Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Грозданов, А. О. Старинец, Предел нулевой вязкости
в голографической жидкости Гаусса–Бонне, *ТМФ*, 2015,
том 182, номер 1, 76–90

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8779>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.85.209

26 апреля 2023 г., 17:17:02

© 2015 г.

С. Грозданов*, А. О. Старинец*

ПРЕДЕЛ НУЛЕВОЙ ВЯЗКОСТИ В ГОЛОГРАФИЧЕСКОЙ ЖИДКОСТИ ГАУССА–БОННЕ

В недавних публикациях высказывалась гипотеза о существовании недиссипативных квантовых жидкостей, т. е. жидкостей с нулевой или исчезающе малой вязкостью и нулевым производством энтропии, характеризующихся тем не менее нетривиальными транспортными коэффициентами второго порядка. Естественным кандидатом в недиссипативные жидкости является гипотетическая конформная квантовая жидкость, голографически дуальное описание инфракрасного предела которой дается пятимерной гравитацией Гаусса–Бонне. Известно, что сдвиговая вязкость в этой теории может быть сделана сколь угодно малой за счет приближения параметра связи Гаусса–Бонне к критическому значению. Вычислены (непертурбативно по параметру связи) транспортные коэффициенты жидкости Гаусса–Бонне (три из шести этих коэффициентов ранее не были известны) и рассмотрен предел нулевой вязкости. Показано, что три из пяти коэффициентов второго порядка в этом пределе не равны нулю, однако они не удовлетворяют критерию нулевого производства энтропии. Таким образом, голографическая жидкость Гаусса–Бонне не является недиссипативной квантовой жидкостью.

Ключевые слова: калибровочно-гравитационная дуальность, гравитация Гаусса–Бонне, гидродинамика, транспортные коэффициенты, вязкость.

DOI: 10.4213/tmf8779

1. ВВЕДЕНИЕ

Экспериментальные программы по столкновению тяжелых ионов в национальной лаборатории Брукхейвена (с 2000 г.) и в ЦЕРНе (с 2010 г.) вызвали новую волну интереса к поведению калибровочных теорий при конечных температуре и плотности (см, например, обзор [1]). Температура и плотность ядерного вещества в этих столкновениях превышают критические параметры перехода адроны–кварк–глюонная плазма, и анализ параметров остаточных адронов позволяет сделать вывод о том, что в столкновениях образуется на короткое время квантовая ядерная жидкость с крайне малым (меньшим чем любое экспериментально известное) отношением сдвиговой вязкости к удельной энтропии. Эволюция ядерной жидкости до

*Rudolf Peierls Centre for Theoretical Physics, University of Oxford, Oxford, UK.
E-mail: andrei.starinets@physics.ox.ac.uk

ее адронизации описывается релятивистскими уравнениями Навье–Стокса с транспортными (кинетическими) коэффициентами, которые определяются соответствующей микроскопической калибровочной теорией, квантовой хромодинамикой (КХД). Вычисление транспортных коэффициентов в калибровочных теориях представляет собой сложную задачу, особенно если речь идет о непертурбативном (по константе связи) режиме (а именно этот режим реализуется экспериментально в столкновениях тяжелых ионов). В настоящее время не существует методов, которые позволили бы вычислить вязкость и другие кинетические коэффициенты КХД вне рамок теории возмущений. Однако это можно сделать в других калибровочных теориях, используя подходы, развитые в последние 10–12 лет в рамках калибровочно-гравитационной (калибровочно-струнной) дуальности.

Развитие калибровочно-струнной дуальности привело к лучшему пониманию количественных, качественных и концептуальных аспектов динамики жидкости [2]–[4]. Во-первых, для многих теорий транспортные коэффициенты и спектральные функции в режиме сильной связи были вычислены в явном виде как численно, так и аналитически. Во-вторых, было обнаружено, что отношение вязкости к энтропии в пределе бесконечно большой константы взаимодействия равно одному и тому же числу для всех теорий, имеющих в этом пределе дуальное калибровочно-гравитационное описание [5]–[9]. В-третьих, анализ гидродинамики методами квантовой теории поля привел к трактовке гидродинамического описания как эффективной теории поля, в рамках которой в разложении по производным должны быть обязательно учтены все члены, совместимые с симметриями данной микроскопической теории [3]. Так, например, тензор энергии-импульса конформной нейтральной жидкости в искривленном пространстве-времени имеет вид

$$T^{ab} = \varepsilon u^a u^b + P \Delta^{ab} + \Pi^{ab} + \dots,$$

где u^a – 4-вектор скорости жидкости, ε и P – соответственно ее плотность энергии и давление, $\Delta^{ab} \equiv g^{ab} + u^a u^b$, а члены первого и второго порядка по градиентам скорости даются выражением¹⁾

$$\begin{aligned} \Pi^{ab} = & -\eta \sigma^{ab} + \eta \pi \left[\langle D \sigma^{ab} \rangle + \frac{1}{d-1} \sigma^{ab} (\nabla \cdot u) \right] + \kappa [R^{(ab)} - (d-2) u_c R^{c(ab)d} u_d] + \\ & + \lambda_1 \sigma^{(a} \sigma^{b)c} + \lambda_2 \sigma^{(a} \Omega^{b)c} + \lambda_3 \Omega^{(a} \Omega^{b)c}, \end{aligned} \quad (1)$$

где $D \equiv u^a \nabla_a$, симметричный тензор σ^{ab} первых ковариантных производных с нулевым следом определен как

$$\sigma^{ab} = 2 \langle \nabla^a u^b \rangle,$$

а обозначения симметризации следуют из определения

$$A^{(ab)} \equiv \frac{1}{2} \Delta^{ac} \Delta^{bd} (A_{cd} + A_{dc}) - \frac{1}{d-1} \Delta^{ab} \Delta^{cd} A_{cd} \equiv \langle A^{ab} \rangle.$$

По построению эти тензоры поперечны, $u_a A^{(ab)} = 0$, симметричны и имеют нулевой след, $g_{ab} A^{(ab)} = 0$. Тензор “завихренности” $\Omega^{\mu\nu}$ является антисимметричным,

¹⁾ Явные выражения для членов третьего и высших порядков неизвестны.

поперечным и бесследовым:

$$\Omega^{ab} = \frac{1}{2} \Delta^{ac} \Delta^{bd} (\nabla_c u_d - \nabla_d u_c).$$

Далее всюду размерность пространства-времени, в котором определена теория поля, равна четырем, размерность дуального пространства – пяти, R_{cabd} и R_{ab} , как обычно, обозначают тензоры Римана и Риччи. Греческие индексы относятся к пятимерному пространству, латинские индексы $a, b, c, d, \dots$ – к четырехмерному, а индексы с латинскими буквами из средней части алфавита ($i, j, k, \dots$) – к трехмерному.

