Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. С. Сорин, Ю. Б. Черняков, Новый метод построения полуинвариантов и интегралов полной симметричной $\mathfrak{sl}_n$ решетки Тоды, *ТМФ*, 2015, том 183, номер 2, 222–253

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8780>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.90.164.192

26 апреля 2023 г., 17:42:10

© 2015 г.

А. С. Сорин^{*†}, Ю. Б. Черняков^{‡*}

НОВЫЙ МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ ПОЛУИНВАРИАНТОВ И ИНТЕГРАЛОВ ПОЛНОЙ СИММЕТРИЧНОЙ $\mathfrak{sl}_n$ РЕШЕТКИ ТОДЫ

Рассматривается полная симметричная форма представления матрицы оператора Лакса цепочки Тоды, которая известна как полная симметричная цепочка Тоды. Фазовое пространство этой системы – орбиты общего положения коприсоединенного действия борелевской подгруппы B_n^+ группы $SL_n(\mathbb{R})$. Эта система является интегрируемой. Предложен новый метод построения полуинвариантов и интегралов полной симметричной цепочки Тоды. При помощи только уравнений движения системы для собственных векторов матрицы Лакса доказано существование полуинвариантов, которые являются плюккеровыми координатами в соответствующих проективных пространствах. Эти полуинварианты использованы для построения интегралов. Наш новый подход приводит к простым точным формулам для полного набора независимых полуинвариантов и интегралов, выражающихся в матричных элементах матрицы Лакса, а также в матричных элементах матриц собственных векторов и собственных значений полной симметричной цепочки Тоды без использования процедуры чоппинга и процедуры Костанта. Описана структура дополнительных интегралов движения как функций на пространстве флагов по модулю действия потоков Тоды и показано, как плюккеровы координаты различных проективных пространств определяют различные семейства дополнительных интегралов.

Ключевые слова: интегрируемость по Лиувиллю, интегралы движения, полуинварианты, полная симметричная цепочка Тоды, пространство флагов, некоммутативная интегрируемость, представление Лакса.

DOI: 10.4213/tmf8780

^{*}Объединенный институт ядерных исследований, Дубна, Московская обл., Россия.
E-mail: sorin@theor.jinr.ru

[†]Национальный исследовательский ядерный университет “МИФИ” (Московский инженерно-физический институт), Москва, Россия

[‡]Институт теоретической и экспериментальной физики, Москва, Россия.
E-mail: chernyakov@itep.ru

1. ВВЕДЕНИЕ

Непериодическая решетка Тоды (цепочка Тоды) – это система из n взаимодействующих частиц на прямой, причем взаимодействуют между собой только соседние частицы. Гамильтониан системы имеет вид

$$H = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} p_i^2 + \sum_{i=1}^{n-1} e^{q_i - q_{i+1}}, \quad (1)$$

где p_i – импульс i -й частицы, а q_i – ее координата. Пуассонова структура на фазовом пространстве (p_i, q_i) имеет хорошо известный вид:

$$\{p_i, q_j\} = \delta_{ij}, \quad \{p_i, p_j\} = 0, \quad \{q_i, q_j\} = 0. \quad (2)$$

Эволюция системы дается стандартными гамильтоновыми уравнениями:

$$p'_i = \{H, q_i\}, \quad q'_i = -\{H, p_i\}.$$

Если применить анзац [1]

$$b_i = p_i, \quad a_i = e^{(q_i - q_{i+1})/2}, \quad (3)$$

гамильтониан примет следующую форму:

$$H = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} b_i^2 + \sum_{i=1}^{n-1} a_i^2. \quad (4)$$

Заметим, что имеется только $n - 1$ переменных a_i . Пуассонова структура (2) принимает вид

$$\{b_i, a_{i-1}\} = -a_{i-1}, \quad \{b_i, a_i\} = a_i. \quad (5)$$

Остальные скобки между a_i и b_i равны нулю. В этих координатах легко найти представление Лакса: можно показать, что гамильтоновы уравнения эквивалентны следующему матричному уравнению:

$$\dot{L} = [B, L], \quad (6)$$

где L есть оператор Лакса вида

$$L = \begin{pmatrix} b_1 & a_1 & 0 & 0 & b_1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & b_2 & a_2 & 0 & a_1 & b_2 & a_2 & \ddots & \vdots \\ 0 & a_2 & b_3 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a_{n-1} & 0 & a_{n-2} & b_{n-1} & a_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} & b_n & 0 & 0 & a_{n-1} & b_n \end{pmatrix} \quad (7)$$

и B есть оператор

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -a_1 & 0 & 0 & 0 & -a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & 0 & -a_2 & 0 & a_1 & 0 & -a_2 & \ddots & \vdots \\ 0 & a_2 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & -a_{n-1} & 0 & a_{n-2} & 0 & -a_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} & 0 & 0 & 0 & a_{n-1} & 0 \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Уравнение (6) является условием совместности системы

$$\begin{aligned} L\Psi &= \Psi\Lambda, \\ \frac{\partial}{\partial t}\Psi &= B\Psi, \end{aligned} \quad (9)$$

где Ψ – матрица собственных векторов оператора Лакса, Λ – матрица собственных значений оператора Лакса.

Эта система впервые была рассмотрена в работах [2], [3], и в работе [4] были найдены n функционально независимых интегралов движения. Инволютивность этих интегралов была доказана в работах [1], [5]. В частности, легко видеть, что след L есть функция Казимира системы, так что мы можем положить ее равной нулю, $\text{Tr } L = 0$.

Оказывается, что эта система гамильтонова: можно рассматривать ее как динамическую систему на орбите коприсоединенного действия борелевской подгруппы – подгруппы верхних треугольных матриц B_+ (подгруппы верхних треугольных матриц с детерминантом, равным единице) группы $SL_n(\mathbb{R})$ [6]–[9].

Фазовое пространство динамической системы можно реализовать двумя способами, отождествляя алгебру $\mathfrak{sl}_n$ с двойственной алгеброй с помощью формы Киллинга на $\mathfrak{sl}_n$, и, таким образом, обобщить решетку Тоды (тридиагональную цепочку Тоды).

При первом способе реализуются следующие разложение и идентификация:

$$\begin{aligned} \mathfrak{sl}_n &= \mathfrak{n}_n^- \oplus \mathfrak{b}_n^+, \\ \mathfrak{sl}_n^* &= (\mathfrak{b}_n^+)^* \oplus (\mathfrak{n}_n^-)^* \cong \mathfrak{b}_n^- \oplus \mathfrak{n}_n^+, \\ (\mathfrak{b}_n^+)^* &\cong (\mathfrak{n}_n^-)^\perp = \mathfrak{b}_n^-, \quad (\mathfrak{n}_n^-)^* \cong (\mathfrak{b}_n^+)^\perp = \mathfrak{n}_n^+, \end{aligned} \quad (10)$$

где $\mathfrak{b}_n^+$ и $\mathfrak{b}_n^-$ – верхнетреугольная и нижнетреугольная матрицы соответственно, а $\mathfrak{n}_n^+$ и $\mathfrak{n}_n^-$ – строго верхнетреугольная и строго нижнетреугольная матрицы соответственно. Теперь мы можем идентифицировать фазовое пространство решетки Тоды с орбитой коприсоединенного действия борелевской подгруппы B_n^+ в аффинном пространстве $\mathfrak{b}_n^- + \epsilon$ (где ϵ – сумма простых корней).

Мы можем использовать также следующий второй способ идентификации:

$$\begin{aligned} \mathfrak{sl}_n &= \mathfrak{so}_n \oplus \mathfrak{b}_n^+, \\ \mathfrak{sl}_n^* &= (\mathfrak{b}_n^+)^* \oplus (\mathfrak{so}_n)^* \cong \text{Symm}_n \oplus \mathfrak{n}_n^+, \\ (\mathfrak{b}_n^+)^* &\cong (\mathfrak{so}_n)^\perp = \text{Symm}_n, \quad (\mathfrak{so}_n)^* \cong (\mathfrak{b}_n^+)^\perp = \mathfrak{n}_n^+. \end{aligned} \quad (11)$$

Как видно, мы можем идентифицировать пространство симметрических матриц с двойственным пространством к алгебре Ли борелевской подгруппы: $\text{Symm}_n \cong (\mathfrak{b}_n^+)^*$, и, следовательно, мы можем ввести симплектическую структуру на Symm_n , перетянув ее с $(\mathfrak{b}_n^+)^*$.

Основываясь на этих двух подходах, мы получаем два возможных обобщения цепочки Тоды, которые приводят к двум интегрируемым системам, называемым *полная решетка Костанта–Тоды* и *полная симметричная решетка Тоды*.

Размерность фазового пространства этих систем больше $2n$, поэтому для интегрируемости требуется большее количество интегралов движения, чем в случае тридиагональной решетки Тоды. Впервые они были найдены для полной симметричной

системы Тоды в работе [10], где использовалась процедура чоппинга. Построения дополнительных интегралов и полуинвариантов изучались в работах [6], [10]–[12]. Заметим, что в недавней работе [13] получена общая формула для вычисления интегралов движения без использования процедуры чоппинга, что в дальнейшем используется для обобщения решетки Тоды на квантовый случай.

В работе [12] показано, что интегралы движения полной решетки Костанта–Тоды могут быть выражены через однородные координаты некоторых проективных пространств. Для этого рассматривались вложение в многообразие флагов и динамика на этом многообразии по действию однопараметрических подгрупп, индуцированных изоспектральными интегралами движения (см. приложение Б). Но для полной симметричной системы Тоды отображение из пространства симметрических матриц в многообразие флагов уже не является вложением.

Поэтому в настоящей работе мы вычисляем динамику матричных элементов и миноров матрицы собственных векторов матрицы оператора Лакса исходя непосредственно из уравнений движения.

Существование различных инволютивных семейств интегралов движения в полной решетке Костанта–Тоды впервые было обнаружено для случая $n = 4$ в работе [12], а в работах [14]–[16] было показано, что эта система интегрируема в некоммутативном смысле (см. [17]). Полный набор всех интегралов движения полной симметричной решетки Тоды – некоммутативное множество интегралов движения – состоит из изоспектральных интегралов движения, интегралов движения, полученных применением процедуры чоппинга, и дополнительных (к этим двум множествам) интегралов движения.

Целями нашей работы являются вычисление динамики полуинвариантов движения, нахождение точного выражения интегралов движения и описание их структуры.

В разделе 2 мы даем описание интегрируемости полной симметричной решетки Тоды и определяем процедуру чоппинга, следуя работе [10]. В разделах 3–5 изложены основные результаты работы. В разделе 6 кратко охарактеризованы результаты. В приложениях А, Б дано описание многообразия флагов, а также динамики на многообразии флагов.

Перечислим кратко основные результаты работы.

В разделе 3 вычислена динамика миноров M матрицы Ψ собственных векторов оператора Лакса, полученных пересечением первых верхних $k < n$ строк или первых нижних $l < n$ строк с любым набором k или l столбцов соответственно. Показано, что эти миноры (называемые “хорошими”) являются полуинвариантами по отношению к потокам полной симметричной системы Тоды, которые индуцированы изоспектральными интегралами движения:

$$\frac{\partial}{\partial t_{d-1}} M_{\frac{1,2,\dots,k}{i_1,i_2,\dots,i_k}} = \left(-\sum_{j=1}^k a_{jj}^{(d-1)} + \sum_{i_m=i_1}^{i_k} \lambda_{i_m}^{d-1} \right) M_{\frac{1,2,\dots,k}{i_1,i_2,\dots,i_k}},$$

$$\frac{\partial}{\partial t_{d-1}} \widetilde{M}_{\frac{n-l+1,\dots,n}{i_1,i_2,\dots,i_l}} = \left(\sum_{j=n-l}^n a_{jj}^{(d-1)} - \sum_{i_m=i_1}^{i_l} \lambda_{i_m}^{d-1} \right) \widetilde{M}_{\frac{n-l+1,\dots,n}{i_1,i_2,\dots,i_l}},$$

где через $a_{jj}^{(d-1)}$ обозначены матричные элементы матрицы $L^{d-1} = \underbrace{L \times L \times \cdots \times L}_{d-1}$.

Векторное поле $\partial/\partial t_{d-1}$ индуцировано изоспектральным инвариантом движения $(1/d) \operatorname{Tr} L^d$, $d = 2, n$.

Далее в разделах 4, 5 предложен метод вычисления интегралов движения. Этот метод основан на существовании полуинвариантов движения. Интегралы движения есть рациональные функции, имеющие следующий вид:

$$J_{k_1, k_2} = \frac{A_{\substack{n-m+1, \dots, n \\ 1, 2, \dots, m}}^{(k_1)}}{A_{\substack{n-m+1, \dots, n \\ 1, 2, \dots, m}}^{(k_2)}},$$

где $A^{(k_1)}$, $A^{(k_2)}$ – полуинварианты и миноры матриц L^{k_1} , L^{k_2} соответственно, $k_1 \neq k_2$, $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$. Эти формулы делают возможным вычисление дополнительных интегралов движения.

В разделе 5 описана структура всех дополнительных интегралов движения. Показано, что этими интегралами являются отношения двух полуинвариантов движения. Каждый из этих полуинвариантов состоит из суммы, члены которой составлены из произведений двух “хороших” миноров M матрицы Ψ с коэффициентами, являющимися полиномами собственных значений λ_i оператора Лакса. Также описана структура полного некоммутативного семейства интегралов движения полной симметричной решетки Тоды. Мы показываем, что число дополнительных интегралов (не входящих в множество, состоящее из интегралов, полученных с помощью процедуры чоппинга, и изоспектральных интегралов движения) равно количеству интегралов, полученных с использованием чоппинга. В случаях $n = 4$ и $n = 5$ интегралы, образующие два инволютивных семейства, явно описаны в терминах матричных элементов оператора Лакса.

