Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. М. Журавлев, Принцип суперпозиции и точные решения уравнения нелинейной диффузии, *ТМФ*, 2015, том 183, номер 1, 36–50

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8781>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.89.56.158

26 апреля 2023 г., 12:53:27

© 2015 г.

В. М. Журавлев*

ПРИНЦИП СУПЕРПОЗИЦИИ И ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИФФУЗИИ

Излагается метод построения точных решений уравнений нелинейной диффузии в одномерном координатном пространстве на основе использования специального принципа суперпозиции. В качестве уравнения нелинейной диффузии рассматриваются уравнения вида $n_t - (\ln n)_{xx} + \mu n + \gamma n^2 - g = 0$, играющие важную роль в задаче о формировании регулярных структур в нелинейных средах под действием внешних источников излучения. Метод основан на использовании дифференциальных свойств полиномов от функциональных параметров. Приводятся конкретные решения и анализируются некоторые их общие свойства.

Ключевые слова: уравнения нелинейной диффузии, точные решения, принцип суперпозиции, регулярные структуры.

DOI: 10.4213/tmf8781

1. ВВЕДЕНИЕ

Формирование регулярных структур в различных веществах под действием внешних потоков излучения является одной из актуальных задач современной теории конденсированных сред. Один из способов объяснения возникающих регулярных структур опирается на предположение, что основную роль в их формировании играет нелинейная диффузия, т. е. зависимость коэффициента диффузии от концентрации диффундирующей примеси. В данном подходе функциональная зависимость коэффициента диффузии предполагается такой, что увеличение концентрации дефектов уменьшает скорость их диффузии. Это и приводит к формированию больших концентраций примеси. Такого рода модели исследовались ранее в связи с задачами распространения тепла в средах с нелинейными коэффициентами теплопроводности [1], [2].

Для появления регулярных структур в этом случае необходимо также наличие каких-либо законов сохранения или симметрий в среде. С математической точки

*Научно-исследовательский технологический институт им. С. П. Капицы, Ульяновский государственный университет, Ульяновск, Россия. E-mail: zhvictorm@gmail.com

зрения особыми свойствами обладает коэффициент диффузии вида

$$D = \frac{\mathcal{D}_0}{n + n_s}, \quad (1)$$

где $\mathcal{D}_0$ и n_s – некоторые функции времени, n – концентрация изучаемых дефектов, изменяющаяся в пространстве и времени. Этот коэффициент диффузии отвечает требованию уменьшения скорости диффузии при увеличении концентрации, с другой стороны, уравнения диффузии с таким коэффициентом обладают специфическими симметричными свойствами. Уравнения теплопроводности или диффузии с таким коэффициентом диффузии исследовались, например, в работах [3]–[5]. В этих работах было показано, что существуют обширный класс точных решений и специфический нелинейный принцип суперпозиции [5]–[7]. Поэтому при построении моделей процессов, приводящих к образованию регулярных структур в твердых телах, модели с коэффициентом диффузии (1) могут представлять особый интерес.

В работах [3]–[5] исследования проводились для уравнений диффузии или теплопроводности с коэффициентом (1) в двумерном координатном пространстве. Однако для ряда прикладных задач необходимо построение точных решений такого типа уравнений в одномерном и трехмерном координатных пространствах. В связи с этим в настоящей работе рассматривается задача нахождения точных решений уравнений нелинейной диффузии с коэффициентом (1) в случае одномерного координатного пространства, но с нелинейным источником в правой части в форме квадратичной функции концентрации. По аналогии с работой [5] для построения точных решений применяется нелинейный принцип суперпозиции в расширенной по сравнению со статьей [5] форме. Это позволяет применить метод и в случае изменяющихся со временем коэффициентов нелинейного источника.