Шесть транспортных коэффициентов (η , $\tau_{\text{п}}$, κ , λ_1 , λ_2 и λ_3) в уравнении (1) определяются микроскопическими свойствами жидкости²⁾. Вычисление этих коэффициентов в пределе сильной связи представляет собой трудную задачу и в настоящее время возможно лишь для теорий, имеющих в этом пределе дуальное описание в терминах гравитационных степеней свободы. Например, для максимально суперсимметричной четырехмерной калибровочной теории с группой $SU(N_c)$ в пределе $N_c \rightarrow \infty$ и больших значений константы связи 'т Хофта $\lambda = g_{\text{YM}}^2 N_c \gg 1$ безразмерное выражение для отношения сдвиговой вязкости к плотности энтропии имеет вид [12]–[14]

$$\frac{\eta}{s} = \frac{1}{4\pi} (1 + 15\zeta(3)\lambda^{-3/2} + \dots). \quad (2)$$

Для этой теории известны также аналогичные выражения для всех пяти коэффициентов второго порядка (включая поправки, пропорциональные $\lambda^{-3/2}$) [3], [13]–[21]. В пределе слабой связи $\eta/s \sim 1/\lambda^2 \ln \lambda^{-1}$ [22]. Отношение сдвиговой вязкости к плотности энтропии интересно своей универсальностью: $\eta/s = 1/4\pi$ для всех теорий, имеющих дуальное гравитационное описание (в режиме, когда это описание применимо, например в пределе бесконечно большой константы связи). Поправки к универсальному пределу могут быть и положительными, как в уравнении (2), и отрицательными [23], [24]. Значительную популярность в этой связи приобрели вычисления с (дуальным) гравитационным действием Гаусса–Бонне

$$S = \frac{1}{2\kappa_5^2} \int d^5x \sqrt{-g} \left[R - 2\Lambda + \frac{\lambda_{\text{GB}}}{2} L^2 (R^2 - 4R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma}) \right], \quad (3)$$

где космологическая постоянная равна $\Lambda = -6/L^2$. Отношение вязкости к энтропии в (гипотетической) дуальной четырехмерной теории поля дается выражением [24]

$$\frac{\eta}{s} = \frac{1 - 4\lambda_{\text{GB}}}{4\pi}$$

и, таким образом, может быть сделано бесконечно малым в пределе $\lambda_{\text{GB}} \rightarrow 1/4$. Действие Гаусса–Бонне привлекательно тем, что оно по-прежнему приводит к уравнениям движения второго порядка, несмотря на присутствие в лагранжиане членов с высшими производными. Это означает, что вычисления поправок к результатам гравитации Эйнштейна можно производить непертурбативно по параметру

²⁾В отсутствие конформной инвариантности нейтральные жидкости характеризуются двумя коэффициентами первого порядка (сдвиговой вязкостью η и объемной, или второй вязкостью ζ [10]) и пятнадцатью коэффициентами второго порядка [11].

Гаусса–Бонне λ_{GB} , и рассуждения о пределе нулевой вязкости в этом контексте являются осмысленными. Слабость рассмотрения моделей с действием Гаусса–Бонне в том, что дуальная конформная четырехмерная теория поля остается неизвестной, более того, пятимерное гравитационное рассмотрение позволяет сделать вывод о наличии в такой теории патологий (нарушения причинности и т. д.) для слишком больших значений λ_{GB} , не превышающих, однако, $\lambda_{\text{GB}} = 1/4$ [25]. Упомянутые патологии относятся к состояниям с большим значением импульса. Можно ожидать, что добавление к действию (3) других полей улучшит ультрафиолетовые свойства гипотетической теории поля [26]. В настоящей статье мы примем именно такую точку зрения, рассматривая (3) как действие, адекватно описывающее инфракрасный (гидродинамический) предел гипотетической четырехмерной теории поля, которую мы будем называть голографической жидкостью Гаусса–Бонне.

Полные (непертурбативные по параметру λ_{GB}) аналитические выражения для транспортных коэффициентов второго порядка τ_{Π} и κ голографической жидкости Гаусса–Бонне были определены в работе [27] (время релаксации τ_{Π} было ранее найдено численно в работе [28]):

$$\tau_{\Pi} = \frac{1}{2\pi T} \left(\frac{1}{4} (1 + \gamma) \left(5 + \gamma - \frac{2}{\gamma} \right) - \frac{1}{2} \ln \frac{2(1 + \gamma)}{\gamma} \right), \quad (4)$$

$$\kappa = \frac{\eta}{\pi T} \frac{(1 + \gamma)(2\gamma^2 - 1)}{2\gamma^2}, \quad (5)$$

где для удобства введен новый параметр

$$\gamma = \sqrt{1 - 4\lambda_{\text{GB}}}. \quad (6)$$

Транспортные коэффициенты λ_1 , λ_2 и λ_3 вычислены в настоящей работе (см. формулы (26)–(28)), что позволяет рассмотреть так называемый недиссипативный предел (предел нулевой вязкости). Пертурбативные (в первом порядке по параметру $\lambda_{\text{GB}} \ll 1$) результаты для всех коэффициентов жидкости Гаусса–Бонне были ранее получены Шавериным и Яромом [29]. При разложении в ряд по λ_{GB} наши формулы в первом порядке совпадают с выражениями, полученными в статье [29].

В недавней работе [30] высказано предположение о существовании недиссипативных жидкостей, т. е. жидкостей с нулевой или пренебрежимо малой вязкостью и нетривиальными транспортными коэффициентами второго порядка, не приводящими к производству энтропии³⁾.

Для конформных жидкостей проанализированные в статье [30] условия недиссипативности сводятся к условию $\eta = 0$ и соотношениям между коэффициентами второго порядка

$$\kappa = 2\lambda_1, \quad 2\eta\tau_{\Pi} - 4\lambda_1 - \lambda_2 = 0. \quad (7)$$

Голографическая жидкость Гаусса–Бонне является естественным кандидатом в недиссипативные жидкости, так как ее вторая вязкость тождественно равна нулю, а сдвиговая вязкость обращается в нуль в пределе $\lambda \rightarrow 1/4$ (при $\gamma \rightarrow 0$).

³⁾В работе [30] показано, что класс жидкостей с такими свойствами существует, по крайней мере теоретически. Подчеркнем, что речь идет не о механизме сверхтекучести, а о свойствах транспортных коэффициентов обычных жидкостей.

