Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Э. Адлер, А. Б. Шабат, Первые интегралы обобщенных цепочек Тоды, *ТМФ*, 1998, том 115, номер 3, 349–357

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf878>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.135.184

26 апреля 2023 г., 16:21:23

© 1998 г.

В. Э. Адлер*, А. Б. Шабат†

ПЕРВЫЕ ИНТЕГРАЛЫ ОБОБЩЕННЫХ ЦЕПОЧЕК ТОДЫ

Построены представления нулевой кривизны для обобщенных цепочек Тоды. Показано, что вычисление первых интегралов сводится к перемножению матриц с линейной зависимостью по полям согласно заданной таблице умножения.

1. ВВЕДЕНИЕ

Обобщенные цепочки Тоды определяются как уравнения Эйлера для лагранжианов вида

$$L = \sum_n (c(q_{n,x}) - q_{n,x}a_n(q_{n+1} - q_n) - b_n(q_{n+1} - q_n))$$

и после введения обозначений $z_n = q_{n,x}$, $y_n = q_{n+1} - q_n$, $r = 1/c''$, $f_n = a'_n$, $g_n = b'_n$ записываются в виде бесконечномерной ($n \in \mathbb{Z}$) системы

$$\begin{aligned} y_{n,x} &= z_{n+1} - z_n, \\ z_{n,x} &= r(z_n)(z_{n+1}f_n(y_n) - z_{n-1}f_{n-1}(y_{n-1}) + g_n(y_n) - g_{n-1}(y_{n-1})). \end{aligned} \quad (1)$$

Классификация интегрируемых цепочек этого вида была выполнена в работах [1, 2]. Здесь мы рассматриваем чуть более общий случай с функциями f и g , зависящими от n .

В данной работе для цепочек (1) изучается задача построения в матрицах размера 2×2 представления нулевой кривизны

$$W_{n,x} = U_{n+1}W_n - W_nU_n. \quad (2)$$

Как известно, в случае периодического замыкания ($n \in \mathbb{Z}_N$) формула $J(\lambda) = \text{tr}(W_N \dots W_2W_1)$ определяет производящую функцию для первых интегралов. Как мы увидим, матрица W с точностью до скалярного множителя задается формулой

$$A + z_nB + (z_nf_n + g_n)C + \frac{1}{2}((r_1z_n + 2r_0)f_n - (2r_2z_n + r_1)g_n - \lambda - s_1z_n)I,$$

*Институт математики Уфимского научного центра РАН, Уфа, Россия. E-mail: adler@imat.ub.ru

†Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН, Москва, Россия. E-mail: shabat@itp.ac.ru

где I – единичная матрица, а A, B, C – некоторые бесследовые матрицы. Для вычисления $J(\lambda)$ достаточно знать таблицу умножения этих матриц, которая однозначно определяется параметрами r_i, s_i , входящими также в определение коэффициентов r, f, g цепочки (см. далее).

Напомним, что в работе [2] было показано, что цепочки (1) при $f \neq 0$ и $f = 0$ (но, вообще говоря, разных g) задают преобразования Бэклунда друг для друга. Это обстоятельство позволяет построить для такой пары цепочек согласованные представления нулевой кривизны с одними и теми же матрицами A, B, C . При этом в приведенной выше формуле для W следует только положить $f = 0$ и заменить g . Класс цепочек Тоды с $f = 0$ изучен достаточно хорошо, и основным результатом работы следует считать вывод первых интегралов для второго класса. Другой подход, использующий матрицы размера $N \times N$, рассматривался, например, в работе [3].

Первый шаг в решении поставленной задачи заключается в переходе от переменных q_n к обобщенным импульсам

$$u_n = z_n, \quad v_n = -\partial L / \partial q_n = z_n f_n + g_n, \quad (3)$$

в которых исследуемые цепочки становятся линейными по сдвигам:

$$\begin{aligned} u_{n,x} &= p_n(u_n, v_n)(u_{n+1} - u_n) + r(u_n)(v_n - v_{n-1}), \\ v_{n,x} &= s(v_n)(u_{n+1} - u_n) + p_n(u_n, v_n)(v_n - v_{n-1}). \end{aligned} \quad (4)$$

