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Неравенство (12) в силу (33) влечет $K_1^*K_1 < I$. Обратимость матрицы K влечет $K_1^*K_1 > 0$.

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Для полноты изложения приведем набросок доказательства необходимого обобщения неравенств Березина–Либа. Пусть $\mathcal{X}$ – измеримое пространство с σ -конечной мерой μ , и пусть $P(x)$ – слабо измеримая функция на $\mathcal{X}$, принимающая значения в множестве операторов плотности в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, так что

$$\int_{\mathcal{X}} P(x) \mu(dx) = I_{\mathcal{H}},$$

где интеграл понимается в смысле слабой операторной топологии. Пусть ρ – оператор плотности в $\mathcal{H}$, допускающий представление

$$\rho = \int_{\mathcal{X}} \underline{p}(x) P(x) \mu(dx),$$

где $\underline{p}(x)$ – ограниченная плотность вероятности. Обозначим $\bar{p}(x) = \text{Tr } \rho P(x)$, что является плотностью вероятности, равномерно ограниченной единицей. Тогда для любой вогнутой функции f , определенной на $[0, \infty)$ и удовлетворяющей условию $f(0) = 0$, выполняются неравенства

$$\int_{\mathcal{X}} f(\underline{p}(x)) \mu(dx) \leq \text{Tr } f(\rho) \leq \int_{\mathcal{X}} f(\bar{p}(x)) \mu(dx). \quad (34)$$

Положим $k = \max\{1, \sup_x \underline{p}(x)\}$ и рассмотрим ограничение функции f на $[0, k]$. Тогда найдется монотонно неубывающая последовательность вогнутых полигональных функций f_n , сходящаяся поточечно к f на $[0, k]$ и удовлетворяющая условию $f_n(0) = 0$. Поскольку $|f_n(x)| \leq \kappa_n |x|$, все интегралы и след в соотношении (34), в котором функция f заменена на f_n , конечны для всех n . Докажем (34) для вогнутых полигональных функций f_n , а затем перейдем к пределу при $n \rightarrow \infty$. Отсюда будет также следовать, что интегралы и след в (34) определены корректно, хотя могут принимать значение $+\infty$.

Второе неравенство вытекает из неравенства $\text{Tr } f(\rho) P(x) \leq f(\text{Tr } \rho P(x))$, которое является следствием неравенства Йенсена, примененного вместе со спектральным

разложением оператора ρ . Чтобы доказать первое неравенство, рассмотрим положительную операторнозначную меру

$$M(B) = \int_B P(x) \mu(dx), \quad B \subseteq \mathcal{X},$$

и ее расширение Наймарка до проекторнозначной меры $\{E(B)\}$ в гильбертовом пространстве $\tilde{\mathcal{H}} \supseteq \mathcal{H}$. Рассмотрим ограниченный оператор $R = \int_{\mathcal{X}} \underline{p}(x) E(dx)$ в $\tilde{\mathcal{H}}$, тогда

$$f(R) = \int_{\mathcal{X}} f(\underline{p}(x)) E(dx)$$

и

$$\rho = PRP, \quad Pf(R)P = \int_{\mathcal{X}} f(\underline{p}(x)) \mu(dx),$$

где P – проектор из $\tilde{\mathcal{H}}$ на $\mathcal{H}$. Доказываемое неравенство тогда следует из более общего факта $\text{Tr } Pf(R)P \leq \text{Tr } f(PRP)$ [11].

Благодарности. Авторы благодарны М.Е. Широкову за обсуждение. Работа А.С. Холево выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 14-21-00162).

Список литературы

- [1] V. Giovannetti, A. S. Holevo, R. García-Patrón, *Commun. Math. Phys.*, published online 21 August, 2014, DOI: 10.1007/s00220-014-2150-6.
- [2] A. Mari, V. Giovannetti, A. S. Holevo, *Nature Commun.*, **5** (2014), 3826, 5 pp.
- [3] V. Giovannetti, S. Lloyd, *Phys. Rev. A* (3), **69**:6 (2004), 062307, 9 pp.
- [4] E. H. Lieb, J. P. Solovej, *Acta Math.*, **212**:2 (2014), 379–398.
- [5] A. Wehrl, *Rev. Modern Phys.*, **50**:2 (1978), 221–260.
- [6] E. Lieb, *Commun. Math. Phys.*, **62**:1 (1978), 35–41.
- [7] А. С. Холево, *Квантовые системы, каналы, информация*, МЦНМО, М., 2010.
- [8] A. S. Holevo, M. Sohma, O. Hirota, *Rep. Math. Phys.*, **46**:3 (2000), 343–358.
- [9] Ф. А. Березин, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **36**:5 (1972), 1134–1167.
- [10] А. С. Холево, *Вероятностные и статистические аспекты квантовой теории*, ИКИ, М., 2003.
- [11] Ф. А. Березин, *Матем. сб.*, **88(130)**:2(6) (1972), 268–276.

Поступила в редакцию 11.08.2014