В настоящей статье мы вычислим транспортные коэффициенты голографической жидкости Гаусса–Бонне (до второго порядка включительно) непertурбативно по параметру λ_{GB} и покажем, что в пределе нулевой вязкости соотношения (7) не выполняются. Таким образом, голографическая жидкость Гаусса–Бонне не является недиссипативной.

2. ЧЕРНЫЕ БРАНЫ В ГРАВИТАЦИИ ГАУССА–БОННЕ

Уравнения движения для гравитации Гаусса–Бонне, следующие из действия (3),

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + g_{\mu\nu}\Lambda = \frac{\lambda_{\text{GB}}L^2}{4}g_{\mu\nu}(R^2 - 4R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma}) - \lambda_{\text{GB}}L^2(RR_{\mu\nu} - 2R_{\mu\alpha}R_{\nu}^{\alpha} - 2R_{\mu\alpha\nu\beta}R^{\alpha\beta} + R_{\mu\alpha\beta\gamma}R_{\nu}^{\alpha\beta\gamma}), \quad (8)$$

допускают решение в виде черной браны (черной дыры с трансляционно-инвариантным горизонтом событий),

$$ds^2 = -f(r)N_{\text{GB}}^2 dt^2 + \frac{1}{f(r)} dr^2 + \frac{r^2}{L^2}(dx^2 + dy^2 + dz^2), \quad (9)$$

где

$$f(r) = \frac{r^2}{L^2} \frac{1}{2\lambda_{\text{GB}}} \left[1 - \sqrt{1 - 4\lambda_{\text{GB}} \left(1 - \frac{r_+^4}{r^4} \right)} \right]$$

и произвольная константа N_{GB}^2 выбрана так, чтобы скорость света на границе равнялась единице:

$$N_{\text{GB}}^2 = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 - 4\lambda_{\text{GB}}}).$$

Температура Хокинга, ассоциированная с метрикой (9), равна

$$T = N_{\text{GB}} \frac{r_+}{\pi L^2} = \frac{r_+}{\sqrt{2}\pi L^2} \sqrt{1 + \gamma},$$

где параметр γ связан с λ_{GB} соотношением (6).

Метрика (9) дуальна гипотетической четырехмерной конформной теории поля при конечной температуре T , плотность энергии и плотность энтропии которой равны соответственно

$$\varepsilon = 3P = \frac{3}{4}Ts, \quad s = \frac{2\pi}{\kappa_5^2} \left(\frac{r_+}{L} \right)^3 = \frac{4\sqrt{2}\pi^4 L^3}{\kappa_5^2} \frac{T^3}{(1 + \gamma)^{3/2}}. \quad (10)$$

В последующих формулах мы положим $L = 1$. Гравитация Гаусса–Бонне в контексте калибровочно-гравитационной дуальности подробно анализируется в работах [24]–[26], [28], [31], к которым мы отсылаем заинтересованного читателя.

3. ВЫЧИСЛЕНИЕ ТРАНСПОРТНЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ

В рамках калибровочно-гравитационной дуальности существует несколько методов определения транспортных коэффициентов. Как правило, они базируются либо на применении формул Кубо к двухточечным корреляционным функциям, вычисленным с помощью дуальной гравитации, либо на вычислении низших (гидродинамических) частот квазинормального спектра дуальной черной браны [12], [20], [32]–[36]. Все эти методы связаны между собой, но в конкретных обстоятельствах применение того или иного метода часто диктуется соображениями технического удобства. Несколько обособленным является подход гидродинамическо-гравитационной дуальности [15], [4], приводящий к тем же результатам. Для вычисления коэффициентов второго порядка в работах [36], [20] были получены формулы Кубо для трехточечных корреляционных функций.

В первой части данного раздела мы вычислим простейшую двухточечную корреляционную функцию тензора энергии-импульса и определим коэффициенты τ_Π (4) и κ (5), ранее найденные в статье [27] с помощью другого метода. Во второй части с использованием формул Кубо и трехточечных корреляционных функций будут вычислены ранее неизвестные транспортные коэффициенты λ_1 , λ_2 , λ_3 .

3.1. Вычисление времени релаксации τ_Π и коэффициента κ . Гравитационная волна определенной поляризации вызывает деформацию жидкости, описываемую в линейном приближении двухточечной функцией соответствующих компонент тензора энергии-импульса [2]. Как показано в работе [3], простейшее гравитационное возмущение вида $h_{xy}(t, z)$ с импульсом, направленным вдоль оси z , вызывает линейный отклик, запаздывающая функция Грина которого при малых значениях энергии ω и импульса q равна

$$G_{xy,xy}^R(\omega, \mathbf{q}) = P - i\eta\omega + \eta\tau_\Pi\omega^2 - \frac{\kappa}{2}(\omega^2 + q^2) + \dots \quad (11)$$

Таким образом, вычислив $G_{xy,xy}^R(\omega, \mathbf{q})$ каким-либо иным способом (например, по теории возмущений или с помощью дуальной гравитации) и разложив полученное выражение в ряд по малым энергиям и импульсам, можно определить коэффициенты τ_Π и κ (а также давление P и сдвиговую вязкость η).

Симметрии метрики (9) таковы, что гравитационное возмущение $h_{xy}(r)e^{-it\omega+iqz}$ удовлетворяет замкнутому уравнению движения в линейном приближении (см, например, работы [33], [34]). Возмущение вида $Z_1 = h_{xy}^x$ удовлетворяет уравнению движения безмассового скалярного поля минимальной связи в метрике (9),

$$A_2 Z_1'' + A_1 Z_1' + A_0 Z_1 = 0, \quad (12)$$

где коэффициенты заданы следующими выражениями:

$$\begin{aligned} A_2 &= rf(\lambda_{\text{GB}}f' - r), \\ A_1 &= rf'(\lambda_{\text{GB}}f' - r) - 3rf + \lambda_{\text{GB}}f(rf'' + 2f'), \\ A_0 &= \frac{2}{f(1 + \sqrt{1 - 4\lambda_{\text{GB}}})} \left(r\omega^2(\lambda_{\text{GB}}f' - r) - (1 + \sqrt{1 - 4\lambda_{\text{GB}}})f^2(\lambda_{\text{GB}}f'' - 1) - \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 - 4\lambda_{\text{GB}}})f(f''(r^2 - \lambda_{\text{GB}}q^2) - 2\lambda_{\text{GB}}f'^2 + 4rf' + q^2 - 12r^2) \right). \end{aligned}$$