2. УРАВНЕНИЕ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИФФУЗИИ

Используя коэффициент диффузии (1), рассмотрим одномерное уравнение нелинейной диффузии в следующем виде:

$$\frac{\partial n_0}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\mathcal{D}_0}{n_0 + n_s} \frac{\partial n_0}{\partial x} \right) - p(t)n_0 - r(t)n_0^2 + I(t). \quad (2)$$

Здесь $n_0(x, t)$ – концентрация диффундирующей примеси или дефектов, t – время, x – координата, вдоль которой происходит диффузия. Источник в правой части этого уравнения описывает процессы возникновения и поглощения примеси или дефектов в зависимости от их локальной концентрации. Квадратичное по n_0 слагаемое в этом источнике обычно связывают с саморекомбинацией дефектов или примеси, а слагаемое с первой степенью n_0 отвечает за “диссипацию” за счет, например, самораспада или ухода за границы среды. Коэффициенты $p(t)$ и $r(t)$ этого уравнения будем в общем случае полагать функциями времени t . Функция $I(t)$ в правой части описывает внешний источник примеси или дефектов, например, за счет равномерного облучения среды. Такой тип источника является общим для многих задач формирования волн и структур в нелинейных средах с диффузией.

Вводя функцию $n = n_0 + n_s$ и полагая $n_s = n_s(t)$, преобразуем уравнение (2) к виду

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\mathcal{D}_0}{n} \frac{\partial n}{\partial x} \right) - \mu(t)n - \gamma(t)n^2 + g(t). \quad (3)$$

Здесь

$$\mu(t) = p(t) - 2\gamma(t)n_s, \quad g(t) = I(t) + \dot{n}_s + p(t)n_s - \gamma(t)n_s^2, \quad \gamma(t) = r(t).$$

На первом этапе построения простых точных решений мы ограничимся случаем $g = 0$. Это ограничение связано с тем, что при этом условии существуют простейшие решения. На основе этих решений в настоящей работе построены более сложные суперпозиционные решения, с помощью которых рассмотрен вопрос о существовании решений с $g(t) \neq 0$ в правой части.

3. ПРОСТЫЕ ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ ПРИ $g = 0$

Наличие простых решений для уравнения нелинейной диффузии в двумерном координатном пространстве было показано в работе [5]. Однако в отличие от работы [5] здесь мы рассмотрим одномерный вариант уравнения нелинейной диффузии, но с более сложным нелинейным источником, содержащим квадратичную нелинейность с переменными во времени коэффициентами.

По аналогии с работой [5] введем вспомогательную функцию $\Phi = 1/n$, в результате чего уравнение (3) запишется как

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{\Phi} + \mathcal{D}_0 \frac{\partial^2 \ln \Phi}{\partial x^2} + \frac{\mu(t)}{\Phi} + \frac{\gamma(t)}{\Phi^2} = 0. \quad (4)$$

Его можно привести к виду

$$-\Phi_t + \mathcal{D}_0(\Phi\Phi_{xx} - (\Phi_x)^2) + \mu\Phi + \gamma = 0. \quad (5)$$

Будем искать решение этого уравнения в виде

$$\Phi = A(t) + B(t)e^{kx} + C(t)e^{-kx}, \quad (6)$$

где $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ – функции времени, для которых необходимо получить уравнения и решить их, а k – произвольный, вообще говоря, комплексный, параметр. Подставляя (6) в (5), находим уравнения для функций A , B , C :

$$\begin{aligned} \dot{A} &= 4k^2\mathcal{D}_0BC + \mu(t)A + \gamma(t), \\ \dot{B} &= 4k^2\mathcal{D}_0AB + \mu(t)B, \\ \dot{C} &= 4k^2\mathcal{D}_0AC + \mu(t)C. \end{aligned} \quad (7)$$

Введем обозначение $\dot{\chi} = 4k^2\mathcal{D}_0A + \mu$. Тогда уравнение для χ можно записать в такой форме:

$$\ddot{\chi} = 16k^4\mathcal{D}_0^2B_0C_0e^{2\chi} + (\dot{\chi} - \mu(t))\mu(t) + \gamma(t)4k^2D_1 + \dot{\mu}.$$