Оговоримся, что при осуществлении этой замены для цепочки (1) общего вида коэффициент $s(u, v)$ может зависеть также от u , и равенство $s_u = 0$ является необходимым условием интегрируемости. В новых обозначениях интегрируемые цепочки Тоды выделяются условиями

$$r(u) = r_2 u^2 + r_1 u + r_0, \quad s(v) = r_2 v^2 + s_1 v + s_0, \quad (5)$$

причем функции $p_n = 0$, если $f_n = 0$, и задаются формулой

$$p_n^2(u, v) - (\alpha_n + s_1 u + r_1 v + 2r_2 uv)p_n(u, v) + r(u)s(v) = 0, \quad (6)$$

где α_n – произвольные параметры при $f_n \neq 0$ (случай, когда $r = u, s = v$, рассматривался в работе [4]). При $p_n = 0$ и произвольных r, s цепочка (4) является гамильтоновой с гамильтонианом

$$H = \sum_n \int \left(\frac{u_n du_n}{r(u_n)} + \frac{v_n dv_n}{s(v_n)} \right)$$

и скобками Пуассона (приводятся только ненулевые)

$$\{u_n, v_n\} = r(u_n)s(v_n), \quad \{u_{n+1}, v_n\} = -r(u_{n+1})s(v_n).$$

При $p_n \neq 0$ гамильтонова структура выглядит более громоздко, и мы ее не приводим.

Следует отметить, что среди цепочек (4) имеются и другие интегрируемые цепочки, не связанные с цепочками Тоды указанной выше заменой. Например, в разделе 4 мы рассматриваем случай (ср. [5])

$$r = s = 0, \quad p_n(u, v) = \alpha_n + \beta u + \gamma v + \delta uv. \quad (7)$$

Гамильтониан и скобки Пуассона для цепочки (4) при $r = s = 0$ и произвольном p задаются формулами

$$H = \sum_n v_n(u_{n+1} - u_n), \quad \{u_n, v_n\} = p_n.$$

При построении представления (2) основное предположение заключается в том, что матрица W зависит только от u, v , а матрица U — только от u, v_{-1} (для краткости мы часто будем опускать индекс n). Подстановка в (2) дает

$$(p(u_1 - u) + r(v - v_{-1}))W_u + (s(u_1 - u) + p(v - v_{-1}))W_v = U(u_1, v)W - WU(u, v_{-1}), \quad (8)$$

откуда следует, что U линейна по каждой переменной, т.е.

$$U = A + uB + v_{-1}C + uv_{-1}D,$$

где A, B, C, D — постоянные матрицы. В разделах 2 и 3 мы рассматриваем случай $D = 0$ и показываем, что он в точности отвечает цепочкам (4) с коэффициентами вида (5), (6). Иначе говоря, по ходу дела воспроизводятся некоторые классификационные результаты об интегрируемых цепочках (см., например, [1, 6, 7]). Общий случай $D \neq 0$ оказывается довольно сложным, и мы ограничиваемся его анализом только для (7).

2. ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННЫХ

Легко видеть, что уравнение (8) сводится к системе

$$X(W) = (B + vD)W, \quad Y(W) = W(C + uD), \quad (9)$$

$$[W, A + uB + vC + uvD] = 0, \quad (10)$$

где $X = p\partial_u + s\partial_v$, $Y = r\partial_u + p\partial_v$. Решая ее, мы и находим вид функций p, r, s , а также правила перемножения матриц A, B, C, D .

В этом и следующем разделах будем считать, что $D = 0$, а матрицы A, B, C образуют базис в $\mathfrak{sl}_2$. Заметим, что в этом случае применение операторов X и Y к соотношению вида $MW = WN$ дает соответственно

$$(X(M) + [M, B])W = W X(N), \quad Y(M)W = W(Y(N) + [C, N]).$$

Применяя теперь эти операторы в обратном порядке и вычитая, получим

$$Z(M)W = W Z(N), \quad Z = [X, Y] = (pr_u - rp_u - pp_v)\partial_u + (pp_u + sp_v - ps_v)\partial_v.$$

В частности, из соотношения (10) следует, что $[W, Z(A + uB + vC)] = 0$, откуда

$$Z(A + uB + vC) = (pr_u - rp_u - pp_v)B + (pp_u + sp_v - ps_v)C = k(A + uB + vC).$$

Поскольку A, B, C предполагаются линейно независимыми, то $k = 0$, $Z = 0$.