Наконец, мы приводим формулу, определяющую размерность полного некоммутативного семейства интегралов движения полной симметричной решетки Тоды. Она совпадает с аналогичными формулами из работ [14]–[16], но наш подход к получению этой формулы основан на рассмотрении пространства флагов, которое описывается плюккеровым вложением, так что миноры M являются однородными координатами в соответствующих проективных пространствах.

2. ПРОЦЕДУРА ЧОППИНГА В СЛУЧАЕ ПОЛНОЙ СИММЕТРИЧНОЙ РЕШЕТКИ ТОДЫ

В этом разделе мы следуем работе [10]. Матрица оператора Лакса полной симметричной решетки Тоды, действительная симметричная матрица порядка n , имеет следующий вид:

$$L = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad (12)$$

Можно определить следующий набор характеристических полиномов:

$$P_k(L, \mu) = \det(L - \mu I)_k, \quad (13)$$

$$P_k(L, \mu) = \sum_{m=0}^{n-2k} E_{m,k}(L) \mu^{n-2k-m}, \quad 0 \leq k \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor,$$

где $(L - \mu I)_k$ – матрица порядка $n - k$, которая получается вычеркиванием k верхних строк и k правых столбцов из матрицы $(L - \mu I)$, $[\cdot]$ означает целую часть. Эта процедура была названа *процедурой чоппинга* в работе [10], где было показано, что функции

$$I_{m,k} = \frac{E_{m,k}(L)}{E_{0,k}(L)}, \quad 0 \leq k \leq \left\lfloor \frac{1}{2}(n-1) \right\rfloor, \quad 1 \leq m \leq n-2k, \quad (14)$$

определяют $[n^2/4]$ инволютивных интегралов движения для полной симметричной решетки Тоды на орбите общего положения размерности $2[n^2/4]$. Эти интегралы движения функционально независимы. Операторы Казимира имеют следующий вид:

$$I_{1,k} = \frac{E_{1,k}(L)}{E_{0,k}(L)}. \quad (15)$$

3. ДИНАМИКА МИНОРОВ МАТРИЦЫ СОБСТВЕННЫХ ВЕКТОРОВ Ψ

В этом разделе мы явно вычисляем динамику матричных элементов и миноров матрицы собственных векторов оператора Лакса полной симметричной системы Тоды. Результаты вычисления будут использованы для определения полуинвариантов движения, из которых будут построены в дальнейшем интегралы движения.

Как отмечалось в разделе 1, мотивировкой для явного вычисления динамики матричных элементов и миноров матрицы собственных векторов матрицы оператора Лакса обобщенной системы Тоды является тот факт, что отображение из пространства симметрических матриц в многообразие флагов уже не является вложением (см. приложение Б). Поэтому мы не можем вычислить динамику на пространстве флагов так же, как в случае полной решетки Костанта–Тоды.

Рассмотрим действие однопараметрической подгруппы, индуцированное изоспектральным интегралом движения $(1/2) \text{Tr } L^2$.

Уравнение движения для $(n \times n)$ -матрицы собственных векторов оператора Лакса, обобщающее второе уравнение системы (9), имеет следующий вид:

$$\Psi' = B\Psi, \quad (16)$$

где

$$B = L_{>0} - L_{<0} = (\psi \Lambda \psi^T)_{>0} - (\psi \Lambda \psi^T)_{<0} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & \ddots & \vdots \\ -a_{13} & -a_{23} & \ddots & \ddots & a_{n-2,n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & a_{n-1,n} \\ -a_{1n} & \cdots & a_{n-2,n} & -a_{n-1,n} & 0 \end{pmatrix}. \quad (17)$$

После преобразований получим

$$\begin{pmatrix} \psi_{11} & \psi_{12} & \cdots & \psi_{1n} \\ \psi_{21} & \psi_{22} & \cdots & \psi_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_{n1} & \psi_{n2} & \cdots & \psi_{nn} \end{pmatrix}' = \\
 = \begin{pmatrix} (-a_{11} + \lambda_1)\psi_{11} & (-a_{11} + \lambda_2)\psi_{12} & \cdots & (-a_{11} + \lambda_n)\psi_{1n} \\ (-a_{22} + \lambda_1)\psi_{21} - & (-a_{22} + \lambda_2)\psi_{22} - & \cdots & (-a_{22} + \lambda_n)\psi_{2n} - \\ -2a_{12}\psi_{11} & -2a_{12}\psi_{12} & & -2a_{12}\psi_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (-a_{n-1n-1} + \lambda_1)\psi_{n-11} - & (-a_{n-1n-1} + \lambda_2)\psi_{n-12} - & & (-a_{n-1n-1} + \lambda_n)\psi_{n-1n} - \\ -2(a_{1n-1}\psi_{11} + \cdots & -2(a_{1n-1}\psi_{12} + \cdots & \cdots & -2(a_{1n-1}\psi_{1n} + \cdots \\ \cdots + a_{n-2n-1}\psi_{n-21}) & \cdots + a_{n-2n-1}\psi_{n-22}) & & \cdots + 2a_{n-2n-1}\psi_{n-2n}) \\ (a_{nn} - \lambda_1)\psi_{n1} & (a_{nn} - \lambda_2)\psi_{n2} & \cdots & (a_{nn} - \lambda_n)\psi_{nn} \end{pmatrix} = \\
 = \begin{pmatrix} (-a_{11} + \lambda_1)\psi_{11} & (-a_{11} + \lambda_2)\psi_{12} & \cdots & (-a_{11} + \lambda_n)\psi_{1n} \\ (a_{22} - \lambda_1)\psi_{21} + & (a_{22} - \lambda_2)\psi_{22} + & & (a_{22} - \lambda_n)\psi_{2n} + \\ +2(a_{23}\psi_{31} + \cdots & +2(a_{23}\psi_{32} + \cdots & \cdots & +2(a_{23}\psi_{3n} + \cdots \\ \cdots + a_{2n}\psi_{n1}) & \cdots + a_{2n}\psi_{n2}) & & \cdots + a_{2n}\psi_{nn}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (a_{n-1n-1} - \lambda_1)\psi_{n-11} + & (a_{n-1n-1} - \lambda_2)\psi_{n-12} + & \cdots & (a_{n-1n-1} - \lambda_n)\psi_{n-1n} + \\ +2a_{n-1n}\psi_{n1} & +2a_{n-1n}\psi_{n2} & & +2a_{n-1n}\psi_{nn} \\ (a_{nn} - \lambda_1)\psi_{n1} & (a_{nn} - \lambda_2)\psi_{n2} & \cdots & (a_{nn} - \lambda_n)\psi_{nn} \end{pmatrix}. \quad (18)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Миноры, полученные пересечением первых верхних $k < n$ строк или первых нижних $l < n$ строк с любым набором k или l столбцов соответственно, являются полуинвариантами по отношению к действию однопараметрической подгруппы, индуцированной изоспектральным интегралом движения $(1/2) \text{Tr } L^2$. Уравнения движения этих миноров $(M, \bar{M})$ имеют следующий вид*

$$\begin{aligned} M'_{\frac{1,2,\dots,k}{i_1,i_2,\dots,i_k}} &= \left(-\sum_{j=1}^k a_{jj} + \sum_{i_m=i_1}^{i_k} \lambda_{i_m} \right) M_{\frac{1,2,\dots,k}{i_1,i_2,\dots,i_k}}, \\ \widetilde{M}'_{\frac{n-l+1,\dots,n}{i_1,i_2,\dots,i_l}} &= \left(\sum_{j=n-l+1}^n a_{jj} - \sum_{i_m=i_1}^{i_l} \lambda_{i_m} \right) \widetilde{M}_{\frac{n-l+1,\dots,n}{i_1,i_2,\dots,i_l}}, \end{aligned} \quad (19)$$

где в мультииндексах $\frac{a}{b}$ мультииндекс “ a ” соответствует строкам, а мультииндекс “ b ” – столбцам.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем это предложение по индукции. Выберем некоторое n . Рассмотрим минор, полученный пересечением первых k строк и некоторых k

столбцов. Для $k = 1$ формула (19) очевидна. Выберем теперь некоторое k в предположении, что для $k - 1$ формула (19) выполняется. Разложим минор порядка k по нижней k -й строке:

$$M_{\frac{1,2,\dots,k}{i_1,i_2,\dots,i_k}} = \sum_{j=1}^k (-1)^{k+j} \psi_{ki_j} M_{\frac{1,2,\dots,k-1}{i_1,\dots,i_{\hat{j}},\dots,i_k}}. \quad (20)$$

После дифференцирования получим уравнение движения для этого минора:

$$M'_{\frac{1,2,\dots,k}{i_1,i_2,\dots,i_k}} = \sum_{j=1}^k (-1)^{k+j} \left(\psi'_{ki_j} M_{\frac{1,2,\dots,k-1}{i_1,\dots,i_{\hat{j}},\dots,i_k}} + \psi_{ki_j} M'_{\frac{1,2,\dots,k-1}{i_1,\dots,i_{\hat{j}},\dots,i_k}} \right), \quad (21)$$

где

$$M'_{\frac{1,2,\dots,k-1}{i_1,\dots,i_{\hat{j}},\dots,i_k}} = \left(- \sum_{j=1}^{k-1} a_{jj} + \sum_{\substack{m=1, \\ m \neq j}}^k \lambda_{i_m} \right) M_{\frac{1,2,\dots,k-1}{i_1,\dots,i_{\hat{j}},\dots,i_k}}, \quad (22)$$

$$\psi'_{ki_j} = (-a_{kk} + \lambda_{i_j}) \psi_{ki_j} - 2(a_{1k} \psi_{1i_j} + \dots + a_{k-1k} \psi_{k-1i_j}).$$

Окончательно получим

$$\begin{aligned} M'_{\frac{1,2,\dots,k}{i_1,i_2,\dots,i_k}} &= \sum_{j=1}^k (-1)^{k+j} \left(- \sum_{j=1}^k a_{jj} + \sum_{m=1}^k \lambda_{i_m} \right) \psi_{ki_j} M_{\frac{1,2,\dots,k-1}{i_1,\dots,i_{\hat{j}},\dots,i_k}} - \\ &- \sum_{j=1}^k (-1)^{k+j} 2(a_{1k} \psi_{1i_j} + \dots + a_{k-1k} \psi_{k-1i_j}) M_{\frac{1,2,\dots,k-1}{i_1,\dots,i_{\hat{j}},\dots,i_k}}. \end{aligned} \quad (23)$$

Рассмотрим второй член

$$- \sum_{j=1}^k (-1)^{k+j} 2(a_{1k} \psi_{1i_j} + \dots + a_{k-1k} \psi_{k-1i_j}) M_{\frac{1,2,\dots,k-1}{i_1,\dots,i_{\hat{j}},\dots,i_k}}. \quad (24)$$

Коэффициент при каждом члене $-2a_{lk}$, $l = \overline{1, k-1}$, имеет следующий вид:

$$\sum_{j=1}^k (-1)^{k+j} \psi_{li_j} M_{\frac{1,2,\dots,k-1}{i_1,\dots,i_{\hat{j}},\dots,i_k}}. \quad (25)$$

Это минор порядка k , полученный из матрицы с одинаковыми последней и l -й строками. Следовательно, он равен нулю. И мы имеем из (23)

$$\begin{aligned} M'_{\frac{1,2,\dots,k}{i_1,i_2,\dots,i_k}} &= \sum_{j=1}^k (-1)^{k+j} \left(- \sum_{j=1}^k a_{jj} + \sum_{m=1}^k \lambda_{i_m} \right) \psi_{ki_j} M_{\frac{1,2,\dots,k-1}{i_1,\dots,i_{\hat{j}},\dots,i_k}} = \\ &= \left(- \sum_{j=1}^k a_{jj} + \sum_{m=1}^k \lambda_{i_m} \right) M_{\frac{1,\dots,k}{i_1,\dots,i_k}}, \end{aligned} \quad (26)$$

т. е. первую из формул (19). Вторую формулу доказываем аналогично (рассматривая нижние строки вместо верхних). ■

В общем случае для изоспектрального интеграла движения $(1/d) \text{Tr } L^d$, $d = \overline{2, n}$, имеем

$$\Psi' = B_d \Psi, \quad (27)$$

где

$$B_d = (L^{d-1})_{>0} - (L^{d-1})_{<0} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & a_{12}^{(d-1)} & a_{13}^{(d-1)} & \cdots & a_{1n}^{(d-1)} \\ a_{12}^{(d-1)} & 0 & a_{32}^{(d-1)} & \ddots & \vdots \\ a_{13}^{(d-1)} & a_{23}^{(d-1)} & 0 & \ddots & a_{n-2,n}^{(d-1)} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a_{13}^{(d-1)} \\ a_{1n}^{(d-1)} & \cdots & a_{n-2,n}^{(d-1)} & a_{n-1,n}^{(d-1)} & 0 \end{pmatrix}, \quad (28)$$

а через $a_{ij}^{(d-1)}$ обозначены матричные элементы матрицы L^{d-1} , образованной $(d-1)$ -кратным произведением оператора Лакса L . Уравнение (27) можно привести к виду, аналогичному (18), где вместо a_{ij} будут $a_{ij}^{(d-1)}$, а вместо $\lambda_j - \lambda_j^{d-1}$:

$$\psi'_{ij} = (-a_{ii}^{(d-1)} + \lambda_j^{d-1})\psi_{ij} - 2 \sum_{k=1}^i a_{k-1,i}^{(d-1)} \psi_{k-1,j}, \quad (29)$$

$$\psi'_{ij} = (a_{ii}^{(d-1)} - \lambda_j^{d-1})\psi_{ij} + 2 \sum_{k=i}^n a_{i,k+1}^{(d-1)} \psi_{k+1,j}.$$

Тогда в общем случае будет верно следующее предложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Миноры, полученные пересечением первых верхних $k < n$ строк или первых нижних $l < n$ строк с любым набором k или l столбцов соответственно, являются полуинвариантами по отношению к действию однопараметрической подгруппы, индуцированной изоспектральным интегралом движения $(1/d) \text{Tr } L^d$, $d \in \mathbb{N}$. Уравнения движения этих миноров $(M, \widetilde{M})$ имеют следующий вид:*

$$\frac{\partial}{\partial t_{d-1}} M_{\substack{1,2,\dots,k \\ i_1,i_2,\dots,i_k}} = \left(- \sum_{j=1}^k a_{jj}^{(d-1)} + \sum_{i_m=i_1}^{i_k} \lambda_{i_m}^{d-1} \right) M_{\substack{1,2,\dots,k \\ i_1,i_2,\dots,i_k}}, \quad (30)$$

$$\frac{\partial}{\partial t_{d-1}} \widetilde{M}_{\substack{n-l+1,\dots,n \\ i_1,i_2,\dots,i_l}} = \left(\sum_{j=n-l}^n a_{jj}^{(d-1)} - \sum_{i_m=i_1}^{i_l} \lambda_{i_m}^{d-1} \right) \widetilde{M}_{\substack{n-l+1,\dots,n \\ i_1,i_2,\dots,i_l}}.$$

Доказательство этого предложения аналогично доказательству предложения 1.