Решения уравнений для A , B и C имеют вид

$$A = \frac{1}{4k^2\mathcal{D}_0}(\dot{\chi} - \mu(t)), \quad B = B_0 e^\chi, \quad C = C_0 e^\chi.$$

Сделаем преобразование $\chi(t) = \Theta(t) + (1/2) \ln |B_0 C_0|$. Тогда для функции Θ уравнение примет вид

$$\ddot{\Theta} = 16k^4 \mathcal{D}_0^2 \varepsilon e^{2\Theta} + (\dot{\Theta} - \mu)\mu + \gamma 4k^2 \mathcal{D}_0 + \dot{\mu}, \quad (8)$$

где $\varepsilon = \text{sgn}(B_0 C_0)$; тогда можно записать

$$A = \frac{1}{4k^2\mathcal{D}_0}(\dot{\Theta} - \mu), \quad B = \varepsilon_1 Q_0 e^\Theta, \quad C = \varepsilon_2 \frac{1}{Q_0} e^\Theta, \quad (9)$$

где

$$Q_0 = \sqrt{\frac{|B_0|}{|C_0|}}, \quad \varepsilon_1 = \text{sgn } B_0, \quad \varepsilon_2 = \text{sgn } C_0.$$

Кроме решений вида (6), существуют и решения $\Phi(x, t)$, квадратичные по координате x . Эти решения можно представить в виде

$$\Phi(x, t) = A_1(t) + B_1(t)x + C_1(t)x^2.$$

Уравнения для коэффициентов A_1, B_1, C_1 в этом случае записываются как

$$\begin{aligned} \dot{A}_1 &= 2\mathcal{D}_0 C_1 A_1 + \mu(t)A - \mathcal{D}_0 B_1^2 + \gamma(t), \\ \dot{B}_1 &= (-2\mathcal{D}_0 C_1 + \mu(t))B_1, \\ \dot{C}_1 &= (-2\mathcal{D}_0 C_1 + \mu(t))C_1. \end{aligned} \quad (10)$$

Решение двух последних уравнений таково:

$$B_1 = \frac{B_0}{\chi(t)} \exp\left\{\int \mu(t) dt\right\}, \quad C_1 = \frac{1}{2\mathcal{D}_0} \frac{d \ln \chi(t)}{dt},$$

где

$$\chi(t) = \chi_1 \int^t \exp\left\{\int^{t'} \mu(t'') dt''\right\} dt' + \chi_0, \quad (11)$$

а χ_0, χ_1 – постоянные интегрирования. Линейное уравнение относительно $A(t)$ решается при этом без труда.

Таким образом, уравнения (4) и (5) имеют точные решения

$$\Phi = \frac{1}{4k^2\mathcal{D}_0}(\dot{\Theta} - \mu(t)) + A_0 e^{\Theta+kx} + \varepsilon \frac{1}{A_0} e^{\Theta-kx}, \quad (12)$$

$$\Phi = A_1(t) + B_1(t)x + C_1(t)x^2, \quad (13)$$

где $k, \mathcal{D}_0$ – произвольные постоянные, $\varepsilon = \{\pm 1, 0\}$, $A_0 = \varepsilon_1 Q_0$, при условии, что $\Theta(t)$ является решением уравнения (8), а функции A_1, B_1, C_1 – решения уравнений (10).

Соответствующие решения уравнения (2) имеют вид

$$n = \frac{4k^2 \mathcal{D}_0}{(\dot{\Theta} - \mu(t)) + \varepsilon_1 4k^2 \mathcal{D}_0 e^{\Theta(t)} (e^{k(x-x_0)} + \varepsilon e^{-k(x-x_0)})},$$

где $x_0 = -\ln |A_0|$, и

$$n = \frac{1}{A_1(t) + B_1(t)x + C_1(t)x^2};$$

при вещественных значениях k функция n удовлетворяет граничному условию $n \rightarrow 0$ при $|x| \rightarrow \infty$. В случае чисто мнимых значений $k = iq$ и условии $C_0 = B_0^*$ решения для Φ и n будут вещественными периодическими решениями по x :

$$\begin{aligned} \Phi &= -\frac{1}{4q^2 \mathcal{D}_0} (\dot{\Theta} - \mu) + |B_0| e^{\Theta} \cos(qx + \varphi), \\ n &= \frac{4q^2 \mathcal{D}_0}{(\mu(t) - \dot{\Theta}) + 4q^2 \mathcal{D}_0 |B_0| e^{\Theta} \cos(qx + \varphi)}, \end{aligned}$$

где $\varphi = \arg B_0$.