Одно решение системы

$$X(p) = pp_u + sp_v = s_v p, \quad Y(p) = rp_u + pp_v = r_u p \quad (11)$$

очевидно: $p = 0$. Если же $p \neq 0$, то имеем $Z(p) = p^2(r_{uu} - s_{vv}) = 0$, откуда следует формула (5). После этого система (11) становится совместной, и можно убедиться, что ее общее решение задается формулой (6). Дальнейший анализ обоих случаев приведен в следующем разделе, а сейчас мы установим их связь с цепочками Тоды (1).

При $f = 0$, $p = 0$ замена (3) имеет вид

$$u_n = z_n, \quad v_n = g(y_n), \quad g' = s(g).$$

Ясно, что она осуществима при любых r и s и, следовательно, не имеет отношения к интегрируемости. Связь между цепочками (1) и (4) при $f \neq 0$ более специфична.

ТЕОРЕМА 1. *Цепочка (4) с коэффициентами (5), (6) и цепочка (1) с функциями $f \neq 0, g$, удовлетворяющими системе*

$$f' = s_1 f - r_1 f^2 + 2r_2 f g, \quad g' = s_0 + s_1 g + r_2 g^2 - r_0 f^2, \quad (12)$$

$$s_0 + s_1 g + r_2 g^2 - r_1 f g + r_0 f^2 = \alpha f, \quad (13)$$

связаны обратимой заменой

$$z = u, \quad f(y) = \frac{p(u, v)}{r(u)}. \quad (14)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применим D_x к равенству $p_n/r = f_n$, учитывая, что $D_x(y_n) = z_{n+1} - z_n = u_{n+1} - u_n$. Прямое вычисление приводит к первому из уравнений (12) и равенству $v_n = z_n f_n + g_n$, дифференцируя которое, получаем второе из уравнений (12), а исключая p_n и v_n из (6), находим соотношение (13). $\square$

Поскольку переменные u и v равноправны, то имеется аналогичная замене (14) замена

$$v_n = \tilde{z}_{n+1}, \quad \frac{p_n(u_n, v_n)}{s(v_n)} = \tilde{f}_n(\tilde{y}_n),$$

также приводящая к цепочке вида (1). Обобщенные преобразования Лежандра, введенные в работе [2], являются композицией этих двух замен.

Заметим, что формула (13) является следствием уравнений (12). Исключая с ее помощью функцию g , находим, что функция f удовлетворяет уравнению

$$f'^2 = (r_1^2 - 4r_2r_0)f^4 + (4\alpha r_2 - 2s_1r_1)f^3 + (s_1^2 - 4r_2s_0)f^2$$

и, следовательно, выражается через элементарные. В статье [2] приведен список цепочек (1), отвечающих различным решениям этого уравнения (без учета зависимости функций f и g от n посредством параметра α_n). Заметим, что пара (r, s) может быть приведена линейными заменами x, u, v к одной из следующих:

$$(u^2 - 1, v^2 - 1), \quad (u^2 - 1, v^2), \quad (u^2, v^2 - 1), \quad (u^2, v^2), \quad (u, v), \quad (u, 1), \quad (1, v).$$

Тем не менее некоторые формулы проще записывать в инвариантном относительно этих замен виде, пригодном для всего семейства. В частности, это относится к представлению нулевой кривизны и первым интегралам.