4. ИНВОЛЮТИВНЫЕ СЕМЕЙСТВА ИНТЕГРАЛОВ ДВИЖЕНИЯ В СЛУЧАЕ $n = 4$

В этом разделе на примере случая $n = 4$ мы определяем метод получения дополнительных интегралов движения, не использующий процедуру чоппинга. С помощью этого метода мы находим в явном виде все дополнительные интегралы движения в переменных a_{ij} и в переменных λ, ψ , а также описываем два инволютивных семейства интегралов движения.

В работах [12], [18], [19] было обнаружено, что в случае $n = 4$ в полной решетке Костанта–Тоды существуют два инволютивных семейства интегралов движения. Мы покажем, что то же самое справедливо и для полной симметричной решетки Тоды. Дадим краткое описание инволютивных семейств. Рассмотрим матрицу оператора Лакса в случае $n = 4$:

$$L = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{pmatrix}. \quad (31)$$

Матричные элементы можно выразить через переменные λ, ψ :

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^4 \lambda_k \psi_{ik} \psi_{jk}. \quad (32)$$

Используя процедуру чоппинга [10], получим следующие характеристические многочлены:

$$P_k(L, \mu) = \sum_{m=0}^{4-2k} E_{m,k}(L) \mu^{4-2k-m}, \quad 0 \leq k \leq 2, \quad (33)$$

$$P_0(L, \mu) = \det(L - \mu I), \quad P_1(L, \mu) = \det(L - \mu I)_1, \quad (34)$$

$$P_0(L, \mu) = \mu^4 - \mu^3 \operatorname{Tr} L + \mu^2 \left(\frac{1}{2} (\operatorname{Tr} L)^2 - \frac{1}{2} \operatorname{Tr} L^2 \right) - \mu \left(\frac{1}{3} (\operatorname{Tr} L)^3 - \frac{1}{3} \operatorname{Tr} L^3 \right) + \det L, \quad (35)$$

$$P_1(L, \mu) = \mu^2 a_{14} + \mu \left(A_{\frac{34}{13}} + A_{\frac{24}{12}} \right) + A_{\frac{234}{123}},$$

$$E_{0,1} = a_{14}, \quad E_{1,1} = A_{\frac{34}{13}} + A_{\frac{24}{12}}, \quad E_{2,1} = A_{\frac{234}{123}}.$$

Интегралы движения будут иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} & \operatorname{Tr} L, \quad \frac{1}{2} \operatorname{Tr} L^2, \quad \frac{1}{3} \operatorname{Tr} L^3, \quad \det L, \\ I_{1,1} = \frac{E_{1,1}}{E_{0,1}} = \frac{A_{\frac{34}{13}} + A_{\frac{24}{12}}}{a_{14}}, \quad I_{2,1} = \frac{E_{2,1}}{E_{0,1}} = \frac{A_{\frac{234}{123}}}{a_{14}}, \end{aligned} \quad (36)$$

где $\operatorname{Tr} L$, $I_{1,1}$ – операторы Казимира, а остальные функции – гамильтонианы. Эти интегралы движения образуют первое инволютивное семейство. Второе инволютивное семейство можно получить (следуя работе [18]), рассмотрев изоморфизм алгебр $\rho: sl(4, \mathbb{C}) \leftrightarrow so(6, \mathbb{C})$ и применив процедуру чоппинга к матрице оператора Лакса, полученной с помощью изоморфизма ρ (см. [18]). В результате помимо известных интегралов движения мы получим интеграл J . В переменных λ, ψ этот интеграл имеет вид

$$J = \frac{A_\lambda A'_\lambda M_{\frac{12}{12}} M_{\frac{12}{34}} - B_\lambda B'_\lambda M_{\frac{12}{13}} M_{\frac{12}{24}}}{A_\lambda M_{\frac{12}{12}} M_{\frac{12}{34}} - B_\lambda M_{\frac{12}{13}} M_{\frac{12}{24}}}, \quad (37)$$

где

$$\begin{aligned} A_\lambda &= (\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_4), & A'_\lambda &= (\lambda_1 + \lambda_3)(\lambda_2 + \lambda_4), \\ B_\lambda &= (\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_4), & B'_\lambda &= (\lambda_1 + \lambda_2)(\lambda_3 + \lambda_4). \end{aligned} \quad (38)$$

Второе инволютивное семейство образуют интегралы движения $\text{Tr } L$, $(1/2) \text{Tr } L^2$, $(1/3) \text{Tr } L^3$, $\det L$, $I_{1,1}$ и интеграл J , который не коммутирует с интегралом $I_{2,1}$.

Оказывается, что инволютивные семейства интегралов движения можно получить другим способом, не используя процедуру чоппинга и изоморфизм $\rho: sl(4, \mathbb{R}) \leftrightarrow so(6, \mathbb{R})$, тем более что при $n > 4$ изоморфизма нет, а есть только гомоморфизм $sl(n, \mathbb{R}) \rightarrow so(C_n^m, \mathbb{R})$.

Рассмотрим матрицу $L^k = \underbrace{L \times L \times \cdots \times L}_k$, $k \geq 2$, где L , как обычно, – матрица оператора Лакса L , $n = 4$. Будем обозначать матричные элементы матрицы L^k через $a_{ij}^{(k)}$. Сделаем следующее наблюдение. Рассмотрим матричный элемент a_{14} . Этот элемент является полуинвариантом. Также полуинвариантом является¹⁾ и элемент $a_{14}^{(k)}$. Действительно, рассмотрим выражение элемента a_{14} через переменные λ и ψ :

$$a_{14} = \lambda_1 \psi_{11} \psi_{41} + \lambda_2 \psi_{12} \psi_{42} + \lambda_3 \psi_{13} \psi_{43} + \lambda_4 \psi_{14} \psi_{44}.$$

Из этого выражения следует, что динамика a_{14} относительно действия однопараметрической подгруппы, индуцированной изоспектральным интегралом движения $(1/2) \text{Tr } L^2$ (см. (19)), имеет следующий вид:

$$a'_{14} = (a_{44} - a_{11})a_{14}. \quad (39)$$

Это и означает, что элемент a_{14} является полуинвариантом. Далее, заметим, что из

$$L\Psi = \Psi\Lambda,$$

следует

$$L^k\Psi = \Psi\Lambda^k,$$

где Ψ , Λ – матрицы собственных функций и собственных значений соответственно.

Тогда элемент $a_{14}^{(k)}$ имеет следующий вид:

$$a_{14}^{(k)} = \lambda_1^k \psi_{11} \psi_{41} + \lambda_2^k \psi_{12} \psi_{42} + \lambda_3^k \psi_{13} \psi_{43} + \lambda_4^k \psi_{14} \psi_{44}.$$

Его динамика тоже будет иметь вид (19):

$$(a_{14}^{(k)})' = (a_{44} - a_{11})a_{14}^{(k)}. \quad (40)$$

Очевидно, что отношение $a_{14}^{(k_1)}$ к $a_{14}^{(k_2)}$, где $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$, есть интеграл движения. Теперь зададимся вопросом: существуют ли еще миноры A матрицы оператора Лакса L , являющиеся полуинвариантами, т.е. имеющие вид преобразований, сходный с (40):

$$A' = f(a)A, \quad (41)$$

где $f(a)$ – некоторая функция от матричных элементов L ?

¹⁾ На это свойство элемента $a_{14}^{(k)}$ указывал Д. Талалаев. Доказательство основывалось на рассмотрении действия подгруппы b_+ на элемент a_{14} .

Оказывается, что такие миноры существуют. Рассмотрим минор A_{12}^{34} . Выражение этого элемента через переменные λ и ψ имеет следующий вид:

$$A_{12}^{34} = (\lambda_1\lambda_2 + \lambda_3\lambda_4)M_{34}^{12}M_{12}^{12} + (-\lambda_1\lambda_3 - \lambda_2\lambda_4)M_{13}^{12}M_{24}^{12} + (\lambda_1\lambda_4 + \lambda_2\lambda_3)M_{23}^{12}M_{14}^{12}. \quad (42)$$

Динамика миноров M_{ij}^{12} согласно формуле (19) имеет вид

$$M_{ij}^{'12} = (-a_{11} - a_{22} + \lambda_i + \lambda_j)M_{ij}^{12},$$

поэтому для A_{12}^{34} получаем

$$A_{12}^{'34} = (-2(a_{11} + a_{22}) + \text{Tr } L)A_{12}^{34}. \quad (43)$$

Для миноров A_{12}^k мы получаем

$$\begin{aligned} A_{12}^{(k)} &= (\lambda_1^k\lambda_2^k + \lambda_3^k\lambda_4^k)M_{34}^{12}M_{12}^{12} + (-\lambda_1^k\lambda_3^k - \lambda_2^k\lambda_4^k)M_{13}^{12}M_{24}^{12} + (\lambda_1^k\lambda_4^k + \lambda_2^k\lambda_3^k)M_{23}^{12}M_{14}^{12}, \\ (A_{12}^{(k)})' &= (-2(a_{11} + a_{22}) + \text{Tr } L)A_{12}^k. \end{aligned} \quad (44)$$

4.1. Интегралы движения. Используя изложенный выше подход, определим интегралы движения:

$$\begin{aligned} &\text{Tr } L, \quad \frac{1}{2} \text{Tr } L^2, \quad \frac{1}{3} \text{Tr } L^3, \quad \det L, \\ I_{1,1} &= \frac{a_{14}^{(2)}}{a_{14}} = \frac{\lambda_1^2\psi_{11}\psi_{41} + \lambda_2^2\psi_{12}\psi_{42} + \lambda_3^2\psi_{13}\psi_{43} + \lambda_4^2\psi_{14}\psi_{44}}{\lambda_1\psi_{11}\psi_{41} + \lambda_2\psi_{12}\psi_{42} + \lambda_3\psi_{13}\psi_{43} + \lambda_4\psi_{14}\psi_{44}}, \\ \tilde{I}_{2,1} &= -\frac{\lambda_1^{-1}\psi_{11}\psi_{41} + \lambda_2^{-1}\psi_{12}\psi_{42} + \lambda_3^{-1}\psi_{13}\psi_{43} + \lambda_4^{-1}\psi_{14}\psi_{44}}{\lambda_1\psi_{11}\psi_{41} + \lambda_2\psi_{12}\psi_{42} + \lambda_3\psi_{13}\psi_{43} + \lambda_4\psi_{14}\psi_{44}} = \frac{I_{2,1}}{\det L}. \end{aligned} \quad (45)$$

Вместо интеграла $\tilde{I}_{2,1}$ можно рассматривать интеграл

$$I = \frac{a_{14}^{(3)}}{a_{14}} = \frac{\lambda_1^3\psi_{11}\psi_{41} + \lambda_2^3\psi_{12}\psi_{42} + \lambda_3^3\psi_{13}\psi_{43} + \lambda_4^3\psi_{14}\psi_{44}}{\lambda_1\psi_{11}\psi_{41} + \lambda_2\psi_{12}\psi_{42} + \lambda_3\psi_{13}\psi_{43} + \lambda_4\psi_{14}\psi_{44}},$$

и еще один интеграл, не коммутирующий с $I_{2,1}$ и I :

$$\begin{aligned} J &= \frac{A_{12}^{(2)}}{A_{12}^{34}} = \\ &= -\frac{(\lambda_1^2\lambda_2^2 + \lambda_3^2\lambda_4^2)M_{34}^{12}M_{12}^{12} + (-\lambda_1^2\lambda_3^2 - \lambda_2^2\lambda_4^2)M_{13}^{12}M_{24}^{12} + (\lambda_1^2\lambda_4^2 + \lambda_2^2\lambda_3^2)M_{23}^{12}M_{14}^{12}}{(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_3\lambda_4)M_{34}^{12}M_{12}^{12} + (-\lambda_1\lambda_3 - \lambda_2\lambda_4)M_{13}^{12}M_{24}^{12} + (\lambda_1\lambda_4 + \lambda_2\lambda_3)M_{23}^{12}M_{14}^{12}}. \end{aligned}$$

Заметим, что, принимая во внимание соотношение Плюккера в случае $n = 4$ для $\text{Gr}_2(4)$

$$M_{34}^{12}M_{12}^{12} - M_{13}^{12}M_{24}^{12} + M_{23}^{12}M_{14}^{12} = 0, \quad (46)$$

можно получить интеграл J в виде (37).