Отметим, что в случае $C_0 = 0$ (или $B_0 = 0$) последнее уравнение становится линейным

$$\ddot{\Theta} = (\dot{\Theta} - \mu(t))\mu(t) + \gamma(t)4k^2 \mathcal{D}_0 + \dot{\mu}.$$

В этом случае решение для Φ будет иметь такой вид:

$$\Phi = \frac{1}{4k^2 \mathcal{D}_0} (\dot{\Theta} - \mu) + B_0 e^{\Theta + kx}. \quad (14)$$

Для полиномиальных решений имеются две аналогичные редукции. При $\chi_1 = 0$ в (11) имеем $C_1(t) \equiv 0$, и соответствующим образом упрощаются уравнения для $A_1(t)$, $B_1(t)$. При этом

$$\Phi = A_1(t) + B_0 e^{\Omega(t)} x, \quad \Omega(t) = \int_0^t \mu(t') dt'. \quad (15)$$

При $B_0 = 0$ имеем $B(t) \equiv 0$ и $\Phi = A_1(t) + C_1(t)x^2$.

4. НЕЛИНЕЙНЫЙ ПРИНЦИП СУПЕРПОЗИЦИИ

Для построения более общих решений уравнения (5) и уравнения (4) с $g = 0$ воспользуемся методом, предложенным в работе [5], который опирается на свойство уравнения нелинейной диффузии – специальный принцип суперпозиции.

Для формулировки принципа суперпозиции введем некоторые обозначения. Обозначим через z_k , $k = 1, \dots, N$, корни полинома

$$U_N(z) = z^N + \sum_{k=0}^{N-1} p_k z^k = \prod_{j=1}^N (z - z_j).$$

Для сокращения записи также введем обозначение $\mathbf{z} = \{z_1, z_2, \dots, z_N\}$. Согласно теореме Виета коэффициенты p_k полинома $U_N(z)$ являются функциями его корней,

это мы будем записывать как $p_k = (-1)^{N-k} P_k(\mathbf{z})$, где

$$P_0(\mathbf{z}) = \prod_{j=1}^N z_j, \quad P_1(\mathbf{z}) = \sum_{i=1}^N \prod_{\substack{1 \leq j \leq N, \\ j \neq i}} z_j, \quad \dots, \quad P_{N-1}(\mathbf{z}) = \sum_{i=1}^N z_i, \quad P_N = 1.$$

Обратим внимание на существование тождеств

$$P_k(z - z_1, \dots, z - z_N) = \frac{1}{k!} \frac{\partial^k}{\partial z^k} P_0(z - z_1, \dots, z - z_N),$$

$$p_k = P_k(z - z_1, \dots, z - z_N) \Big|_{z=0}, \quad k = 1, \dots, N-1.$$

Рассмотрим совокупности решений (14) и (15)

$$\Phi_i = \frac{1}{4k^2 \mathcal{D}_0} (\dot{\Theta} - \mu) + B_i e^{\Theta + kx}, \quad (16)$$

$$\Phi_i = A(t) + B_i x e^{\Omega(t)}, \quad i = 1, \dots, N, \quad (17)$$

отличающихся лишь числовыми значениями параметров B_i . Для унификации вычислений функция $A_1(t)$ в решениях типа (15) обозначена как $A(t)$. Введем обозначения для решений (16)

$$Z(x, t) = A(t) e^{-\Theta} e^{-kx}, \quad z_i = -B_i$$

и обозначения для решений (17)