Так как нас интересует запаздывающая функция Грина, граничные условия на горизонте событий выбираются в виде “входящей волны” [32], что приводит к следующей удобной форме записи решения:

$$Z_1 = \tilde{f}(r)^{-i\mathfrak{w}/2}(1 + g(r)), \quad (13)$$

где

$$\tilde{f}(r) = \frac{1}{2\lambda_{\text{GB}}} [1 - \sqrt{1 - 4\lambda_{\text{GB}}(1 - (r_+/r)^4)}].$$

Здесь и далее мы используем стандартные обозначения для безразмерных энергии и импульса [33]:

$$\mathfrak{w} = \frac{\omega}{2\pi T}, \quad \mathfrak{q} = \frac{q}{2\pi T}.$$

Удобно также переопределить радиальную координату следующим образом [24]:

$$v = 1 - \sqrt{1 - 4\lambda_{\text{GB}}(1 - (r_+/r)^4)}, \quad (14)$$

при этом

$$Z_1(v) = \left(\frac{v}{2\lambda_{\text{GB}}} \right)^{-i\mathfrak{w}/2} (1 + g(v)).$$

Таким образом, уравнение (12) можно переписать как

$$v(1 - v) \partial_v^2 g(v) + [1 + v + i\mathfrak{w}(v - 1)] \partial_v g(v) + \mathcal{G}(v)[g(v) + 1] = 0, \quad (15)$$

где $\mathcal{G}(v) = -i\mathfrak{w} + \mathfrak{w}^2 \mathcal{G}_{\mathfrak{w}}(v) + \mathfrak{q}^2 \mathcal{G}_{\mathfrak{q}}(v)$, а функции $\mathcal{G}_{\mathfrak{w}}(v)$ и $\mathcal{G}_{\mathfrak{q}}(v)$ определены по формулам

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{\mathfrak{w}}(v) &= \frac{(v - 1)[(4\lambda_{\text{GB}} + v(v - 2))^{3/2} - 8\lambda_{\text{GB}}^{3/2}(v - 1)^2]}{4v(4\lambda_{\text{GB}} + v(v - 2))^{3/2}}, \\ \mathcal{G}_{\mathfrak{q}}(v) &= \frac{(v - 1)\sqrt{\lambda_{\text{GB}}}(1 + \sqrt{1 - 4\lambda_{\text{GB}}})(1 + 8\lambda_{\text{GB}} + 3v(v - 2))}{2(4\lambda_{\text{GB}} + v(v - 2))^{3/2}}. \end{aligned}$$

Решение уравнения (15) можно найти по теории возмущений, используя малость параметров $\mathfrak{w}$ и $\mathfrak{q}$ в гидродинамическом приближении. Вводя параметр малости μ , одинаковый для обеих переменных $\mathfrak{w} \ll 1$, $\mathfrak{q} \ll 1$, можно записать

$$g(v) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^n g_n(v),$$

причем уравнения для функций g_n имеют вид

$$v(1 - v) \partial_v^2 g_n(v) + (1 + v) \partial_v g_n(v) + H_n(v) = 0. \quad (16)$$

Функции H_n определяются рекуррентно по функциям $\mathcal{G}$ и g_m с $m < n$:

$$H_n(v) = i\mathfrak{w} \partial_v [(1-v)g_{n-1}(v)] + (\mathfrak{w}^2 \mathcal{G}_{\mathfrak{w}}(v) + \mathfrak{q}^2 \mathcal{G}_{\mathfrak{q}}(v))g_{n-2}(v),$$

где $n \geq 1$. В первом порядке $g_0 = 1$ и $g_{-1} = 0$, что дает $H_1 = -i\mathfrak{w}$.

Общее решение для функций g_n дается выражением⁴⁾

$$g_n(v) = D_n + \int^v dv' \frac{(1-v')^2}{v'} \left(C_n - \int^{v'} dv'' \frac{H_n(v'')}{(1-v'')^3} \right).$$

В первом порядке получаем

$$g_1(v) = D_1 - \frac{1}{2}C_1(4-v)v + \left(C_1 + \frac{i\mathfrak{w}}{2} \right) \ln v. \quad (17)$$

Так как $v = 0$ является регулярной особой точкой дифференциального уравнения (15), функции g_n не должны иметь особенностей в этой точке. Для решения уравнения (17) это приводит к выбору $C_1 = -i\mathfrak{w}/2$. Кроме того, функции g_n можно положить равными нулю на бесконечности (т. е. при $v = 1 - \sqrt{1 - 4\lambda_{\text{GB}}}$), что автоматически обеспечивает определенный голографией выбор нормировки решения Z_1 . Таким образом, получаем

$$D_1 = -\frac{i\mathfrak{w}}{2}(1 + 2\lambda_{\text{GB}} - \sqrt{1 - 4\lambda_{\text{GB}}})$$

и

$$g_1(v) = -\frac{i\mathfrak{w}}{4}(3 - 2\gamma - \gamma^2 - 4v + v^2), \quad (18)$$

где параметр γ определен соотношением (6). Аналогичным образом для функции g_2 получаем выражение

$$g_2(v) = \mathfrak{w}^2 g_2^{(\mathfrak{w})}(v) + \mathfrak{q}^2 g_2^{(\mathfrak{q})}(v) + \frac{\mathfrak{w}^2}{4} \int^v dv' \frac{(1-v')^2 \ln[\gamma^2 - 1 + v' - \sqrt{(\gamma^2 - 1)(\gamma^2 - (1-v')^2)}]}{v'}, \quad (19)$$

где функции $g_2^{(\mathfrak{w})}$ и $g_2^{(\mathfrak{q})}$ даются формулами, слишком громоздкими, чтобы приводить их здесь в явном виде. Граничные условия позволяют определить константы интегрирования C_2 и D_2 , интегрируя почленно разложение подынтегрального выражения вблизи границы.

Запаздывающая функция Грина определяется согласно рецепту, сформулированному в работе [32]:

$$\begin{aligned} G_{xy,xy}^{\text{R}}(\omega, \mathbf{q}) &= \frac{r_+^4 \gamma^2 \sqrt{2(1+\gamma)}}{\kappa_5^2} \lim_{v \rightarrow 1-\gamma} \left[\frac{v}{(1-v)^2} Z_1(v, -\mathfrak{w}, -\mathbf{q}) \frac{\partial}{\partial v} Z_1(v, \mathfrak{w}, \mathbf{q}) \right] = \\ &= \frac{r_+^4}{\kappa_5^2} (1-\gamma) \sqrt{2(1+\gamma)} Z_1(1-\gamma, -\mathfrak{w}, -\mathbf{q}) \frac{\partial}{\partial v} Z_1(v, \mathfrak{w}, \mathbf{q}) \Big|_{v=1-\gamma}. \end{aligned} \quad (20)$$

⁴⁾ Оба интеграла в этом выражении являются неопределенными. После вычисления интеграла независимая переменная в полученном результате замещается переменной, стоящей на верхнем пределе.