Рис. 1

На рис. 1 схематично изображены количество интегралов и миноры, используемые для построения этих интегралов, а также характеристический полином в случае $n = 4$. Кривая внизу указывает на один характеристический полином $P_1(L, \mu)$, полученный чоппингом, который отвечает ненулевому вычеркиванию строк и столбцов. Кривая внизу соединяет лидирующий коэффициент a_{14} при μ^2 , на котором строится первое инволютивное семейство интегралов, и граничный элемент минора, полученного с использованием процедуры чоппинга. Матричные элементы a_{ij} крайнего левого столбца матрицы Лакса определяют миноры $A_{\substack{j, j+1, \dots, n \\ 1, 2, \dots, n-(j-1)}}$, $j \neq n$, и, соответственно, в случае $n = 4$ матричные элементы a_{1j} крайнего левого столбца определяют миноры $A_{\substack{j, j+1, \dots, 4 \\ 1, 2, \dots, 5-j}}$, $j \neq 4$; верхняя стрелочка слева, выходящая из матричного элемента a_{13} , указывает на один возможный дополнительный интеграл движения (цифра 1), построенный без использования процедуры чоппинга из миноров $A_{\substack{3, 4 \\ 1, 2}}^k$. Стрелочка, выходящая из минора a_{14} , указывает на цифру 2, т. е. на два возможных интеграла, построенных из миноров a_{14}^k .

5. СТРУКТУРА ИНТЕГРАЛОВ ДВИЖЕНИЯ. СЕМЕЙСТВА ИНТЕГРАЛОВ

В этом разделе мы обобщаем наш способ получения дополнительных интегралов движения и исследуем структуру семейств интегралов движения и структуру самих интегралов.

5.1. Общая структура полного некоммутативного семейства интегралов движения. Количество независимых неинволютивных интегралов без учета операторов Казимира [14], [15]

$$N_n = \frac{n(n-1)}{2} - \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor + 1 \quad (47)$$

состоит из трех разных вкладов

$$N_n \equiv N_n^{\text{Iso}} + N_n^{\text{Chop}} + N_n^{\text{Add}}, \quad (48)$$

которые обусловлены изоспектральными интегралами N_n^{Iso} , интегралами N_n^{Chop} , полученными процедурой чоппинга, за исключением операторов Казимира, и дополнительными интегралами N_n^{Add} , которые пополняют упомянутые выше два семейства до полного набора интегралов. Суммарное количество изоспектральных интегралов и интегралов, полученных процедурой чоппинга, которое обеспечивает интегрируемость по Лиувиллю, есть [10]

$$N_n^{\text{Iso}} + N_n^{\text{Chop}} = \left[\frac{n^2}{4} \right]. \quad (49)$$

Из равенств (47)–(49), очевидно, можно заключить, что

$$N_n^{\text{Add}} = N_n^{\text{Chop}} \equiv \left[\frac{(n-2)^2}{4} \right]. \quad (50)$$

5.2. Полуинварианты и интегралы. Исследуем структуру полуинвариантов движения и покажем, что она квадратично зависит от миноров матрицы собственных функций оператора Лакса, а также определим интегралы движения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Миноры матриц L^k вида $A_{\frac{n-m+1, \dots, n}{1, 2, \dots, m}}^{(k)}$, $n > m$, являются полуинвариантами по отношению к действию однопараметрических подгрупп, индуцированных изоспектральными интегралами движения. В переменных λ, ψ эти миноры имеют вид*

$$A_{\frac{n-m+1, \dots, n}{1, 2, \dots, m}}^{(k)} = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_m} \lambda_{i_1}^k \lambda_{i_2}^k \cdots \lambda_{i_m}^k M_{\frac{1, 2, \dots, m}{i_1, i_2, \dots, i_m}} M_{\frac{n-m+1, \dots, n}{i_1, i_2, \dots, i_m}}. \quad (51)$$

Интегралы движения, составленные из этих миноров, имеют вид

$$J_{k_1, k_2} = \frac{A_{\frac{n-m+1, \dots, n}{1, 2, \dots, m}}^{(k_1)}}{A_{\frac{n-m+1, \dots, n}{1, 2, \dots, m}}^{(k_2)}}. \quad (52)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала докажем, что в разложении минора матрицы L (левый нижний угловой минор размера $m \times m$) $A_{\frac{n-m+1, \dots, n}{1, 2, \dots, m}}$ по переменным λ, ψ нет произведений вида λ_i^2 . По определению минор $A_{\frac{n-m+1, \dots, n}{1, 2, \dots, m}}$ имеет следующее разложение в терминах матричных элементов оператора Лакса:

$$A_{\frac{n-m+1, \dots, n}{1, 2, \dots, m}} = \sum_p (-1)^{t(p)} a_{n-m+1, j_1} a_{n-m+2, j_2} \cdots a_{n, j_m}, \quad (53)$$

где $t(p)$ – количество транспозиций в перестановке $p = j_1 j_2 \dots j_m$ – чисел $1, 2, \dots, m$. Назовем для удобства *путем* определенную последовательность произведений a_{ij} , являющуюся одним членом из $m!$ членов в выражении для минора $A_{\frac{n-m+1, \dots, n}{1, 2, \dots, m}}$.

Пусть λ_l^2 , где l фиксировано, возникает при разложении некоторого пути по переменным λ, ψ . Для определенности будем считать, что происхождение множителя λ_l^2 обусловлено двумя матричными элементами a_{ij} :

$$a_{i_1 j_a} = \sum_{l_1=1}^n \lambda_{l_1} \psi_{i_1 l_1} \psi_{j_a l_1}, \quad a_{i_2 j_b} = \sum_{l_2=1}^n \lambda_{l_2} \psi_{i_2 l_2} \psi_{j_b l_2}. \quad (54)$$

Выделяя в разложениях a_{ij} члены, в которых присутствуют λ_l , получим $\lambda_l \psi_{i_1 l} \psi_{j_a l}$ и $\lambda_l \psi_{i_2 l} \psi_{j_b l}$. Их произведение есть $c_1 = \lambda_l^2 \psi_{i_1 l} \psi_{j_a l} \psi_{i_2 l} \psi_{j_b l}$. Рассмотрим теперь путь (мы будем называть его двойственным), отличающийся от первого на одну транспозицию $-j_1 j_2 \dots j_b \dots j_a \dots j_m$ вместо $j_1 j_2 \dots j_a \dots j_b \dots j_m$, и соответственно на фактор (-1) . Тогда двойственный путь отличается от первого только двумя элементами a_{ij} (и фактором (-1)):

$$a_{i_1 j_b} = \sum_{l_3=1}^n \lambda_{l_3} \psi_{i_1 l_3} \psi_{j_b l_3}, \quad a_{i_2 j_a} = \sum_{l_4=1}^n \lambda_{l_4} \psi_{i_2 l_4} \psi_{j_a l_4}. \quad (55)$$

Выделяя в разложениях a_{ij} члены, в которых присутствуют λ_l , получим $\lambda_l \psi_{i_1 l} \psi_{j_b l}$ и $\lambda_l \psi_{i_2 l} \psi_{j_a l}$. Их произведение есть $c_2 = \lambda_l^2 \psi_{i_1 l} \psi_{j_b l} \psi_{i_2 l} \psi_{j_a l}$. Мы видим, что произведения c_1 и c_2 одинаковы, но отличаются на фактор (-1) , коэффициенты при c_1 и c_2 состоят из произведений a_{ij} и, как отмечалось выше, совпадают. Следовательно, сумма c_1 и c_2 равна нулю и произведений вида λ_l^2 не существует. Очевидно, что в разложении минора $A_{\frac{n-m+1, \dots, n}{1, 2, \dots, m}}$ не существует и более высоких степеней λ_l .

Теперь покажем, что разложение левого нижнего углового минора матрицы L состоит из суммы членов вида $\lambda_{i_1} \lambda_{i_2} \dots \lambda_{i_m} M_{\frac{1, 2, \dots, m}{i_1, i_2, \dots, i_m}} M_{\frac{n-m+1, \dots, n}{i_1, i_2, \dots, i_m}}$. Количество членов в этом разложении определяется количеством n_λ различных произведений $\lambda_{i_1} \lambda_{i_2} \dots \lambda_{i_m}$. Это число равно $n_\lambda = n! / k! (n-m)!$. Выбирая некоторое множество $\{i_1, i_2, \dots, i_m\}$, которое соответствует произведению элементов λ , определим, чему равно произведение элементов ψ как коэффициента при выбранном произведении элементов λ .

Для простоты выберем множество $\{1, 2, \dots, m\}$ и зафиксируем какой-нибудь путь $P_1 = (-1)^{t_1(p)} a_{n-m+1, j_1} a_{n-m+2, j_2} \dots a_{n, j_m}$. Тем самым мы фиксируем набор j_l . Так как $a_{ij} = \sum_{k=1}^n \lambda_k \psi_{ik} \psi_{jk}$, рассмотрим при $\lambda_s, s = \overline{1, m}$, элемент $\psi_{n-m+s, s}$, тогда при $\lambda_s \psi_{n-m+s, s}$ мы получим элемент $\psi_{j_s s}$. Следовательно, из пути P_1 мы получим произведение $(-1)^{t_1(p)} \psi_{j_1 1} \psi_{j_2 2} \dots \psi_{j_m m}$ при $\prod \lambda_s \psi_{n-m+s, s}$.

Для другого пути P_2 , следуя такой же процедуре, мы получим произведение $(-1)^{t_2(p)} \prod \psi_{j_l s}$, $l = \overline{1, m}$, при $\prod \lambda_s \psi_{n-m+s, s}$ со своим множителем $(-1)^{t_2(p)}$, который наследуется от пути P_2 . Прделав то же самое для всех перестановок j_l (для всех путей), мы получим сумму при $\prod \lambda_s \psi_{n-m+s, s}$, равную $\sum_p (-1)^{t(p)} \psi_{j_1 1} \psi_{j_2 2} \dots \psi_{j_m m}$, которая является минором $M_{\frac{1, 2, \dots, m}{1, 2, \dots, m}}$ матрицы Ψ .

Если рассмотреть перестановку индексов s , что будет означать выбор из данного пути других элементов ψ при таком же наборе λ_s , мы получим тот же самый минор $M_{\frac{1, 2, \dots, m}{1, 2, \dots, m}}$, умноженный на фактор $(-1)^{t_a(p)}$, где $t_a(p)$ – количество транспозиций чисел $1, 2, \dots, m$ – индексов у λ_s . Это понятно, так как эта же перестановка является перестановкой индексов j_s . Далее, теперь мы можем вынести за скобки общий член $\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_m M_{\frac{1, 2, \dots, m}{1, 2, \dots, m}}$ и получим сумму $m!$ элементов вида

$(-1)^{t(p)} \psi_{n-m+1,1} \psi_{n-m+2,2} \cdots \psi_{n,m}$, где $t(p)$ – количество транспозиций чисел $1, 2, \dots, m$, а это есть минор $M_{n-m+1, n-m+2, \dots, n}^{1, 2, \dots, m}$ матрицы Ψ . После таких же вычислений для другого множества $\{i_1, i_2, \dots, i_m\}$, соответствующего произведению элементов λ , мы получим формулу (51) в случае $k = 1$.

Нам остается показать, что любой член разложения (53) принадлежит какому-нибудь выражению вида $\lambda_{i_1} \lambda_{i_2} \cdots \lambda_{i_m} M_{i_1, i_2, \dots, i_m}^{1, 2, \dots, m} M_{i_1, i_2, \dots, i_m}^{n-m+1, \dots, n}$. Действительно, из предыдущего следует, что произведения миноров содержат все возможные произведения элементов ψ двух типов. Любой член разложения как раз и состоит из двух произведений таких последовательностей на соответствующий коэффициент – произведение λ , что непосредственно следует из раскрытия произведений $a_{ij} = \sum_{k=1}^n \lambda_k \psi_{ik} \psi_{jk}$.