$$Z(x, t) = \frac{A(t)}{x} e^{-\Omega}, \quad z_i = -B_i.$$

Тогда в обоих случаях

$$\Phi_i = \frac{A}{Z} (Z - z_i), \quad i = 1, \dots, N.$$

Для сокращения записи положим $\mathbf{Z} = \{Z - z_1, \dots, Z - z_N\}$. Тогда имеют место следующие тождества:

$$P_j(\Phi_1, \dots, \Phi_N) = \left(\frac{A}{Z} \right)^{N-j} P_j(\mathbf{Z}), \quad (18)$$

$$P_j(\Phi_1, \dots, \Phi_N) = \left(\frac{A}{Z} \right)^{N-j} \frac{1}{j!} \frac{\partial^j}{\partial Z^j} P_0(\mathbf{Z}), \quad j = 0, \dots, N-1. \quad (19)$$

Производные по x и $Z(x, t)$ для любой функции $F(Z)$ связаны следующими простыми соотношениями:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} F(Z) &= \frac{\partial Z}{\partial x} \frac{\partial}{\partial Z} F(Z) = -kZ \frac{\partial}{\partial Z} F(Z), \\ \frac{\partial}{\partial x} F(Z) &= \frac{\partial Z}{\partial x} \frac{\partial}{\partial Z} F(Z) = -\frac{Z^2}{A} \frac{\partial}{\partial Z} F(Z). \end{aligned} \quad (20)$$

Поскольку дальнейшие построения аналогичны как для решений (16), так и для решений (17), будем проводить вычисления только для случая (16). Решения типа (17) могут быть использованы аналогичным образом.

Используя соотношения для полиномов $P_k(\mathbf{Z})$, можно записать равенства

$$\begin{aligned} u_N &= \sum_{k=1}^N \frac{1}{\Phi_k} = \frac{P_1(\Phi_1(x, t), \dots, \Phi_N(x, t))}{P_0(\Phi_1(x, t), \dots, \Phi_N(x, t))} = \frac{Z}{A} \frac{P_1(\mathbf{Z})}{P_0(\mathbf{Z})} = \\ &= \frac{Z}{A} \frac{\partial}{\partial Z} \ln P_0(\mathbf{Z}) = -\frac{1}{Ak} \frac{\partial}{\partial x} \ln P_0(\mathbf{Z}), \\ \sum_{i=1}^N \frac{1}{\Phi_i^2} &= \frac{P_1^2(\Phi_1, \dots, \Phi_N)}{P_0^2(\Phi_1, \dots, \Phi_N)} - 2 \frac{P_2(\Phi_1, \dots, \Phi_N)}{P_0(\Phi_1, \dots, \Phi_N)} = \\ &= -\frac{Z^2}{A^2} \frac{\partial^2 \ln P_0(\mathbf{Z})}{\partial Z^2} = -\frac{1}{A} \left(Z \frac{\partial u_N}{\partial Z} - u_N \right) = \frac{1}{Ak} \frac{\partial u_N}{\partial x} + \frac{1}{A} u_N. \end{aligned} \quad (21)$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Пусть $\Phi_i(x, t)$, $i = 1, \dots, N$, – совокупность точных решений уравнения (5) вида (16). Тогда функция u_N , определенная соотношениями (21), при произвольных функциях $\mathcal{D}_0(t)$, $\mu(t)$ и $\gamma(t)$, а также при произвольных значениях параметров $z_i = -B_i$, k и произвольном N удовлетворяет уравнению первого порядка

$$\frac{\partial u_N}{\partial t} - \left(kA\mathcal{D}_0 - \frac{\gamma}{Ak} \right) \frac{\partial u_N}{\partial x} + \left(\mu + \frac{\gamma}{A} \right) u_N = 0, \quad (22)$$

где функция $A(t)$ определена соотношением (9).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть Φ_i – совокупность решений (16), т. е. выполнены тождества