Используя найденное гидродинамическое разложение решения Z_1 (формулы (13), (18) и (19)), можно вычислить двухточечную функцию (20) в явном виде и сравнить полученное выражение с разложением (11). Таким образом получаются выражения для давления

$$P = \frac{\sqrt{2}\pi^4}{\kappa_5^2} \frac{T^4}{(1+\gamma)^{3/2}}, \quad (21)$$

сдвиговой вязкости

$$\eta = \frac{\sqrt{2}\pi^3 T^3}{\kappa_5^2} \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)^{3/2}} \quad (22)$$

и, с учетом формулы (10), отношение сдвиговой вязкости к плотности энтропии [24]

$$\frac{\eta}{s} = \frac{1}{4\pi} \gamma^2 \quad (23)$$

а также коэффициенты второго порядка τ_Π (4) и κ (5). Наши результаты совпадают с выражениями для τ_Π и κ , полученными ранее другим методом в работе [27]. В пределе $\lambda_{\text{ГВ}} \rightarrow 0$ (при $\gamma \rightarrow 1$) полученные результаты совпадают с соответствующими выражениями для транспортных коэффициентов в максимально суперсимметричной теории Янга–Миллса⁵⁾ [12], [3]:

$$\eta = \frac{\pi}{8} N_c^2 T^3 \quad \tau_\Pi = \frac{2 - \ln 2}{2\pi T}, \quad \kappa = \frac{\eta}{\pi T}.$$

Результаты (4), (5) непертурбативны по $\lambda_{\text{ГВ}}$. В первом порядке разложения по малым $\lambda_{\text{ГВ}}$ мы имеем

$$\eta\tau_\Pi = \frac{\pi^2 T^2}{4\kappa_5^2} \left[2 - \ln 2 + \frac{1}{2} \lambda_{\text{ГВ}} (-21 + \ln 32) + O(\lambda_{\text{ГВ}}^2) \right],$$

что совпадает с выражением, полученным пертурбативно в работе [29], а также с вычислениями в рамках гидродинамическо-гравитационной дуальности [21] и с нашими вычислениями методом трехточечных корреляторов, представленными в следующем пункте.

3.2. Вычисление коэффициентов λ_1 , λ_2 и λ_3 . Чтобы найти коэффициенты λ_1 , λ_2 , λ_3 , используем метод, представленный в работе [36]. Этот подход базируется на использовании формализма Швингера–Келдыша [37], [38] и вычислении трехточечных корреляционных функций тензора энергии-импульса с помощью дуальной гравитации. Соответствующие формулы Кубо получены в статьях [36], [20].

Рассмотрим теорию с лагранжианом $\mathcal{L}[\phi, h]$, где символ ϕ использован для коллективного обозначения полей материи, а h соответствует возмущению некоторой фиксированной метрики g . В формализме Швингера–Келдыша происходит удвоение степеней свободы $\phi \rightarrow \phi^\pm$, $g \rightarrow g^\pm$, $h \rightarrow h^\pm$, причем поля с индексом плюс определены на верхней линии контура в плоскости комплексного времени, направленной от t_0 к $t_f > t_0$, а поля с индексом минус – на нижней линии контура, направленной от t_f к t_0 . При конечной температуре $T = 1/\beta$ эти части контура соединены третьей

⁵⁾При этом необходимо учесть нормировку действия $N_c^2 = 4\pi^2/\kappa_5^2$.

частью, направленной от t_f к $t_f - i\beta$. Обозначение φ используется для евклидовых полей, определенных на этой третьей части контура. Производящий функционал корреляционных функций тензора энергии-импульса в этом формализме дается выражением

$$W[h^+, h^-] = \ln \int \mathcal{D}\phi^+ \mathcal{D}\phi^- \mathcal{D}\varphi \exp \left\{ i \int d^4 x^+ \sqrt{-g^+} \mathcal{L}[\phi^+(x^+), h^+] - \int_0^\beta d^4 y \mathcal{L}_E[\varphi(y)] - i \int d^4 x^- \sqrt{-g^-} \mathcal{L}[\phi^-(x^-), h^-] \right\}.$$

Удобно ввести базис Келдыша для полей материи

$$\phi_R = \frac{1}{2}(\phi^+ + \phi^-), \quad \phi_A = \phi^+ - \phi^-$$

и аналогичный базис для возмущений метрики и тензора энергии-импульса. После вариации по полям необходимо положить $\phi^+ = \phi^-$, поэтому все поля с индексом A обращаются в ноль, и мы можем положить $T^{ab} \equiv T_R^{ab}$. Среднее значение тензора энергии-импульса, определяемое соотношением

$$\langle T_R^{ab}(x) \rangle = - \frac{2i}{\sqrt{-g}} \frac{\delta W}{\delta h_{A ab}(x)} \Big|_{h=0},$$

можно разложить в ряд в окрестности $x = 0$:

$$\begin{aligned} \langle T_R^{ab}(0) \rangle &= G_R^{ab}(0) - \frac{1}{2} \int d^4 x G_{RA}^{ab,cd}(0, x) h_{cd}(x) + \\ &+ \frac{1}{8} \int d^4 x d^4 y G_{RAA}^{ab,cd,ef}(0, x, y) h_{cd}(x) h_{ef}(y) + \dots; \end{aligned}$$

здесь $G_{RAA\dots}$ обозначают полные запаздывающие функции Грина [39], определенные функциональными производными [36],

$$G_{RA\dots}^{ab,cd,\dots}(0, x, \dots) = \frac{(-i)^{n-1} (-2i)^n \delta^n W}{\partial h_{A ab}(0) \partial h_{R cd}(x) \dots} \Big|_{h=0} = (-i)^{n-1} \langle T_R^{ab}(0) T_A^{cd}(x) \dots \rangle,$$

где многоточие обозначает дальнейшие функциональные производные по h_R и соответствующие им дальнейшие вставки T_A^{ab} в n -точечной функции Грина.