Формула (51) для любого k следует из $L^k \Psi = \Psi \Lambda^k$, а формула (52) – из предложений 1 и 2. ■

5.3. Интегралы движения, полученные чоппингом, и плюккеровы координаты. Здесь мы приведем формулу, выражающую дополнительные интегралы движения, полученные чоппингом, через плюккеровы координаты частичных флагов.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Инволютивные интегралы (14), возникающие из процедуры чоппинга, могут быть представлены в виде*

$$I_{m,k} = \frac{\sum_{i_1 < \dots < i_s < \dots < i_k} \lambda_{i_1} \cdots \lambda_{i_k} \sum_{j_1 < \dots < j_m, j_t \neq i_s} \lambda_{j_1} \cdots \lambda_{j_m} M_{i_1, \dots, i_k}^{1, \dots, k} M_{i_1, \dots, i_k}^{n-k+1, \dots, n}}{\sum_{l_1 < \dots < l_r < \dots < l_k} \lambda_{l_1} \cdots \lambda_{l_k} M_{l_1, \dots, l_k}^{1, \dots, k} M_{l_1, \dots, l_k}^{n-k+1, \dots, n}},$$

$$1 \leq s, r \leq k, \quad 1 \leq t \leq m, \quad 1 \leq i_s, j_t, l_r \leq n,$$

$$0 \leq k \leq \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor, \quad 1 \leq m \leq n-2k. \quad (56)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего определим, какие миноры образуют коэффициент $E_{m,k}$. Рассмотрим процедуру чоппинга и фиксируем k и m . Тогда мы имеем (см. (13))

$$\det(L - \mu I)_k = E_{0,k} \mu^{n-2k} + \cdots + E_{m,k} \mu^{n-2k-m} + \cdots + E_{n-2k,k} = 0. \quad (57)$$

Произведение $E_{m,k} \mu^{n-2k-m}$ состоит из миноров $[(n-k) \times (n-k)]$ -матрицы $(L - \mu I)_k$ так, что $n-2k-m$ элементов μ имеется в этом произведении. Элементы μ расположены на главной диагонали матрицы $(L - \mu I)$, поэтому коэффициент $E_{m,k}$ состоит из всех миноров размера $(m+k) \times (m+k)$, образованных вычеркиванием $n-2k-m$ строк и $n-2k-m$ столбцов с теми же индексами, что и строки. Значения индексов вычеркнутых строк и столбцов ограничены k и $n-k+1$ сверху и снизу соответственно. И мы получаем формулу для коэффициента $E_{m,k}$:

$$E_{m,k} = \sum_{i_{k+1} < \dots < i_{k+m}} A_{\substack{i_{k+1}, \dots, i_{k+m}, n-k+1, \dots, n \\ 1, \dots, k, i_{k+1}, \dots, i_{k+m}}}^{i_{k+1}, \dots, i_{k+m}, n-k+1, \dots, n}, \quad k < i_{k+1} < \dots < i_{k+m} < n-k+1. \quad (58)$$

Количество членов A равно $(n - 2k)!/(n - 2k - m)!m!$. Все миноры в (58) имеют следующий вид в переменных λ, ψ :

$$\begin{aligned} A_{\substack{i_{k+1}, \dots, i_{k+m}, n-k+1, \dots, n \\ 1, \dots, k, i_{k+1}, \dots, i_{k+m}}} &= \\ &= \sum_{j_1 < \dots < j_s < \dots < j_{k+m}} \lambda_{j_1} \cdots \lambda_{j_{k+m}} M_{\substack{1, \dots, k, i_{k+1}, \dots, i_{k+m} \\ j_1, \dots, j_{k+m}}} M_{\substack{i_{k+1}, \dots, i_{k+m}, n-k+1, \dots, n \\ j_1, \dots, j_{k+m}}}, \end{aligned} \quad (59)$$

где $1 \leq j_s \leq n$. Эта формула аналогична формуле (51) для $A_{\substack{n-m+1, \dots, n \\ 1, 2, \dots, m}}$, но без некоторых $n - 2k - m$ строк и $n - 2k - m$ столбцов с теми же индексами, что и у строк. Доказательство формулы (59) аналогично доказательству (51).

Фиксируем некоторое выбранное множество $\lambda_{j_s} = \{\lambda_{a_1}, \dots, \lambda_{a_s}, \dots, \lambda_{a_{k+m}}\}$, одинаковое для каждого минора A в (58) после разложения (59). Суммируя эти члены, мы получаем

$$\lambda_{a_1} \cdots \lambda_{a_s} \cdots \lambda_{a_{k+m}} \sum_{i_{k+1} < \dots < i_{k+m}} M_{\substack{1, \dots, k, i_{k+1}, \dots, i_{k+m} \\ a_1, \dots, a_{k+m}}} M_{\substack{i_{k+1}, \dots, i_{k+m}, n-k+1, \dots, n \\ a_1, \dots, a_{k+m}}}, \quad (60)$$

где для фиксированных индексов мы использовали обозначения a_s . Разлагая каждый из миноров в (60) — $M_{\substack{1, \dots, k, i_{k+1}, \dots, i_{k+m} \\ a_1, \dots, a_{k+m}}}$ — в сумму произведений миноров матриц размеров $m \times m$ и $k \times k$ (разложение Лапласа), мы получаем

$$\begin{aligned} M_{\substack{1, \dots, k, i_{k+1}, \dots, i_{k+m} \\ a_1, \dots, a_s, \dots, a_{k+m}}} &= \sum_{l_1 < \dots < l_r < \dots < l_k} M_{\substack{1, \dots, k \\ l_1, \dots, l_k}} (-1)^{p+q} M_{\substack{i_{k+1}, \dots, i_{k+m} \\ l_{k+1}, \dots, l_{k+m}}}, \\ l_r &\in a_s, \quad a = 1 + \dots + k, \quad b = l_1 + \dots + l_k. \end{aligned} \quad (61)$$

Другими словами, в (61) сумма берется по всем перестановкам k столбцов с индексами из множества $\{a_1, \dots, a_{k+m}\}$. Поэтому мы имеем из (60)

$$\begin{aligned} &\sum_{i_{k+1} < \dots < i_{k+m}} \left(\sum_{l_1 < \dots < l_r < \dots < l_k} M_{\substack{1, \dots, k \\ l_1, \dots, l_k}} (-1)^{p+q} M_{\substack{i_{k+1}, \dots, i_{k+m} \\ l_{k+1}, \dots, l_{k+m}}} \right) M_{\substack{i_{k+1}, \dots, i_{k+m}, n-k+1, \dots, n \\ a_1, \dots, a_{k+m}}} = \\ &= \sum_{l_1 < \dots < l_r < \dots < l_k} M_{\substack{1, \dots, k \\ l_1, \dots, l_k}} (-1)^{p+q} \times \\ &\quad \times \sum_{i_{k+1} < \dots < i_{k+m}} M_{\substack{i_{k+1}, \dots, i_{k+m} \\ l_{k+1}, \dots, l_{k+m}}} M_{\substack{i_{k+1}, \dots, i_{k+m}, n-k+1, \dots, n \\ a_1, \dots, a_{k+m}}}. \end{aligned} \quad (62)$$

Теперь мы фиксируем индексы $\{l_1, \dots, l_k\}$ и преобразуем минор $M_{\substack{i_{k+1}, \dots, i_{k+m}, n-k+1, \dots, n \\ a_1, \dots, a_{k+m}}}$ в дополнение (напомним, что $\Psi \in SO(n, \mathbb{R})$):

$$\begin{aligned} M_{\substack{i_{k+1}, \dots, i_{k+m}, n-k+1, \dots, n \\ a_1, \dots, a_{k+m}}} &= (-1)^{p_1+q_1} M_{\substack{1, \dots, k, \tilde{i}_{k+1}, \dots, \tilde{i}_{n-k-m} \\ \tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_{n-k-m}}} = C_{\substack{i_{k+1}, \dots, i_{k+m}, n-k+1, \dots, n \\ a_1, \dots, a_{k+m}}}, \\ p_1 &= 1 + \dots + k + \tilde{i}_{k+1} + \dots + \tilde{i}_{n-k-m}, \quad q_1 = \tilde{a}_1 + \dots + \tilde{a}_{n-k-m}. \end{aligned} \quad (63)$$

Теперь добавим к сумме $\sum_{i_{k+1} < \dots < i_{k+m}}$ в (62) произведение миноров матрицы размера $(n-k) \times (n-k)$ со всеми последовательностями m индексов i_z из множества $\{1, \dots, n-k\}$, которые не встречаются в сумме $\sum_{i_{k+1} < \dots < i_{k+m}}$. Заметим, что в каждой последовательности m индексов i_z по крайней мере один индекс принадлежит множеству $\{1, \dots, k\}$. Мы получаем

$$M_{\frac{1, \dots, k}{l_1, \dots, l_k}} (-1)^{p+q} \left(\sum_{i_{k+1} < \dots < i_{k+m}} M_{\frac{i_{k+1}, \dots, i_{k+m}}{l_{k+1}, \dots, l_{k+m}}} C_{\frac{i_{k+1}, \dots, i_{k+m}, n-k+1, \dots, n}{a_1, \dots, a_{k+m}}} + \right. \\ \left. + \sum_{i_{z_1} < \dots < i_{z_m}} M_{\frac{i_{z_1}, \dots, i_{z_m}}{l_{k+1}, \dots, l_{k+m}}} C_{\frac{i_{z_1}, \dots, i_{z_m}}{a_1, \dots, a_{k+m}}} \right) \quad (64)$$

и

$$(-1)^{p+q} \left(\sum_{i_{k+1} < \dots < i_{k+m}} M_{\frac{i_{k+1}, \dots, i_{k+m}}{l_{k+1}, \dots, l_{k+m}}} C_{\frac{i_{k+1}, \dots, i_{k+m}, n-k+1, \dots, n}{a_1, \dots, a_{k+m}}} + \right. \\ \left. + \sum_{i_{z_1} < \dots < i_{z_m}} M_{\frac{i_{z_1}, \dots, i_{z_m}}{l_{k+1}, \dots, l_{k+m}}} C_{\frac{i_{z_1}, \dots, i_{z_m}}{a_1, \dots, a_{k+m}}} \right) = M_{\frac{n-k+1, \dots, n}{l_1, \dots, l_k}}. \quad (65)$$

Мы делаем преобразование (63) для всех $M_{\frac{1, \dots, k}{l_1, \dots, l_k}}$. Сумма добавочных членов равна нулю, поскольку

$$\sum_{l_1 < \dots < l_k} M_{\frac{1, \dots, k}{l_1, \dots, l_k}} (-1)^{p+q} \sum_{i_{z_1} < \dots < i_{z_m}} M_{\frac{i_{z_1}, \dots, i_{z_m}}{l_{k+1}, \dots, l_{k+m}}} C_{\frac{i_{z_1}, \dots, i_{z_m}}{a_1, \dots, a_{k+m}}} = \\ = \sum_{i_{z_1} < \dots < i_{z_m}} C_{\frac{i_{z_1}, \dots, i_{z_m}}{a_1, \dots, a_{k+m}}} \sum_{l_1 < \dots < l_k} M_{\frac{1, \dots, k}{l_1, \dots, l_k}} (-1)^{p+q} M_{\frac{i_{z_1}, \dots, i_{z_m}}{l_{k+1}, \dots, l_{k+m}}} \quad (66)$$

и в миноре $\sum_{l_1 < \dots < l_k} M_{\frac{1, \dots, k}{l_1, \dots, l_k}} (-1)^{p+q} M_{\frac{i_{z_1}, \dots, i_{z_m}}{l_{k+1}, \dots, l_{k+m}}}$ встречаются две одинаковые строки. Поэтому

$$\lambda_{j_1} \dots \lambda_{j_{k+m}} \sum_{i_{k+1} < \dots < i_{k+m}} M_{\frac{1, \dots, k, i_{k+1}, \dots, i_{k+m}}{j_1, \dots, j_{k+m}}} M_{\frac{i_{k+1}, \dots, i_{k+m}, n-k+1, \dots, n}{j_1, \dots, j_{k+m}}} = \\ = \lambda_{j_1} \dots \lambda_{j_{k+m}} \sum_{l_1 < \dots < l_k} M_{\frac{1, \dots, k}{l_1, \dots, l_k}} M_{\frac{n-k+1, \dots, n}{l_1, \dots, l_k}}, \quad (67)$$

и окончательно мы получаем формулу (56) после изменения обозначений и суммирования. ■

Заметим, что можно выразить интегралы (56) через интегралы (52), используя формулу (51), которая позволяет выразить все произведения $M_{\frac{1, 2, \dots, k}{i_1, i_2, \dots, i_k}} M_{\frac{n-k+1, \dots, n}{i_1, i_2, \dots, i_k}}$, встречающиеся в (56), через $A_{\frac{n-m+1, \dots, n}{1, 2, \dots, m}}^{(k)}$.

5.4. Интегралы движения в координатах λ и ψ . Здесь мы покажем, что набор интегралов вида (52), построенных на минорах матрицы собственных функций оператора Лакса, действительно определяет полное некоммутативное семейство интегралов полной симметричной системы Тоды.

В п. 5.3 мы показали, что интегралы движения нашей системы, выраженные через матричные элементы матрицы оператора Лакса, можно выразить через переменные λ и $M(\psi)$. Также мы знаем, что $M(\psi)$ являются полуинвариантами и из

них можно составить инварианты движения. Возникает вопрос: сколько независимых интегралов движения существует в координатах λ и $M(\psi)$? В работах [14], [15] с помощью ли-алгебраического подхода была получена формула для количества интегралов движения. Здесь мы получим ту же формулу, используя многообразия флагов.

Известно, что с помощью п्लуккерова вложения можно описать многообразие флагов, используя п्लуккеровы координаты:

$$FL_n(\mathbb{R}) \hookrightarrow \mathbb{RP}^{n-1} \times \cdots \times \mathbb{RP}^{C_{k_1}^n - 1} \times \cdots \times (\mathbb{RP}^{C_{k_2}^n - 1})^* \times \cdots \times (\mathbb{RP}^{n-1})^*,$$

$$1 \leq k_1 \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor < k_2 \leq n-1. \quad (68)$$

На векторном пространстве $V^n = \mathbb{R}^n$ рассмотрим базисные векторы e_i и определим базис e_i^* двойственного проективного пространства через единичный объем:

$$e_i \wedge e_i^* = e_1 \wedge e_2 \wedge \cdots \wedge e_n. \quad (69)$$

Теперь можно выразить п्लуккеровы координаты точки в FL_n , соответствующие матрице $\Psi \in SO(n, \mathbb{R})$:

$$y = (X_i \cdot e_i, X_{i_1, i_2} \cdot e_{i_1} \wedge e_{i_2}, \dots, X_{i_1, i_2, \dots, i_m} \cdot e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \cdots \wedge e_{i_m}, \dots, X_{i_1, i_2, \dots, i_{n-1}} \cdot e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \cdots \wedge e_{i_{n-1}}), \quad (70)$$

где $X_{i_1, i_2, \dots, i_m}$ – п्लуккеровы координаты, они выражаются через координаты $\psi_{ij} \in \Psi$:

$$X_{i_1, i_2, \dots, i_m} = M_{\substack{1, 2, \dots, m \\ i_1, i_2, \dots, i_m}}(\psi), \quad (71)$$

где $M_{\substack{1, 2, \dots, m \\ i_1, i_2, \dots, i_m}}(\psi)$, как обычно, – миноры, полученные пересечением первых верхних m строк с некоторым набором $(i_1, i_2, \dots, i_m)$ m столбцов матрицы $\Psi \in SO(n, \mathbb{R})$.