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{\Phi_i} + \mathcal{D}_0 \frac{\partial^2 \ln \Phi_i}{\partial x^2} + \frac{\mu(t)}{\Phi_i} + \frac{\gamma(t)}{\Phi_i^2} = 0, \quad i = 1, \dots, N.$$

Суммируя все эти тождества, получаем, что

$$\frac{\partial}{\partial t} \sum_{i=1}^N \frac{1}{\Phi_i} + \mathcal{D}_0 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln \prod_{i=1}^N \Phi_i + \mu(t) \sum_{i=1}^N \frac{1}{\Phi_i} + \gamma(t) \sum_{i=1}^N \frac{1}{\Phi_i^2} = 0.$$

Используя определение функции u_N из (21), последнее уравнение приводим к следующему виду:

$$\frac{\partial u_N}{\partial t} + \mathcal{D}_0 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln P_0(\Phi_1, \dots, \Phi_N) + \mu(t) u_N + \gamma(t) \sum_{i=1}^N \frac{1}{\Phi_i^2} = 0. \quad (23)$$

Воспользуемся теперь равенствами (20) и вторым тождеством из (21). Тогда уравнение (23) можно записать как

$$\frac{\partial u_N}{\partial t} + \mathcal{D}_0 k^2 A Z \frac{\partial}{\partial Z} \left(\frac{Z}{A} \frac{\partial}{\partial Z} \ln P_0(\mathbf{Z}) \right) + \mu(t) u_N + \frac{\gamma(t)}{A} \left(\frac{1}{k} \frac{\partial u_N}{\partial x} + u_N \right) = 0.$$

Возвращаясь теперь к производным по x с помощью (20), приходим окончательно к уравнению (22). Утверждение доказано.

Доказанное утверждение указывает на то, что решения самого исходного уравнения (4), имеющие вид суперпозиционного решения Φ_s , можно построить, если специальным образом вычислять числа B_i .

5. ОБОБЩЕННЫЕ ПОЛИНОМИАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ

Исследуем теперь вопрос о выводе уравнений, которым удовлетворяют суперпозиции решений (12) общего вида. Пусть Φ_i – совокупность решений вида (12), которые мы запишем как

$$\Psi_i(x, t) = B(t)(T(t) + \tau_i(x)), \quad i = 1, \dots, N. \quad (24)$$

Здесь

$$\begin{aligned} B(t) &= e^{\Theta(t)}, & T(t) &= \frac{1}{4\mathcal{D}_0 k^2} (\dot{\Theta} - \mu) e^{-\Theta}, \\ \tau_i(x) &= B_i e^{-kx} + \varepsilon_i \frac{1}{B_i} e^{kx}, & \varepsilon_i &= \pm 1. \end{aligned} \quad (25)$$

Аналогичным образом можно исследовать и полиномиальные решения общего вида (13). Однако мы найдем только решения (12). Из определений (25) следует, что

$$\frac{\partial}{\partial t} F(T) = \frac{\partial T}{\partial t} \frac{\partial}{\partial T} F(T) = \dot{T} \frac{\partial}{\partial T} F(T).$$

Для полиномов по T выполняются свойства, аналогичные (18) и (19):

$$\begin{aligned} P_j(\Psi_1, \dots, \Psi_N) &= B^{N-j}(t) P_j(\mathbf{T}), \\ P_j(\Psi_1, \dots, \Psi_N) &= B^{N-j} \frac{1}{j!} \frac{\partial^j}{\partial T^j} P_0(\mathbf{T}), \quad j = 0, \dots, N-1, \end{aligned}$$

где введено обозначение $\mathbf{T} = \{T - \tau_1, \dots, T - \tau_N\}$.