Если трехточечные корреляционные функции известны, все транспортные коэффициенты до второго порядка включительно могут быть вычислены с помощью формул Кубо, полученных в работах [36], [20]:

$$\begin{aligned} \eta &= i \lim_{p, q \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial q^0} G_{RAA}^{xy,xz,yz}(p, q), \\ 2\eta\tau_\Pi - \kappa &= \lim_{p, q \rightarrow 0} \frac{\partial^2}{\partial (p^0)^2} G_{RAA}^{xy,xz,yz}(p, q), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= \eta\tau_\Pi - \lim_{p,q \rightarrow 0} \frac{\partial^2}{\partial p^0 \partial q^0} G_{RAA}^{xy,xz,yz}(p,q), \\
\lambda_2 &= 2\eta\tau_\Pi - 4 \lim_{p,q \rightarrow 0} \frac{\partial^2}{\partial p^0 \partial q^z} G_{RAA}^{xy,ty,xz}(p,q), \\
\lambda_3 &= 4 \lim_{p,q \rightarrow 0} \frac{\partial^2}{\partial p^z \partial q^z} G_{RAA}^{xy,tx,ty}(p,q), \\
\kappa &= \lim_{p,q \rightarrow 0} \frac{\partial^2}{\partial (p^z)^2} G_{RAA}^{xy,tx,ty}(p,q).
\end{aligned}$$

С помощью трехточечных функций можно также вычислить давление:

$$P = \lim_{p^0 \rightarrow 0} \lim_{q^0 \rightarrow 0} G_{RAA}^{xy,xz,yz}(p,q) = - \lim_{p^z \rightarrow 0} \lim_{q^z \rightarrow 0} G_{RAA}^{xy,tx,ty}(p,q). \quad (24)$$

В нашей статье мы используем те же обозначения, что и в работе [3], поэтому знак нашего коэффициента λ_3 противоположен знаку λ_3 в обозначениях, принятых в [20], а знак коэффициента λ_2 – знаку λ_2 в [29].

Вычисление трехточечных функций с использованием дуальной гравитации зиждется на нахождении решения уравнений движения (8) во втором порядке по возмущению метрики

$$g_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + \epsilon r^2 h_{\mu\nu}^{(1)} + \epsilon^2 r^2 h_{\mu\nu}^{(2)},$$

где необходимое условие на границе имеет вид $h_{\mu\nu}^{(2)} = 0$ [20]. Решение уравнений движения представляет собой функционал по отношению к граничным условиям $h_{\mu\nu}^{(b)} = h_{\mu\nu}^{(1)}(r)|_{r \rightarrow \infty}$, и трехточечные функции определяются трехкратным варьированием действия на массовой оболочке по $h_{\mu\nu}^{(b)}$.

Для вычисления корреляторов необходимо рассмотреть возмущения метрики следующих типов:

$$\begin{aligned}
h_{xy} &= h_{xy}(r) e^{-i(p^0+q^0)t}, & h_{xz} &= h_{xz}(r) e^{-ip^0 t}, & h_{yz} &= h_{yz}(r) e^{-iq^0 t}, \\
h_{xy} &= h_{xy}(r) e^{i(p^z+q^z)z}, & h_{tx} &= h_{tx}(r) e^{ip^z z}, & h_{ty} &= h_{ty}(r) e^{iq^z z}, \\
h_{xy} &= h_{xy}(r) e^{-ip^0 t + iq^z z}, & h_{xz} &= h_{xz}(r) e^{-ip^0 t}, & h_{ty} &= h_{ty}(r) e^{iq^z z}.
\end{aligned}$$

Рассмотрим в качестве примера вычисление трехточечной функции $G_{RAA}^{xy,xz,yz}$. Прежде всего нам необходимо найти решения для возмущений первого порядка $h_{xy}^{(1)}$, $h_{xz}^{(1)}$ и $h_{yz}^{(1)}$ со стандартным граничным условием “входящей волны” на горизонте и условием $h_{\mu\nu}^{(1)} = h_{\mu\nu}^{(b)}$ на границе. Как и ранее, в вычислениях удобно использовать переменную v (14). Так как гравитационные возмущения в этой группе зависят только от радиальной переменной и от времени, они удовлетворяют одному и тому же дифференциальному уравнению с точностью до переобозначения частот $p^0 + q^0$, p^0 и q^0 . Решение этого уравнения в гидродинамическом пределе было найдено в предыдущем пункте (в нем нужно положить равной нулю пространственную компоненту импульса):

$$\begin{aligned}
h_{xy}^{(1)}(v) &= h_{xy}^{(b)} v^{-i(p^0+q^0)/4\pi T} \left[1 - \frac{i(p^0+q^0)}{8\pi T} (3 - 2\gamma - \gamma^2 - 4v + v^2) + \frac{(p^0+q^0)^2}{4\pi^2 T^2} g_2^{(w)}(v) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{(p^0+q^0)^2}{16\pi^2 T^2} \int^v dv' \frac{(1-v')^2 \ln[\gamma^2 - 1 + v' - \sqrt{(\gamma^2 - 1)(\gamma^2 - (1-v')^2)}]}{v'} \right].
\end{aligned}$$

Решения для флуктуаций $h_{xz}^{(1)}$ и $h_{yz}^{(1)}$ выглядят точно так же с точностью до переопределения частот и граничных условий.

Теперь нам необходимо определить флуктуацию второго порядка. Уравнение движения снова сводится к уравнению типа (16),

$$v(1-v)\partial_v^2 h(v) + (1+v)\partial_v h(v) + \mathcal{H}(v) = 0, \quad (25)$$

где $\mathcal{H}(v)$ представляет собой громоздкое выражение, которое мы не выписываем в явном виде. Решение уравнения (25) имеет вид

$$h(v) = D + \int^v dv' \frac{(1-v')^2}{v'} \left(C - \int^{v'} dv'' \frac{\mathcal{H}(v'')}{(1-v'')^3} \right).$$

Для возмущения $h_{xy}^{(2)}$ функция $\mathcal{H}$ пропорциональна $p^0 q^0$, и само возмущение удовлетворяет условиям “входящей волны” на горизонте и условию $h_{xy}^{(2)} = 0$ на границе. Решение имеет вид

$$h_{xy}^{(2)} = h_{xz}^{(b)} h_{yz}^{(b)} v^{-i(p^0+q^0)/4\pi T} \frac{p^0 q^0}{4\pi^2 T^2} h(v),$$

где крайне громоздкое выражение для функции $h(v)$ вычисляется с помощью компьютерной алгебры.