Напомним, что матрицу оператора Лакса $L \in \text{Symm}$ можно разложить:

$$L = \Psi \Lambda \Psi^{-1}, \quad (72)$$

где Λ – диагональная матрица собственных значений.

Заметим, что

$$X_{i_1, i_2, \dots, i_m}^* = X_{j_1, j_2, \dots, j_{n-m}} = M_{\substack{1, 2, \dots, n-m \\ j_1, j_2, \dots, j_{n-m}}}(\psi) = (-1)^{a+b} M_{\substack{n-m+1, \dots, n \\ i_1, i_2, \dots, i_m}}(\psi),$$

$$i_k \neq j_l, \quad a = \sum_{k=1}^{n-m} k, \quad b = \sum_{k=1}^{n-m} j_k. \quad (73)$$

Скажем, что п्लуккеровы координаты принадлежат одному семейству, если соответствующие миноры матрицы $\Psi \in SO(n, \mathbb{R})$, по которым они вычисляются, имеют один и тот же ранг. Таким образом, X и X^* принадлежат одному семейству. Можно определить многообразие флагов с помощью квадратичных соотношений на п्लуккеровы координаты X (см., например, [20], а также приложение А):

$$X_{i_1, i_2, \dots, i_{m_1}} X_{j_1, j_2, \dots, j_{m_2}} - \sum_P X_{i'_1, i'_2, \dots, i'_t, \dots, i'_{m_1}} X_{j'_1, j'_2, \dots, j'_s, \dots, j'_{m_2}} = 0,$$

$$P: i'_t = \{j_l, i_t\}, \quad l = \begin{cases} \overline{1, t}, & t \leq m_1 - k + 1, \\ \overline{t - m_1 + k, k}, & t > m_1 - k + 1, \end{cases} \quad k < m_1, m_2, \quad (74)$$

$$j'_s = i_t, \quad i'_t = j_s, \quad s = \overline{1, k},$$

$$t_1 < t_2 \Rightarrow i'_{t_1} < i'_{t_2},$$

где суммирование ведется по всем парам $X \cdot X$, полученным перестановкой фиксированного подмножества k элементов из множества j индексов (достаточно взять первые k) и некоторого подмножества k элементов из множества i индексов, с сохранением порядка в каждом подмножестве.

Заметим, что кроме обычных соотношений Плюккера (соотношений между плюккеровыми координатами одного семейства) здесь добавлены квадратичные соотношения между плюккеровыми координатами X , принадлежащими к разным семействам. Заметим, что больше никаких других соотношений на плюккеровы координаты не существует.

Из (51)–(56) следует, что интегралы суть рациональные функции от λ и ψ . Числители и знаменатели этих функций состоят из таких сумм, каждый член которых является произведением некоторой полиномиальной функции от λ и функции $\varphi(M(\psi))$. Эта функция имеет следующий вид:

$$\varphi(M(\psi)) = \frac{M_{\frac{1,2,\dots,m}{i_1,i_2,\dots,i_m}} M_{\frac{n-m+1,\dots,n}{i_1,i_2,\dots,i_m}}}{M_{\frac{1,2,\dots,m}{j_1,j_2,\dots,j_m}} M_{\frac{n-m+1,\dots,n}{j_1,j_2,\dots,j_m}}}. \quad (75)$$

В числителе и знаменателе $\varphi(M(\psi))$ плюккерова координата $X_{i_1,i_2,\dots,i_m} = M_{\frac{1,2,\dots,m}{i_1,i_2,\dots,i_m}}$, $X_{i_1,i_2,\dots,i_m} \in \mathbb{RP}^{C_m^n-1}$, умножается на двойственную плюккерову координату (из того же семейства) $X_{i_1,i_2,\dots,i_m}^* = M_{\frac{n-m+1,\dots,n}{i_1,i_2,\dots,i_m}}$, $X_{i_1,i_2,\dots,i_m}^* \in (\mathbb{RP}^{C_m^n-1})^*$. Такие произведения будем называть *спариваниями*.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. *Функции $\varphi(M(\psi))$ (75) являются интегралами относительно однопараметрических изоспектральных потоков. Количество независимых интегралов в множестве функций (75) есть*

$$N_\Psi = \dim Fl_n(\mathbb{R}) - (n-1). \quad (76)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО этого утверждения основано на прямом вычислении динамики $\varphi(M(\psi))$ с использованием уравнений (30):

$$\begin{aligned} M'_{\frac{1,2,\dots,m}{i_1,i_2,\dots,i_m}} &= \left(-\sum_{l=1}^m a_{ll} + \sum_{i_s=i_1}^{i_m} \lambda_{i_s} \right) M_{\frac{1,2,\dots,m}{i_1,i_2,\dots,i_m}}, \\ M'_{\frac{n-m+1,\dots,n}{i_1,i_2,\dots,i_m}} &= \left(\sum_{l=n-m+1}^n a_{ll} - \sum_{i_s=i_1}^{i_m} \lambda_{i_s} \right) M_{\frac{n-m+1,\dots,n}{i_1,i_2,\dots,i_m}}, \\ M'_{\frac{1,2,\dots,m}{j_1,j_2,\dots,j_m}} &= \left(-\sum_{l=1}^m a_{ll} + \sum_{j_s=j_1}^{j_m} \lambda_{j_s} \right) M_{\frac{1,2,\dots,m}{j_1,j_2,\dots,j_m}}, \\ M'_{\frac{n-m+1,\dots,n}{j_1,j_2,\dots,j_m}} &= \left(\sum_{l=n-m+1}^n a_{ll} - \sum_{j_s=j_1}^{j_m} \lambda_{j_s} \right) M_{\frac{n-m+1,\dots,n}{j_1,j_2,\dots,j_m}}, \end{aligned} \quad (77)$$

и мы получаем

$$\varphi'(M(\psi)) = 0. \quad (78)$$

Это же верно для остальных потоков (см. (30)). Функции вида (75) образованы из отношений между спариваниями различных семейств плюккерových координат, поэтому эти функции определены на многообразии флагов. Как было показано выше (см. (77), (78)), эти функции инвариантны относительно потоков, индуцированных изоспектральными инвариантами движения $(1/k) \operatorname{Tr} L^k$, $k = 2, n$. Количество этих потоков равно $n - 1$. Далее, из инвариантности функций относительно потоков следует, что они определены на факторпространстве $FL_n(\mathbb{R})$ по действию потоков. Размерность этого факторпространства, которое является числом независимых неоднородных координат, равна $\dim Fl_n(\mathbb{R}) - (n - 1)$. И, следовательно, количество независимых функций вида (75) не может быть больше $\dim Fl_n(\mathbb{R}) - (n - 1)$. Заметим, что количество нужных функций вида (75) всегда больше или равно $\dim Fl_n(\mathbb{R}) - (n - 1)$. Другими словами, этих независимых функций меньше тоже не может быть, так как всегда можно подобрать независимые функции таким образом, чтобы они не удовлетворяли соотношениям (74), а других соотношений между этими функциями нет, так как не существует никаких других соотношений на плюккерovy координаты, кроме (74). В самом деле, допустим, что это не так. Тогда мы можем выбрать $\dim Fl_n(\mathbb{R}) - (n - 1)$ отношений спариваний, но они будут зависимы. Существует некоторое соотношение (по крайней мере одно) на отношения спариваний. Это соотношение есть уравнение на независимые плюккерovy координаты, поэтому оно является одним из соотношений (74). Мы получаем противоречие. Поэтому мы имеем

$$N_\psi = \frac{n(n-1)}{2} - (n-1) = \dim Fl_n - (n-1). \quad (79)$$

Заметим, что мы можем выбрать отношения таким образом, чтобы в каждой функции (75) была одна независимая неоднородная координата. Почему мы можем так сделать? Во-первых, число $\dim Fl_n(\mathbb{R}) - (n - 1)$ меньше (для $n \geq 4$) количества отношений спариваний, которое равно $2^{n-1} - 1 - [n/2]$, и, во-вторых, каждое соотношение спариваний есть инвариант и произведение двух неоднородных координат. Поэтому каждое из N_ψ отношений спариваний зависит от одной координаты на факторпространстве $FL_n(\mathbb{R})$ по модулю потоков. ■

Теперь, чтобы найти общее количество интегралов движения полной симметричной решетки Тоды, нужно вычесть количество операторов Казимира и прибавить изоспектральные интегралы движения. В четном случае количество операторов Казимира есть $(n/2 - 1)$, а в нечетном — $(n - 1)/2$, количество изоспектральных интегралов движения есть $n - 1$. Поэтому мы получаем

$$N = \frac{1}{2}n(n-1) - \frac{1}{2}n + 1$$

и

$$N = \frac{1}{2}n(n-1) - \frac{1}{2}(n+1) + 1$$

соответственно для четного и нечетного случаев. В общем случае мы имеем

$$N = \frac{1}{2}n(n-1) - \left\lfloor \frac{1}{2}(n+1) \right\rfloor + 1. \quad (80)$$

Общее количество независимых интегралов движения вида (52) определяется количеством независимых отношений полуинвариантов (51) и некоторым выбором спариваний для каждого семейства:

$$\frac{A_{\frac{n-m+1, \dots, n}{1, 2, \dots, m}}^{(k)}}{M_{\frac{1, 2, \dots, m}{a_1, a_2, \dots, a_m}} M_{\frac{n-m+1, \dots, n}{a_1, a_2, \dots, a_m}}} = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_m} \lambda_{i_1}^k \lambda_{i_2}^k \dots \lambda_{i_m}^k \frac{M_{\frac{1, 2, \dots, m}{i_1, i_2, \dots, i_m}} M_{\frac{n-m+1, \dots, n}{i_1, i_2, \dots, i_m}}}{M_{\frac{1, 2, \dots, m}{a_1, a_2, \dots, a_m}} M_{\frac{n-m+1, \dots, n}{a_1, a_2, \dots, a_m}}}, \quad (81)$$

где мы положили для некоторого l , что $i_l = a_l$, и фиксировали эти индексы. Инварианты (81) линейно зависят от инвариантов (75). Поэтому общее количество независимых интегралов движения, выраженных через матричные элементы Лакса, имеющих вид (52)–(56), определено формулой (80), и мы нашли точные выражения для интегралов движения полной симметричной решетки Тоды.

Теперь определим, как можно выбрать некоммутативное множество интегралов движения. Сначала ответим на вопрос: как много независимых интегралов движения мы можем выбрать из построенных спариваниями интегралов, которые принадлежат одному семейству? Плюккеровы координаты одного семейства описывают пространство частичных флагов:

$$\begin{aligned} Q_{\text{рф}}(\mathbb{R}) &= V^a \subset V^b \subset V^n = \mathbb{R}^n, \\ Q_{\text{рф}}(\mathbb{R}) &\hookrightarrow \mathbb{RP}^{C_m^n - 1} \times (\mathbb{RP}^{C_{n-m}^n - 1})^*, \\ a &= m, \quad \dim V^a = m, \\ b &= n - m, \quad \dim V^b = n - m. \end{aligned} \quad (82)$$

Заметим, что по отдельности каждое вложение $V^a \subset V^n = \mathbb{R}^n$ и $V^b \subset V^n = \mathbb{R}^n$ дают грассманианы $\text{Gr}_m(n)$ и $\text{Gr}_{n-m}(n)$. Чтобы вычислить количество независимых переменных, описывающих пространство частичных флагов $Q_{\text{рф}}(\mathbb{R})$, необходимо вычислить коразмерность стабилизатора $B_{\text{рф}}$, потому что $Q_{\text{рф}}(\mathbb{R}) \cong G/B_{\text{рф}}$, где $G = GL_n(\mathbb{R})$ (или $G = SO_n(\mathbb{R})$). Также мы должны вычесть количество потоков, индуцированных изоспектральными интегралами движения. Поэтому мы получаем

$$N_{\text{рф}} = 2m(n - m) - m^2 - (n - 1) = n(2m - 1) - 3m^2 + 1, \quad m \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor. \quad (83)$$

Для примера рассмотрим случай $n = 6$. Имеются следующие семейства:

- 1) семейство, образованное плюккеровыми координатами, которые являются детерминантами матриц с размерами 1×1 и 5×5 ;
- 2) семейство, образованное плюккеровыми координатами, которые являются детерминантами матриц с размерами 2×2 и 4×4 ;
- 3) семейство, образованное плюккеровыми координатами, которые являются детерминантами матриц с размерами 3×3 (формула (83) верна и в этом случае).

Найдем значения количества интегралов в этих трех случаях:

$$\begin{aligned} 1: \quad N_{\text{рф}}^1 &= 6(2 - 1) - 3 + 1 = 4, \\ 2: \quad N_{\text{рф}}^2 &= 6(2 \cdot 2 - 1) - 3 \cdot 4 + 1 = 18 - 12 + 1 = 7, \\ 3: \quad N_{\text{рф}}^3 &= 6(6 - 1) - 3 \cdot 9 + 1 = 30 - 27 + 1 = 4. \end{aligned} \quad (84)$$

Заметим, что эти значения учитывают количество операторов Казимира (два в случае $n = 6$).

Рис. 2

Поэтому, чтобы построить некоммутативное семейство независимых интегралов (максимальное количество инвариантов равно 16, включая три оператора Казимира и пять изоспектральных интегралов; формула для максимального количества инвариантов имеет вид $N_{\max} = n(n-1)/2 + 1$), нам нужно выбрать восемь функций вида (52) из $4 + 7 + 4 = 15$ функций так, чтобы было не более четырех функций, соответствующих матрице A размера 1×1 , не более семи функций, соответствующих матрице A размера 2×2 , и не более четырех функций, соответствующих матрице A размера 3×3 . Выбирая восемь функций, мы должны иметь в виду, что, если мы полагаем $k_2 = 1$, индекс k_1 должен быть больше или равным 3, чтобы исключить операторы Казимира из некоммутативного семейства. Добавляя пять функций $(1/k) \text{Tr } L^k$, $k \geq 2$, мы получаем требуемое некоммутативное семейство. В общем случае мы должны действовать таким же способом.