По аналогии с предыдущим анализом рассмотрим систему тождеств

$$\begin{aligned} v_N &= \sum_{i=1}^N \frac{1}{\Psi_i} = \frac{P_1(\Psi_1, \dots, \Psi_N)}{P_0(\Psi_1, \dots, \Psi_N)} = \\ &= \frac{1}{B} \frac{\partial \ln P_0(\mathbf{T})}{\partial T} = \frac{1}{B\dot{T}} \frac{\partial}{\partial t} \ln P_0(\mathbf{T}), \\ \sum_{i=1}^N \frac{1}{\Psi_i^2} &= \frac{P_1^2(\Psi_1, \dots, \Psi_N)}{P_0^2(\Psi_1, \dots, \Psi_N)} - 2 \frac{P_2(\Psi_1, \dots, \Psi_N)}{P_0(\Psi_1, \dots, \Psi_N)} = \\ &= -\frac{1}{B^2} \frac{\partial^2}{\partial T^2} \ln P_0(\mathbf{T}) = -\frac{1}{B\dot{T}} \frac{\partial v_N}{\partial t} - \frac{\dot{B}}{\dot{T} B^2} v_N. \end{aligned} \quad (26)$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Пусть $\Phi_i(x, t)$, $i = 1, \dots, N$, – совокупность точных решений уравнения (5) вида (24). Тогда функция v_N , определенная соотношениями (26), при произвольных функциях $\mu(t)$ и $\gamma(t)$, а также при произвольных значениях параметров B_i и k и произвольном N удовлетворяет уравнению второго порядка

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\left(1 - \frac{\gamma}{B\dot{T}} \right) \frac{\partial v_N}{\partial t} \right] + \mathcal{D}_0 B \dot{T} \frac{\partial^2 v_N}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial t} \left[\left(\mu - \frac{\gamma \dot{B}}{\dot{T} B^2} \right) v_N \right] = 0, \quad (27)$$

где функции $B(t)$ и $T(t)$ определены соотношениями (25).

Доказательство строится аналогично доказательству утверждения 1. Используя соотношения (26), как и при доказательстве утверждения 1, получаем уравнение

$$\left(1 - \frac{\gamma}{B\dot{T}}\right) \frac{\partial v_N}{\partial t} + \mathcal{D}_0 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln P_0(\mathbf{T}) + \left(\mu - \frac{\gamma \dot{B}}{\dot{T} B^2}\right) v_N = 0.$$

Дифференцируя его по t , приходим к неавтономному уравнению второго порядка (22), содержащему в качестве неизвестной только v_N , что и доказывает утверждение.

Полученный результат интересен с точки зрения его использования для построения решений уравнений телеграфного типа, каким является (27) при определенном выборе знака коэффициентов. Важно отметить, что любая суперпозиция v_N простых решений Ψ_i удовлетворяет данному уравнению. Это дает альтернативный способ нахождения решений таких уравнений с помощью рядов или произведений.

6. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ К СТАНДАРТНОЙ ФОРМЕ

Рассмотрим теперь вопрос о применимости суперпозиционных решений u_N для вычисления решений исходного уравнения нелинейной диффузии (3). Рассмотрим функции

$$\begin{aligned} S(x, t) &= a(t) (P_1(\Phi_1, \dots, \Phi_N) + b(x, t) P_0(\Phi_1, \dots, \Phi_N)) = a(t) \frac{A^N}{Z^N} \sigma(Z, t), \\ \sigma(Z, t) &= \frac{Z}{A} P_1(\mathbf{Z}) + b(x, t) P_0(\mathbf{Z}), \quad F(x, t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln S. \end{aligned} \quad (28)$$

Функция $a(t)$ может быть любой дифференцируемой функцией времени, а функцию $b(x, t)$ мы выберем далее. Используя тождества (18) и (19), находим

$$F(x, t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln S(x, t) = k^2 Z \frac{\partial}{\partial Z} \left(Z \frac{\partial}{\partial Z} \ln \sigma(Z, t) \right). \quad (29)$$

Имеют место два тождества, одно из которых получается следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} u_N &= -\frac{1}{Ak} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln \frac{P_0(\mathbf{Z})}{a(t) Z P_1(\mathbf{Z}) A^{-1}(t) + a(t) b(x, t) P_0(\mathbf{Z})} - \frac{F(x, t)}{Ak} = \\ &= \frac{1}{Ak} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln \left(a(t) \frac{Z P_1(\mathbf{Z})}{A P_0(\mathbf{Z})} + a(t) b(x, t) \right) - \frac{F(x, t)}{Ak} = \\ &= \frac{1}{Ak} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln w_N - \frac{F(x, t)}{Ak}, \end{aligned} \quad (30)$$