3. ВЫВОД ТАБЛИЦЫ УМНОЖЕНИЯ

Рассмотрим сначала решение $p = 0$. Дифференцируя (10) с учетом (9), получим соотношения

$$r[W, B] + W[C, A + uB] = 0, \quad s[W, C] + [B, A + vC]W = 0.$$

После еще одного дифференцирования удастся вынести W за скобки и получить коммутационные соотношения

$$[C, r'(A + uB) - 2rB - [C, A + uB]] = 0, \quad [B, s'(A + vC) - 2sC + [B, A + vC]] = 0. \quad (15)$$

Отсюда видно, что r и s — полиномы степени не выше 2, $r = r_2u^2 + r_1u + r_0$, $s = s_2v^2 + s_1v + s_0$. Приравнявая правые множители в коммутаторах (15) матрицам $(\kappa u + \lambda)C$ и $(\mu v + \nu)B$, соответственно, получаем

$$\begin{aligned} [B, C] &= -2r_2A + r_1B + \kappa C = -2s_2A + \mu B + s_1C, \\ [C, A] &= r_1A - 2r_0B - \lambda C, \quad [A, B] = s_1A - \nu B - 2s_0C, \end{aligned}$$

откуда $r_2 = s_2$, $\mu = r_1$, $\kappa = s_1$. Проверка тождества Якоби показывает, что оно выполняется, если $\nu = \lambda$ (это и есть спектральный параметр!). Окончательно получаем следующую таблицу умножения матриц:

$$\begin{aligned} [A, B] &= s_1A - \lambda B - 2s_0C, \\ [B, C] &= -2r_2A + r_1B + s_1C, \\ [C, A] &= r_1A - 2r_0B - \lambda C. \end{aligned} \quad (16)$$

Определитель из ее коэффициентов как функция от λ не равен нулю, следовательно, производная алгебра совпадает с исходной, т.е. мы действительно получили алгебру $\mathfrak{sl}_2$ (конкретное матричное представление нам не понадобится). Итак, матрицу U мы нашли.

Рассмотрим теперь решение (5), (6) системы (11). Несмотря на довольно громоздкий вид функции p выкладки в этом случае практически не усложняются. Применив с учетом (11) операторы X^2, Y^2 к (10), мы получим в точности те же соотношения (15), что и раньше. Таким образом, матрицы A, B, C , а следовательно, и матрица U не меняются.

Заметим, что коэффициент α в определении матриц A, B, C не входит, т.е. он может зависеть произвольным образом от n , как и указано в формуле (6).

Из соотношения (10) видим, что W следует искать в виде

$$W = \rho(u, v)(A + uB + vC + w(u, v)I), \quad (17)$$

но чтобы получить из (9) уравнения на ρ и w , нам необходимо знать разложения попарных произведений матриц A, B, C по базису из A, B, C, I . Эту информацию можно восстановить по структурной таблице, пользуясь тождествами

$$[M, [M, N]] = 2 \operatorname{tr}(M^2)N - 2 \operatorname{tr}(MN)M, \quad MN + NM = \operatorname{tr}(MN)I, \quad (18)$$

верными для любых $M, N \in \mathfrak{sl}_2$. После несложных вычислений получаем, что

$$\begin{aligned} A^2 &= \left(\frac{\lambda^2}{4} - r_0 s_0\right)I, & AB + BA &= \left(\frac{1}{2}\lambda s_1 - s_0 r_1\right)I, \\ B^2 &= \left(\frac{s_1^2}{4} - r_2 s_0\right)I, & BC + CB &= \left(\lambda r_2 - \frac{1}{2}s_1 r_1\right)I, \\ C^2 &= \left(\frac{r_1^2}{4} - r_2 r_0\right)I, & CA + AC &= \left(\frac{1}{2}\lambda r_1 - r_0 s_1\right)I. \end{aligned} \quad (19)$$

Теперь мы можем воспользоваться формулами (9). Нетрудно проверить, что при $p = 0$ они сводятся к уравнениям

$$2r\rho_u = -r'\rho, \quad 2s\rho_v = -s'\rho, \quad -2w = \lambda + s_1 u + r_1 v + 2r_2 uv,$$

из которых получаем

$$W_n = (r(u_n)s(v_n))^{-1/2} \left(A + u_n B + v_n C - \frac{1}{2}(\lambda + s_1 u_n + r_1 v_n + 2r_2 u_n v_n)I \right). \quad (20)$$

Аналогично в случае (6) приходим к уравнениям

$$2X(\rho) = -s'\rho, \quad 2Y(\rho) = -r'\rho, \quad 2w = 2p - \lambda - s_1 u - r_1 v - 2r_2 uv,$$

решая которые, находим

$$W_n = (p_n)^{-1/2} \left(A + u_n B + v_n C + \frac{1}{2} (2p_n - \lambda - s_1 u_n - r_1 v_n - 2r_2 u_n v_n) I \right). \quad (21)$$

Возвращаясь к переменным y, z , получаем следующую теорему. Заметим, что скалярные множители $p = rf, rs$ в формулах (20), (21) в дальнейшем не учитываются, т.к. можно показать, что их произведение само является первым интегралом, эквивалентным некоторой комбинации интегралов энергии и импульса.