На рис. 2 мы схематично изобразили максимальное количество интегралов в случае $n = 6$. Стрелки слева указывают максимальное количество интегралов для каждого семейства. Они начинаются от верхних элементов матриц, которые образуют интегралы и полуинварианты соответствующих семейств. Кривые внизу обозначают спектральные кривые, которые получены процедурой чоппинга. Отметим, что все положения, касающиеся некоммутативного семейства интегралов в случае $n = 6$, были проверены прямыми вычислениями с помощью программы Mathematica 8.

5.4.1. *Полное некоммутативное семейство интегралов.* Теперь мы готовы описать точно полное некоммутативное семейство независимых интегралов, выраженных в терминах матричных элементов оператора Лакса. Для этой цели мы можем выбрать следующие интегралы из множества (52):

$$J_{k,1} = \frac{A_{\overline{1,2,\dots,m}}^{(k)}_{\overline{n-m+1,\dots,n}}}{A_{\overline{1,2,\dots,m}}_{\overline{n-m+1,\dots,n}}},$$

$$\begin{aligned} m = 1, \quad k = \overline{3, n-1} & \quad (\# \text{ интегралов} = n-3), \\ 2 \leq m < \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, \quad k = \overline{2, n-2m} & \quad \left(\# \text{ интегралов} = \left\lfloor \frac{(n-4)^2}{4} \right\rfloor \right), \\ m = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, \quad k = 2, \overline{\left\lfloor \frac{(n-2)^2}{4} \right\rfloor + 1} & \quad \left(\# \text{ интегралов} = \left\lfloor \frac{(n-2)^2}{4} \right\rfloor \right), \end{aligned} \quad (85)$$

вместе с $n-1$ изоспектральными интегралами $(1/k) \operatorname{Tr} L^k$, $k = \overline{2, n}$, общее количество интегралов дается формулой (47).

Чтобы построить полное некоммутативное семейство независимых интегралов, выраженных в терминах собственных векторов матрицы Ψ , следует для каждого m из $1 \leq m < [n/2]$ выбрать $n-2m-1$ интегралов из множества (75) и для $m = [n/2]$ выбрать $[(n-2)^2/4]$ интегралов из множества (75). Объединение этих интегралов вместе с $n-1$ интегралами, выраженными в переменных λ , дает полное некоммутативное семейство независимых интегралов полной симметричной $\mathfrak{sl}_n$ решетки Тоды, количество которых есть N_n (47). Заметим, что операторы Казимира даются формулой (15), которая включает $\operatorname{Tr} L$. Общее количество операторов Казимира равно $[(n+1)/2]$.

5.5. Семейства интегралов движения в случае $n = 5$. Рассмотрим случай $n = 5$ более детально и получим точные выражения для интегралов движения. Матрица оператора Лакса имеет вид

$$L = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{pmatrix}. \quad (86)$$

Из процедуры чоппинга мы имеем следующие спектральные кривые:

$$\begin{aligned} P_0(L, \mu) &= \det(L - \mu I), \\ P_1(L, \mu) &= \det(L - \mu I)_1, \\ P_2(L, \mu) &= \det(L - \mu I)_2, \end{aligned} \quad (87)$$

$$\begin{aligned} P_0(L, \mu) &= -\mu^5 + \mu^4 \operatorname{Tr} L - \mu^3 \left(\frac{1}{2} (\operatorname{Tr} L)^2 - \frac{1}{2} \operatorname{Tr} L^2 \right) + \mu^2 \left(\frac{1}{3} (\operatorname{Tr} L)^3 - \frac{1}{3} \operatorname{Tr} L^3 \right) - \\ &\quad - \mu \left(\frac{1}{4} (\operatorname{Tr} L)^4 - \frac{1}{4} \operatorname{Tr} L^4 \right) + \det L, \end{aligned} \quad (88)$$

$$P_1(L, \mu) = \mu^3 a_{15} + \mu^2 \left(A_{\frac{25}{12}} + A_{\frac{45}{14}} + A_{\frac{35}{13}} \right) + \mu \left(A_{\frac{345}{134}} + A_{\frac{245}{124}} + A_{\frac{235}{123}} \right) + A_{\frac{2345}{1234}},$$

$$P_2(L, \mu) = -\mu A_{\frac{45}{12}} + A_{\frac{345}{123}}.$$

Рис. 3

На рис. 3 спектральные кривые внизу получены процедурой чоппинга. Верхняя стрелочка слева указывает на максимально возможное количество дополнительных независимых интегралов движения, построенных на полуинварианте $A_{\frac{45}{12}}$. Эти интегралы принимают следующий вид:

$$J_1 = \frac{A_{\frac{45}{12}}^{(2)}}{A_{\frac{45}{12}}} = \frac{\sum_i \sum_j \lambda_i^2 \lambda_j^2 (-1)^{i+j+1} M_{\frac{12}{ij}} M_{\frac{123}{klm}}}{\sum_i \sum_j \lambda_i \lambda_j (-1)^{i+j+1} M_{\frac{12}{ij}} M_{\frac{123}{klm}}},$$

$$J_2 = \frac{A_{\frac{45}{12}}^{(3)}}{A_{\frac{45}{12}}} = \frac{\sum_i \sum_j \lambda_i^3 \lambda_j^3 (-1)^{i+j+1} M_{\frac{12}{ij}} M_{\frac{123}{klm}}}{\sum_i \sum_j \lambda_i \lambda_j (-1)^{i+j+1} M_{\frac{12}{ij}} M_{\frac{123}{klm}}}, \quad i < j, \quad i, j = \overline{1, 5}. \quad (89)$$

Нижняя стрелочка слева указывает на максимально возможное количество дополнительных независимых интегралов движения, построенных на полуинварианте a_{15} . Соответствующие интегралы движения, полученные чоппингом, имеют вид

$$I_{1,1} = \frac{A_{\frac{25}{12}} + A_{\frac{45}{14}} + A_{\frac{35}{13}}}{a_{15}}, \quad I_{2,1} = \frac{A_{\frac{345}{134}} + A_{\frac{245}{124}} + A_{\frac{235}{123}}}{a_{15}},$$

$$I_{3,1} = \frac{A_{\frac{2345}{1234}}}{a_{15}}, \quad I_{1,2} = \frac{A_{\frac{345}{123}}}{A_{\frac{45}{12}}}.$$

Первое инволютивное семейство состоит из следующих интегралов движения:

$$\frac{1}{2} \text{Tr } L^2, \quad \frac{1}{3} \text{Tr } L^3, \quad \frac{1}{4} \text{Tr } L^4, \quad \frac{1}{5} \text{Tr } L^5, \quad I_{2,1}, \quad I_{3,1}. \quad (90)$$

Второе инволютивное семейство состоит из интегралов движения

$$\frac{1}{2} \operatorname{Tr} L^2, \quad \frac{1}{3} \operatorname{Tr} L^3, \quad \frac{1}{4} \operatorname{Tr} L^4, \quad \frac{1}{5} \operatorname{Tr} L^5, \quad J_1, \quad J_2. \quad (91)$$

Количество операторов Казимира равно 3: $I_{1,1}$, $I_{1,2}$, а также $\operatorname{Tr} L$. Получаем, что общее количество интегралов (некоммутативное семейство) равно 8:

$$N = \frac{1}{2}n(n-1) - \left[\frac{1}{2}(n+1) \right] + 1, \quad (92)$$

$$N_5 = \frac{1}{2}5(5-1) - \left[\frac{1}{2}(5+1) \right] + 1 = 10 - 3 + 1 = 8.$$

Заметим, что вместо интегралов $I_{2,1}$, $I_{3,1}$ мы можем рассмотреть следующие интегралы:

$$I_1^{51} = \frac{A_{51}^3}{a_{15}} = \frac{\sum_i \lambda_i^3 \psi_{1i} \psi_{5i}}{\sum_i \lambda_i \psi_{1i} \psi_{5i}}, \quad I_2^{51} = \frac{A_{51}^4}{a_{15}} = \frac{\sum_i \lambda_i^4 \psi_{1i} \psi_{5i}}{\sum_i \lambda_i \psi_{1i} \psi_{5i}},$$

а также операторы Казимира

$$I_0^{51} = \frac{A_{51}^2}{a_{15}} = \frac{\sum_i \lambda_i^2 \psi_{1i} \psi_{5i}}{\sum_i \lambda_i \psi_{1i} \psi_{5i}}, \quad I_{1,1} = I_0^{51} - \operatorname{Tr} L.$$

Таким образом, мы можем сказать, что первое инволютивное семейство образовано минором a_{15} , а второе – минором $A_{\frac{45}{12}}$. Это аналогично случаю $n = 4$ (миноры a_{14} и $A_{\frac{34}{12}}$ соответственно).

Таблица 1

n	$\dim Fl_n$	N_n^{Iso}	$N_n^{\text{Chopp}} + N_n^{\text{Add}}$	N_n
4	6	3	1 + 1	5
5	10	4	2 + 2	8
6	15	5	4 + 4	13
7	21	6	6 + 6	18
8	28	7	9 + 9	25

В заключение настоящего раздела в табл. 1 мы приводим значения количества интегралов полной симметричной решетки. Тогда для различных n , в которой n – порядок матрицы оператора Лакса, $\dim Fl_n$ – размерность многообразия флагов, N_n^{Iso} – количество изоспектральных интегралов движения минус операторы Казимира, $N_n^{\text{Chopp}} + N_n^{\text{Add}}$ – количество интегралов движения (минус операторы Казимира), полученных процедурой чоппинга, и дополнительных интегралов движения, N_n – общее количество интегралов движения в некоммутативном семействе.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В этой работе мы развили новый подход к получению интегралов движения полной симметричной решетки Тоды, который раскрывает “генетику” системы с точки зрения пространства флагов. Мы используем полуинварианты, уравнения движения которых даются формулой (30) и которые являются плюккеровыми координатами (71) в соответствующих проективных пространствах, чтобы точно построить полное некоммутативное семейство интегралов, выраженных в терминах матрицы оператора Лакса (12) и в терминах матриц собственных значений и собственных векторов (75) для произвольного ранга.

Наш подход намного проще, чем подход, основанный на процедуре Костанта [14]–[16], и позволяет избежать существенных вычислительных сложностей, появляющихся в процедуре Костанта даже для низких рангов матрицы Лакса. Отметим, что эти вычислительные сложности не допускают использование процедуры Костанта для высоких рангов.

Простота предлагаемого подхода подтверждена примером дополнительного интеграла $J = A_{\substack{3,4 \\ 1,2}}^{(2)} (A_{\substack{3,4 \\ 1,2}})^{-1}$ полной $\mathfrak{sl}_4$ решетки Костанта–Тоды. Чтобы получить этот интеграл, авторы работ [12], [19] привлекают изоморфизм $\mathfrak{sl}_4 \leftrightarrow \mathfrak{so}_6$ и процедуру чоппинга для $\mathfrak{so}_6$.

Результаты настоящей работы существенны для установления, что в полной симметричной $\mathfrak{sl}_n$ решетке Тоды существует порядок Брюа [21]. Краткая версия нашей работы представлена в публикации [22]. Техника, которую мы развили в настоящей работе, имеет дальнейшее развитие и приложения. Обобщение для решеток Тоды, определенных для других алгебр Ли и однородных пространств, будет дано в дальнейшем.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Описание многообразия флагов

Рассмотрим подгруппу верхнетреугольных матриц в $GL(4, \mathbb{R})$

$$B^+ = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ 0 & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ 0 & 0 & b_{33} & b_{34} \\ 0 & 0 & 0 & b_{44} \end{pmatrix}. \quad (94)$$

Оказывается, факторпространство $GL(4, \mathbb{R})/B^+$ изоморфно пространству флагов. Напомним, что точка многообразия флагов (флаг) – это последовательность вложений пространств $V^0 \hookrightarrow V^1 \hookrightarrow V^2 \hookrightarrow V^3 \hookrightarrow \mathbb{R}^4$. Вкладывая каждое подпространство, входящее в данный флаг, в нужное проективное пространство, можно показать, что многообразие флагов вложено в прямое произведение проективных пространств:

$$GL(4, \mathbb{R})/B^+ \hookrightarrow \mathbb{RP}^3 \times \mathbb{RP}^5 \times (\mathbb{RP}^3)^*, \quad (95)$$

$$e_i \wedge e_j^* = e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4.$$

Это дает нам возможность описывать точки многообразия флагов с помощью проективных координат. Чтобы построить отображение $Fl_4 \hookrightarrow GL(4, \mathbb{R})/B^+$, выберем

в пространстве флагов точку $x = (e_1, e_1 \wedge e_2, e_1 \wedge e_2 \wedge e_3)$ (под внешним произведением векторов мы понимаем пространство, натянутое на эти векторы). В матричном представлении этой точке соответствует единичная матрица Z_0^{-1} размера 4×4 . Стабилизатором этой точки является группа B^+ . Убедиться в этом можно, например, сравнив проективные координаты точки x и ее образа под действием группы:

$$\begin{aligned} v_1 &= B_x e_1 = b_{11} e_1, \\ v_2 &= B_x e_2 = b_{12} e_1 + b_{22} e_2, \\ v_3 &= B_x e_3 = b_{13} e_1 + b_{23} e_2 + b_{33} e_3, \\ x' &= (b_{11} \cdot e_1, b_{11} b_{22} \cdot e_1 \wedge e_2, b_{11} b_{22} b_{33} \cdot e_1 \wedge e_2 \wedge e_3). \end{aligned} \quad (96)$$