Следующий шаг состоит в подстановке решения $g_{\mu\nu} + \epsilon r^2 h_{\mu\nu}^{(1)} + \epsilon^2 r^2 h_{\mu\nu}^{(2)}$ в голографическое выражение для тензора энергии-импульса [40]

$$T_{\mu\nu} = \frac{r^2}{\kappa_5^2} [K_{\mu\nu} - K \gamma_{\mu\nu} + \lambda_{\text{GB}} (3J_{\mu\nu} - J \gamma_{\mu\nu}) + c_1 \gamma_{\mu\nu} + c_2 G_{\mu\nu}^{(\gamma)}].$$

В этом выражении n^μ – вектор нормали к границе, $\gamma_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - n_\mu n_\nu$ – индуцированная метрика на границе, $G_{\mu\nu}^{(\gamma)} = R_{\mu\nu}^{(\gamma)} - R^{(\gamma)} \gamma_{\mu\nu}/2$ – соответствующий тензор Эйнштейна. Тензоры $K_{\mu\nu}$ и $J_{\mu\nu}$ определены следующим образом:

$$K_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} (\nabla_\mu n_\nu + \nabla_\nu n_\mu),$$

$$J_{\mu\nu} = \frac{1}{3} (2K K_{\mu\rho} K^\rho_\nu + K_{\rho\sigma} K^{\rho\sigma} K_{\mu\nu} - 2K_{\mu\rho} K^{\rho\sigma} K_{\sigma\nu} - K^2 K_{\mu\nu}),$$

при этом K и J – следы этих двух тензоров. Коэффициенты при контрчленах равны

$$c_1 = -\frac{\sqrt{2}(2 + \sqrt{1 - 4\lambda_{\text{GB}}})}{\sqrt{1 + \sqrt{1 - 4\lambda_{\text{GB}}}}}, \quad c_2 = \sqrt{\frac{\lambda_{\text{GB}}}{2}} \frac{3 - 4\lambda_{\text{GB}} - 3\sqrt{1 - 4\lambda_{\text{GB}}}}{(1 - \sqrt{1 - 4\lambda_{\text{GB}}})^{3/2}}.$$

Определив таким образом компоненты тензора энергии-импульса T^{xy} , мы находим функцию $G_{RAA}^{xy, xz, yz}$ дифференцированием по $h_{xz}^{(b)}$ и $h_{yz}^{(b)}$. Точно так же вычисляются и остальные трехточечные функции. Некоторые отличия для флуктуаций h_{tx} и h_{ty} состоят в том, что, поскольку эти возмущения метрики статичны, граничное условие на горизонте для них является условием Дирихле, $h_{tx} = h_{ty} = 0$, и это обеспечивает регулярность полной метрики.

Вычислив трехточечные функции, с помощью формул Кубо (24) получаем выражения для давления, сдвиговой вязкости, коэффициента τ_{Π} и коэффициента κ , совпадающие соответственно с формулами (21), (22), (4) и (5), а также новые результаты для коэффициентов второго порядка λ_1 , λ_2 , λ_3 :

$$\lambda_1 = \frac{\eta}{2\pi T} \left(\frac{(1+\gamma)(3-4\gamma+2\gamma^3)}{2\gamma^2} \right), \quad (26)$$

$$\lambda_2 = -\frac{\eta}{\pi T} \left(-\frac{1}{4}(1+\gamma)(1+\gamma-\frac{2}{\gamma}) + \frac{1}{2} \ln \frac{2(1+\gamma)}{\gamma} \right), \quad (27)$$

$$\lambda_3 = -\frac{\eta}{\pi T} \frac{(1+\gamma)(3+\gamma-4\gamma^2)}{\gamma^2}. \quad (28)$$

В пределе $\lambda_{\text{GB}} \rightarrow 0$ (при $\gamma \rightarrow 1$) эти формулы переходят в выражения

$$\eta\tau_{\Pi} = \frac{\eta(2-\ln 2)}{2\pi T}, \quad \lambda_1 = \frac{\eta}{2\pi T}, \quad \lambda_2 = -\frac{\eta \ln 2}{\pi T}, \quad \lambda_3 = 0, \quad \kappa = \frac{\eta}{\pi T},$$

полученные в работах [3], [15]. Формулы (26)–(28) представляют собой главный технический результат настоящей статьи.

4. ПРЕДЕЛ НУЛЕВОЙ ВЯЗКОСТИ

Предел нулевой вязкости $\lambda_{\text{GB}} \rightarrow 1/4$ (т.е. $\gamma \rightarrow 0$) немедленно следует из формул (22), (4), (5), (26)–(28):

$$\eta\tau_{\Pi} = 0, \quad \lambda_1 = \frac{3\pi^2 T^2}{2\sqrt{2}\kappa_5^2}, \quad \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = -\frac{3\sqrt{2}\pi^2 T^2}{\kappa_5^2}, \quad \kappa = -\frac{\pi^2 T^2}{\sqrt{2}\kappa_5^2}.$$

Три из пяти коэффициентов второго порядка нетривиальны в пределе нулевой вязкости, однако соотношения (7) не выполняются. Это означает, что голографическая жидкость Гаусса–Бонне не является недиссипативной, т.е. производство энтропии в ней не равно нулю даже в пределе исчезающе малой вязкости.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы показали (вычислив предварительно транспортные коэффициенты второго порядка), что голографическая жидкость Гаусса–Бонне не является недиссипативной жидкостью в пределе нулевой вязкости. Этот отрицательный результат не означает, конечно, что классификация гипотетических недиссипативных жидкостей, предложенная в работе [30], ошибочна, он лишь исключает из рассмотрения единственный известный, пусть даже сугубо академический, пример, в котором предел нулевой вязкости может быть проанализирован на уровне микроскопической (дуальной) теории. Вопросы гидродинамики жидкости с малым отношением вязкости к энтропии интересны в связи с поведением кварк-глюонной плазмы и ультрахолодных атомов в неравновесном режиме. В частности, представляют интерес коллективные возбуждения в таких жидкостях и вклад транспортных коэффициентов высших порядков в дисперсионные соотношения этих возбуждений. Голографическая жидкость Гаусса–Бонне продолжает служить полезной теоретической лабораторией для исследования этих вопросов.

Благодарности. Публикация нашей статьи в специальном выпуске, посвященном 75-летию юбилею Андрея Алексеевича Славнова, является для нас большой честью. Андрей Алексеевич, для одного из авторов в особенности, более четверти века был и остается эталоном хранителя научных, интеллектуальных и духовных традиций России, а его исследовательская, преподавательская и общественная деятельность неизменно вызывает чувство восхищения и глубокой признательности.

Авторы признательны А. Бучелю, Н. Каплису, П. Ковтуну, Р. Майерсу, М. Рангамани и Д. Т. Шону за обсуждение вопросов, имеющих отношение к предмету статьи. Данная работа выполнена при частичной финансовой поддержке European Research Council (ERC Grant agreement 307955).