ТЕОРЕМА 2. *Первые интегралы цепочек (1), (12) (для обоих случаев $f = 0$ и $f \neq 0$) определяются следом произведения матриц*

$$\widetilde{W}_n = A + z_n B + (z_n f_n + g_n) C + \frac{1}{2} ((r_1 z_n + 2r_0) f_n - (2r_2 z_n + r_1) g_n - \lambda - s_1 z_n) I,$$

где таблица умножения постоянных матриц A, B, C задается только коэффициентами квадратичных полиномов r, s по формулам (16), (19).

В качестве примера рассмотрим случай $r(u) = 1, s(v) = v$, отвечающий цепочкам

$$z_{n,x} = e^{y_n} - e^{y_{n-1}}, \quad z_{n,x} = (z_{n+1} + \alpha_n) e^{y_n} - (z_{n-1} + \alpha_{n-1}) e^{y_{n-1}} - e^{2y_n} + e^{2y_{n-1}}.$$

Таблица умножения в данном случае принимает вид

$$\begin{aligned} [A, B] &= A - \lambda B, & [B, C] &= C, & [C, A] &= -2B - \lambda C, \\ 4A^2 &= \lambda^2 I, & 4B^2 &= I, & C^2 &= 0, \\ AB + BA &= \frac{\lambda}{2} I, & BC + CB &= 0, & CA + AC &= -I. \end{aligned}$$

Вычисляя несколько первых коэффициентов в формальном разложении

$$\frac{d}{d\lambda} \log J(\lambda)$$

по λ , мы получаем выражения

$$\sum_n (z_n - f_n), \quad \sum_n (z_n^2 + f_n^2 + 2g_n), \quad \sum_n (z_n^3 - f_n^3 + 3z_n z_{n+1} f_n + 3(z_n + z_{n+1} - f_n) g_n),$$

причем, чтобы получить первые интегралы, для первой цепочки следует положить $f_n = 0, g_n = e^{y_n}$, а для второй — $f_n = e^{y_n}, g_n = \alpha_n f_n - f_n^2$. Напомним, что замена

$$J(\lambda) \rightarrow \frac{d}{d\lambda} \log J(\lambda)$$

является преобразованием Ньютона, сводящим элементарные симметрические полиномы к суммам степеней.

4. СЛУЧАЙ $D \neq 0$

Общий случай оказывается довольно сложным, и нам удалось найти только один содержательный пример. Рассмотрим цепочки (4) с $r = s = 0$. Вычисляя перекрестные производные и дифференцируя (10) с учетом (9), получаем уравнения

$$\begin{aligned}(p_v B + (vp_v - p)D)W &= W(p_u C + (up_u - p)D), \\ p[B + vD, W] + [A + vC, B + vD]W &= 0, \\ p[C + uD, W] + W[A + uB, C + uD] &= 0.\end{aligned}\tag{22}$$

После повторного дифференцирования двух последних формул матрица W выносится за скобки, и мы получаем равенства

$$\begin{aligned}[B + vD, [A + vC, B + vD] - p_u(A + vC)] &= 0, \\ [C + uD, [A + uB, C + uD] + p_v(A + uB)] &= 0,\end{aligned}\tag{23}$$

из которых следует, что $p_{uu} = p_{vv} = 0$, т.е. p задается формулой (7). Расщепляя выписанные формулы по u и v , а также дифференцируя (22), можно получить коммутационные соотношения

$$\begin{aligned}[D, B] &= \delta B - \beta D, & [C, D] &= \delta C - \gamma D, \\ [A, B] &= \beta A + \lambda B, & [A, D] + [C, B] &= \delta A - \gamma B + \beta C + \lambda D, \\ [A, C] &= \mu C - \gamma A, & [A, D] - [C, B] &= -\delta A - \gamma B + \beta C + \mu D,\end{aligned}$$