Таким образом, точка x' определяет ту же точку флага, что и точка x . Таким образом, изоморфизм $GL(4, \mathbb{R})/B^+ \cong Fl_4$ следует из общей теории однородных пространств. Теперь можно выразить проективные координаты точки общего положения в Fl_4 , соответствующие матрице $\Psi \in GL(4, \mathbb{R})$:

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_{11} & \psi_{12} & \psi_{13} & \psi_{14} \\ \psi_{21} & \psi_{22} & \psi_{23} & \psi_{24} \\ \psi_{31} & \psi_{32} & \psi_{33} & \psi_{34} \\ \psi_{41} & \psi_{42} & \psi_{43} & \psi_{44} \end{pmatrix}, \quad (97)$$

а именно:

$$y = (X_i \cdot e_i, X_{ij} \cdot e_i \wedge e_j, X_{ijk} \cdot e_i \wedge e_j \wedge e_k), \quad (98)$$

где

$$X_{i_1, i_2, \dots, i_m} = M_{\substack{1, 2, \dots, m \\ i_1, i_2, \dots, i_m}}(\psi). \quad (99)$$

Размерность Fl_4 следует из $GL(4, \mathbb{R})/B^+ \cong Fl_4$ и равна $n(n-1)/2$. Многообразие флагов является многообразием, точки которого удовлетворяют системе уравнений квадратик в произведении проективных пространств. В рассматриваемом случае имеем

$$GL(4, \mathbb{R})/B^+ \hookrightarrow W = \mathbb{RP}^3 \times \mathbb{RP}^5 \times (\mathbb{RP}^3)^*, \quad (100)$$

где W имеет размерность $\dim W = 11$, а размерность Fl_4 должна быть равна 6. Система уравнений на п्लюккерovy переменные имеет вид

$$\begin{aligned} X_1 \cdot X_{234} - X_2 \cdot X_{134} + X_3 \cdot X_{124} - X_4 \cdot X_{123} &= 0, \\ X_1 \cdot X_{23} - X_2 \cdot X_{13} + X_3 \cdot X_{12} &= 0, \\ X_1 \cdot X_{24} - X_2 \cdot X_{14} + X_4 \cdot X_{12} &= 0, \\ X_1 \cdot X_{34} - X_3 \cdot X_{14} + X_4 \cdot X_{13} &= 0, \\ X_2 \cdot X_{34} - X_3 \cdot X_{24} + X_4 \cdot X_{23} &= 0, \\ X_{12} \cdot X_{34} - X_{13} \cdot X_{24} + X_{14} \cdot X_{23} &= 0, \\ X_{13} \cdot X_{234} - X_{23} \cdot X_{134} + X_{34} \cdot X_{123} &= 0, \\ X_{12} \cdot X_{234} - X_{23} \cdot X_{124} + X_{24} \cdot X_{123} &= 0, \\ X_{14} \cdot X_{234} - X_{24} \cdot X_{134} + X_{34} \cdot X_{124} &= 0, \\ X_{14} \cdot X_{123} - X_{13} \cdot X_{124} + X_{12} \cdot X_{134} &= 0. \end{aligned} \quad (101)$$

Эта система имеет пять независимых уравнений. Количество плюккеровых координат равно 14; переходя к неоднородным координатам, мы должны вычесть 3 (по 1 для каждого проективного пространства). Таким образом, имеем

$$\dim Fl_4 = 14 - 3 - 5 = 6,$$

как и должно быть. В общем случае количество независимых уравнений равно

$$N_{\text{eq}} = 2^n - 1 - \frac{n(n+1)}{2}.$$

Количество плюккеровых координат в общем случае равно $2^n - 2$.

Все аналогичные рассуждения можно выполнить, когда многообразие флагов реализуется как $SO(n, \mathbb{R})/S$, где подгруппа S группы $SO(n, \mathbb{R})$ состоит из диагональных матриц с матричными элементами ± 1 и $\det S = 1$.

Из (79) следует, что количество независимых интегралов равно $N_\psi = \dim Fl_n - (n-1) = 6 - 3 = 3$. Количество отношений спариваний равно 5, например $X_1 \cdot X_{234}/X_4 \cdot X_{123}$, $X_2 \cdot X_{134}/X_4 \cdot X_{123}$, $X_3 \cdot X_{124}/X_4 \cdot X_{123}$, $X_{12} \cdot X_{34}/X_{14} \cdot X_{23}$, $X_{13} \cdot X_{24}/X_{14} \cdot X_{23}$. Из (101) мы заключаем, что число уравнений для отношений спариваний равно 2. Поэтому мы можем выбрать независимые инварианты в необходимом количестве.

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Динамика на многообразии флагов

Объясним, почему в случае полной решетки Костанта–Тоды действие однопараметрических подгрупп, индуцированных изоспектральными интегралами движения, диагонализуется на флагах. Также мы рассмотрим случай полной симметричной системы Тоды и покажем отличие этого случая от первого.

Б.1. Случай полной решетки Костанта–Тоды. Рассмотрим полную решетку Костанта–Тоды. В этом случае матрица оператора Лакса имеет следующий вид:

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ x_{21} & x_{22} & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ x_{n-1,1} & \cdots & \cdots & x_{n-1,n-1} & 1 \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix}, \quad (102)$$

$$X = \epsilon + \beta_-, \quad X \in \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C}).$$

Оказывается, матрицы такого вида можно представить в виде следующего произведения [23]:

$$X = LCL^{-1},$$

где L – унитарная матрица, единственная для каждого X ,

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ s_n & s_{n-1} & \cdots & s_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad (103)$$

а s_i – коэффициенты характеристического полинома матрицы X :

$$\lambda^n - s_2 \lambda^{n-2} - \dots - s_n = 0.$$

В случае общего положения, когда все λ различны, можно продолжить разложение, в результате получим

$$X = LV\Lambda V^{-1}L^{-1}, \quad Z = LV, \quad (104)$$

где V – матрица Вандермонда, Λ – диагональная матрица собственных значений. Заметим, что и X , и Z принадлежат $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$, это важно для вычисления динамики на многообразии флагов. Каждая матрица Z^{-1} определяет флаг. Зафиксировав собственные значения λ , мы получим вложение орбиты X в многообразие флагов:

$$X \mapsto Z^{-1} \pmod{B_+}. \quad (105)$$

Вычислим динамику на пространстве флагов, индуцированную изоспектральными интегралами движения $(1/k) \operatorname{Tr} X^k$, $k \geq 2$:

$$\begin{aligned} X(t_k) &= Ad_{n_-(t_k)}^* X(0) = n_-^{-1}(t_k) X(0) n_-(t_k), \quad e^{t_k \nabla \frac{1}{k} \operatorname{Tr} X^k(0)} = n_-(t_k) b_+(t_k), \\ \nabla \frac{1}{k} \operatorname{Tr} X^k(0) &= X^{k-1}(0), \\ X(t_k) &= Z(t_k) \Lambda Z^{-1}(t_k), \quad Z^{-1}(t_k) = V^{-1} L^{-1} n_-(t_k) = Z^{-1}(0) n_-(t_k). \end{aligned} \quad (106)$$

Здесь была использована теорема о факторизации (подробности можно посмотреть в [24]), которая позволяет находить решения уравнений движения

$$X'(t) = [X(t), \Pi_{\mathcal{N}_-} X(t)], \quad \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C}) = \beta_+ + \mathcal{N}_-, \quad (107)$$

в виде

$$X(t) = Ad_{n_-(t)}^* X(0). \quad (108)$$

В результате мы получаем

$$\begin{aligned} Z^{-1}(t_k) \pmod{B_+} &= V^{-1} L^{-1} n(t_k) \pmod{B_+} = V^{-1} L^{-1} n(t_k) b_+(t_k) \pmod{B_+} = \\ &= V^{-1} L^{-1} e^{t_k X^{k-1}(0)} \pmod{B_+} = \\ &= V^{-1} L^{-1} e^{t_k (LV\Lambda V^{-1}L^{-1})^{k-1}} \pmod{B_+} = \\ &= V^{-1} L^{-1} e^{LV t_k \Lambda^{k-1} V^{-1} L^{-1}} \pmod{B_+} = \\ &= V^{-1} L^{-1} LV e^{t_k \Lambda^{k-1}} V^{-1} L^{-1} \pmod{B_+} = \\ &= e^{t_k \Lambda^{k-1}} V^{-1} L^{-1} \pmod{B_+} = e^{t_k \Lambda^{k-1}} Z^{-1}(0) \pmod{B_+}, \end{aligned} \quad (109)$$

где мы воспользовались свойством $e^{B \cdot A \cdot B^{-1}} = B \cdot e^A \cdot B^{-1}$. Заметим, что вместе все потоки генерируют действие торической подгруппы $(\mathbb{C}^*)^{n-1}$.

Б.2. Случай полной симметричной решетки Toda. Покажем, что мы не можем определить вложение из $L \in \text{Symm}$ в многообразие флагов, поэтому динамика на многообразии флагов не может быть диагонализирована:

$$L = \Psi \Lambda \Psi^{-1}, \quad \Psi \in SO(n, \mathbb{R}). \quad (110)$$

Матрица оператора Лакса определена с точностью до действия на Ψ диагональной подгруппы $SO(n, \mathbb{R})$, состоящей из матриц S с матричными элементами ± 1 и $\det S = 1$. Многообразие флагов есть $SO(n, \mathbb{R})/S$. Таким образом, каждая матрица Ψ^{-1} определяет флаг. Действие подгруппы S слева на Ψ^{-1} , которое следует из инвариантности Лакса при $\Psi \rightarrow \Psi S$, меняет само многообразие флагов (сами классы $SO(n, \mathbb{R})/S$), и мы не можем однозначно сопоставить матрице оператора Лакса определенный класс:

$$L = \Psi S \Lambda S^{-1} \Psi^{-1}, \quad S_1^{-1} \Psi_a^{-1} \pmod{S} \neq S_2^{-1} \Psi_a^{-1} \pmod{S}. \quad (111)$$

Получаем, что одной матрице Лакса L соответствуют несколько различных флагов.

Благодарности. Авторы благодарны Г. И. Шарыгину и Д. Штернхаймеру за плодотворные обсуждения и замечания. Работа А. С. Сорина была частично поддержана РФФИ (гранты № 11-02-01335_а, 13-02-91330-NNIO_а и 13-02-90602-Ar_а). Работа Ю. Б. Чернякова была частично поддержана РФФИ (грант № 12-02-00594) и Федеральным агентством по науке и инновациям Российской Федерации (контракт 14.740.11.0347).

Список литературы

- [1] H. Flaschka, *Phys. Rev. B*, **9**:4 (1974), 1924–1925.
- [2] M. Toda, *J. Phys. Soc. Japan*, **22**:2 (1967), 431–436.
- [3] M. Toda, *J. Phys. Soc. Japan*, **23**:3 (1967), 501–506.
- [4] M. H'енон, *Phys. Rev. B*, **9**:4 (1974), 1921–1923.
- [5] H. Flaschka, *Prog. Theor. Phys.*, **51**:3 (1974), 703–716.
- [6] А. А. Архангельский, *Матем. сб.*, **108(150)**:1 (1979), 134–142.
- [7] M. Adler, *Invent. Math.*, **50**:3 (1979), 219–248.
- [8] B. Kostant, *Adv. Math.*, **34**:3 (1979), 195–338.
- [9] W. W. Symes, *Invent. Math.*, **59**:1 (1980), 13–51.
- [10] P. Deift, L. C. Li, T. Nanda, C. Tomei, *Commun. Pure Appl. Math.*, **39**:2 (1986), 183–232.
- [11] P. Fré, A. S. Sorin, *Nucl. Phys. B*, **815**:3 (2009), 430–494, arXiv:0710.1059.
- [12] N. Ercolani, H. Flaschka, S. Singer, “The geometry of the full Kostant–Toda lattice”, *Integrable Systems* (Luminy, France, July 1–5, 1991), *Progress in Mathematics*, **115**, eds. V. Balabon, P. Cartier, Y. Kosmann-Schwarzbach, Birkhäuser, Boston, MA, 1993, 181–225.
- [13] D. Talalaev, *Quantum generic Toda system*, arXiv:1012.3296.
- [14] A. M. Bloch, M. I. Gekhtman, *J. Geom. Phys.*, **27**:3–4 (1998), 230–248.
- [15] M. Gekhtman, M. Shapiro, *Commun. Pure Appl. Math.*, **52**:1 (1999), 53–84.
- [16] A. M. Bloch, M. Gekhtman, *J. Comput. Appl. Math.*, **202**:1 (2007), 3–25.
- [17] Н. Н. Хехоросев, *Тр. ММО*, **26**, 1972, 181–198.
- [18] B. A. Shipman, *Pacific J. Math.*, **181**:1 (1997), 159–185.
- [19] B. A. Shipman, *J. Geom. Phys.*, **33**:3–4 (2000), 295–325.

- [20] W. Fulton, *Young Tableaux. With Applications to Representation Theory and Geometry*, London Mathematical Society Student Texts, **35**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1977.
- [21] Yu. B. Chernyakov, G. I. Sharygin, A. S. Sorin, *Commun. Math. Phys.*, **330**:1 (2014), 367–399, arXiv: 1212.4803.
- [22] Yu. B. Chernyakov, A. S. Sorin, *Lett. Math. Phys.*, **104**:8 (2014), 1045–1052, arXiv: 1306.1647.
- [23] B. M. Kostant, *Invent. Math.*, **48**:2 (1978), 101–184.
- [24] Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев, *Гамильтонов подход в теории солитонов*, Наука, М., 1986.

Поступила в редакцию 19.08.2014