Список литературы

- [1] J. Casalderrey-Solana, H. Liu, D. Mateos, K. Rajagopal, U. A. Wiedemann, *Gauge/string duality, hot QCD and heavy ion collisions*, [arXiv: 1101.0618](#).
- [2] D. T. Son, A. O. Starinets, *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.*, **57**:1 (2007), 95–118, [arXiv: 0704.0240](#).
- [3] R. Baier, P. Romatschke, D. T. Son, A. O. Starinets, M. A. Stephanov, *JHEP*, **04** (2008), 100, 31 pp., [arXiv: 0712.2451](#).
- [4] M. Rangamani, *Class. Quantum Grav.*, **26**:22 (2009), 224003, 48 pp., [arXiv: 0905.4352](#).
- [5] P. Kovtun, D. T. Son, A. O. Starinets, *Phys. Rev. Lett.*, **94**:11 (2005), 111601, 8 pp., [arXiv: hep-th/0405231](#).
- [6] A. Buchel, *Phys. Lett. B*, **609**:3–4 (2005), 392–401, [arXiv: hep-th/0408095](#).
- [7] P. Kovtun, D. T. Son, A. O. Starinets, *JHEP*, **10** (2003), 064, 27 pp., [arXiv: hep-th/0309213](#).
- [8] A. Buchel, J. T. Liu, *Phys. Rev. Lett.*, **93**:9 (2004), 090602, 14 pp., [arXiv: hep-th/0311175](#).
- [9] A. O. Starinets, *Phys. Lett. B*, **670**:3–4 (2009), 442–445, [arXiv: 0806.3797](#).
- [10] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Курс теоретической физики*, т. 6: *Гидродинамика*, Наука, М., 1986.
- [11] P. Romatschke, *Internat. J. Modern Phys. E*, **19**:1 (2010), 1–53, [arXiv: 0902.3663](#).
- [12] G. Policastro, D. T. Son, A. O. Starinets, *Phys. Rev. Lett.*, **87**:8 (2001), 081601, 4 pp., [arXiv: hep-th/0104066](#).
- [13] A. Buchel, J. T. Liu, A. O. Starinets, *Nucl. Phys. B*, **707**:1–2 (2005), 56–68, [arXiv: hep-th/0406264](#).
- [14] A. Buchel, *Nucl. Phys. B*, **803**:1–2 (2008), 166–170, [arXiv: 0805.2683](#).
- [15] S. Bhattacharyya, V. E. Hubeny, S. Minwalla, M. Rangamani, *JHEP*, **02** (2008), 045, 39 pp., [arXiv: 0712.2456](#).
- [16] P. Benincasa, A. Buchel, *JHEP*, **01** (2006), 103, 19 pp., [arXiv: hep-th/0510041](#).
- [17] A. Buchel, *Nucl. Phys. B*, **802**:3 (2008), 281–306, [arXiv: 0801.4421](#).
- [18] A. Buchel, M. Paulos, *Nucl. Phys. B*, **805**:1–2 (2008), 59–71, [arXiv: 0806.0788](#).
- [19] A. Buchel, M. Paulos, *Nucl. Phys. B*, **810**:1–2 (2009), 40–65, [arXiv: 0808.1601](#).
- [20] O. Saremi, K. A. Sohrabi, *JHEP*, **11** (2011), 147, 14 pp., [arXiv: 1105.4870](#).
- [21] S. Grozdanov, A. Starinets, *Second-order transport coefficients and dissipationless liquids* (to appear).
- [22] S. C. Huot, S. Jeon, G. D. Moore, *Phys. Rev. Lett.*, **98**:17 (2007), 172303, 4 pp., [arXiv: hep-ph/0608062](#).
- [23] Y. Kats, P. Petrov, *JHEP*, **01** (2009), 044, 15 pp., [arXiv: 0712.0743](#).

- [24] M. Brigante, H. Liu, R. C. Myers, S. Shenker, S. Yaida, *Phys. Rev. D*, **77**:12 (2008), 126006, 17 pp., arXiv: arXiv:0712.0805.
- [25] M. Brigante, H. Liu, R. C. Myers, S. Shenker, S. Yaida, *Phys. Rev. Lett.*, **100**:19 (2008), 191601, 5 pp., arXiv: 0802.3318.
- [26] A. Buchel, S. Cremonini, *JHEP*, **10** (2010), 026, 4 pp., arXiv: 1007.2963.
- [27] N. Banerjee, S. Dutta, *Holographic hydrodynamics: models and methods*, arXiv: 1112.5345.
- [28] A. Buchel, R. C. Myers, *JHEP*, **08** (2009), 016, 19 pp., arXiv: 0906.2922.
- [29] E. Shaverin, A. Yarom, *JHEP*, **04** (2013), 013, 10 pp., arXiv: 1211.1979.
- [30] J. Bhattacharya, S. Bhattacharyya, M. Rangamani, *JHEP*, **02** (2013), 153, 27 pp., arXiv: 1211.1020.
- [31] A. Buchel, J. Escobedo, R. C. Myers, M. F. Paulos, A. Sinha, M. Smolkin, *JHEP*, **03** (2010), 111, arXiv: 0911.4257.
- [32] D. T. Son, A. O. Starinets, *JHEP*, **09** (2002), 042, 24 pp., arXiv: hep-th/0205051.
- [33] G. Policastro, D. T. Son, A. O. Starinets, *JHEP*, **09** (2002), 043, 16 pp., arXiv: hep-th/0205052.
- [34] P. K. Kovtun, A. O. Starinets, *Phys. Rev. D*, **72**:8 (2005), 086009, 16 pp., arXiv: hep-th/0506184.
- [35] N. Iqbal, H. Liu, *Phys. Rev. D*, **79**:2 (2009), 025023, 15 pp., arXiv: 0809.3808.
- [36] G. D. Moore, K. A. Sohrahi, *Phys. Rev. Lett.*, **106**:12 (2011), 122302, 4 pp., arXiv: 1007.5333.
- [37] J. S. Schwinger, *J. Math. Phys.*, **2**:3 (1961), 407–432.
- [38] Л. В. Келдыш, *ЖЭТФ*, **47** (1964), 1515–1527.
- [39] E. Wang, U. W. Heinz, *Phys. Rev. D*, **66**:2 (2002), 025008, 17 pp., arXiv: hep-th/9809016.
- [40] V. Balasubramanian, P. Kraus, *Commun. Math. Phys.*, **208**:2 (1999), 413–428, arXiv: hep-th/9902121.

Поступила в редакцию 16.08.2014