где λ, μ – некоторые неизвестные параметры. Можно проверить, что тождество Якоби выполняется, если положить $\mu = -\lambda$. При этом из формул

$$[B, \delta A - \beta C - \lambda D] = [C, \delta A - \gamma C - \lambda D] = 0$$

вытекает линейная зависимость $\lambda D = \delta A - \gamma B - \beta C$. После исключения D коммутационная таблица сводится к формулам

$$[A, B] = \beta A + \lambda B, \quad [B, C] = -2\delta A + \gamma B + \beta C, \quad [C, A] = \gamma A + \lambda C.$$

Как и в предыдущем разделе, свободный член α в определении матриц не входит и может зависеть произвольным образом от n .

Итак, матрицу U мы нашли. Положим $W = \rho(u, v)(A + uB + vC + uvD + w(u, v))I$. Из формул (23) легко получить, что

$$\begin{aligned}2 \operatorname{tr}(B + vD)^2 &= (\beta + \delta v)^2, & 2 \operatorname{tr}(B + vD)(A + vC) &= -(\beta + \delta v)(\lambda - \gamma v), \\ 2 \operatorname{tr}(C + uD)^2 &= (\gamma + \delta u)^2, & 2 \operatorname{tr}(C + uD)(A + uB) &= -(\gamma + \delta u)(\lambda - \beta u),\end{aligned}$$

чего уже достаточно для вычисления произведений матриц в формулах (9). Легко убедиться, что эти формулы сводятся к уравнениям

$$2p\rho_u = -p_u\rho, \quad 2p\rho_v = -p_v\rho, \quad 2w = \lambda + \alpha + p$$

на функции ρ и w . Таким образом, матрица W имеет вид

$$W = p^{-1/2} \left(2 \left(1 + \frac{\delta}{\lambda} uv \right) A + 2u \left(1 - \frac{\gamma}{\lambda} v \right) B + 2v \left(1 - \frac{\beta}{\lambda} u \right) C + (\lambda + \alpha + p) I \right).$$

Заметим, что скобка Пуассона $\{u_n, v_n\} = p_n$ в данном примере ультралокальна и, как показывает прямое вычисление, может быть записана в “фундаментальном” виде

$$\{W_n(\lambda) \otimes W_m(\mu)\} = [R, W_n(\lambda) \otimes W_m(\mu)] \delta_{nm}.$$

С точностью до члена $I \otimes I$ r -матрица равна

$$R = \frac{1}{\lambda\mu(\lambda - \mu)} \left(\delta(\lambda + \mu) A \otimes A' - \gamma(\lambda A \otimes B' + \mu B \otimes A') - \right. \\ \left. - \beta(\lambda A \otimes C' + \mu C \otimes A') - \lambda\mu(B \otimes C' + C \otimes B') \right),$$

где $A = A(\lambda)$, $A' = A(\mu)$ и т.д.

Работа выполнена при поддержке грантов INTAS-93-166-Ext и РФФИ: № 96-01-00128, № 95-01-00755.

Список литературы

- [1] В. Э. Адлер, А. Б. Шабат. ТМФ. 1997. Т. 111. № 3. С. 323–334.
- [2] В. Э. Адлер, А. Б. Шабат. ТМФ. 1997. Т. 112. № 2. С. 179–194.
- [3] Yu. B. Suris. J. Phys. A. 1996. V. 29. P. 451–465.
- [4] В. Э. Адлер, И. Т. Хабибуллин. Функц. анализ и его прилож. 1997. Т. 31. № 2. С. 1–14.
- [5] V. E. Adler, R. I. Yamilov. J. Phys. A. 1994. V. 27. P. 477–492.
- [6] R. I. Yamilov. Classification of Toda type scalar lattices. In: Proc. Int. Workshop NEEDS'92. Singapore: World Scientific Publ., 1993. P. 423.
- [7] А. Б. Шабат, Р. И. Ямилов. Алгебра и анализ. 1990. Т. 2. № 2. С. 183–208.

Поступила в редакцию 26.II.1998 г.