где $w_N = a(u_N + b)$. Второе тождество

$$u_N = \frac{1}{Ak} \frac{\partial}{\partial x} \ln w_N - \frac{J(x, t)}{Ak} + \frac{N}{A} \quad (31)$$

получается аналогичным способом. Здесь

$$J(x, t) = \frac{\partial \ln S}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \ln \sigma(Z, t) - Nk.$$

Тождество (31) можно, используя (30), переписать так:

$$\begin{aligned} a \frac{\partial u_N}{\partial x} &= \frac{a}{Ak} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln w_N - \frac{aF}{Ak} = \\ &= Ak \left(u_N + \frac{J(x, t)}{Ak} - \frac{N}{A} \right) w_N - \frac{\partial a}{\partial x} u_N - a \frac{\partial b}{\partial x}. \end{aligned} \quad (32)$$

Теперь, используя только тождество (30), приведем уравнение (22) к нужной форме (2) без квадратичной нелинейности:

$$\frac{\partial u_N}{\partial t} - \left(\mathcal{D}_0 - \frac{\gamma}{A^2 k^2} \right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln w_N + \left(\mu + \frac{\gamma}{A} \right) u_N + \left(\mathcal{D}_0 - \frac{\gamma}{A^2 k^2} \right) F = 0; \quad (33)$$

используя еще и тождество (32), это уравнение можно привести к более общему виду

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_N}{\partial t} - \left(\mathcal{D}_0 - \frac{\gamma}{A^2 k^2} - \frac{Ga}{Ak} \right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln w_N + \left(\mu + \frac{\gamma}{A} \right) u_N - \\ - G \left[Ak \left(u_N + \frac{J(x, t)}{Ak} - \frac{N}{A} \right) w_N - \frac{\partial a}{\partial x} u_N \right] + \\ + Ga \frac{\partial b}{\partial x} + \left(\mathcal{D}_0 - \frac{\gamma}{A^2 k^2} - \frac{Ga}{Ak} \right) F = 0, \end{aligned} \quad (34)$$

где $G = G(x, t)$ – произвольная функция координат и времени.

Предполагая, что функция $a = a(t)$ является только функцией времени, в уравнении (33) удобно сделать подстановку $u_N = (w_N - b)/a$ и ввести новую переменную времени τ такую, что $d\tau = a(t)\mathcal{D} dt$. Здесь

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}_0 - \frac{\gamma}{A^2 k^2}.$$

В этом случае уравнение (33) приобретет вид уравнения (3):

$$\frac{\partial w_N}{\partial \tau} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln w_N + m(t)w_N + g = 0, \quad (35)$$

где

$$\begin{aligned} m(t) &= \frac{a(A\mu + \gamma) - A\dot{a}}{a^2 \mathcal{D} A}, \quad g(x, t) = -\frac{1}{\mathcal{D}} Q(x, t) + F(x, t), \\ Q(x, t) &= \frac{\partial b}{\partial t} + \left(\mu + \frac{\gamma}{A} \right) b. \end{aligned} \quad (36)$$

Аналогично преобразуется уравнение (34) с помощью подстановки $u_N = w_N/a - b$ и новой переменной τ такой, что $d\tau = a(t)\mathcal{D}_G(t) dt$, где

$$\mathcal{D}_G = \mathcal{D}_0 - \frac{\gamma}{A^2 k^2} - \frac{Ga}{Ak}.$$

Полагая $G = G(t)$ и $a = a(t)$, имеем

$$\frac{\partial w_N}{\partial \tau} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln w_N + m_1(x, t)w_N + \gamma_1(t)w_N^2 + g(x, t) = 0. \quad (37)$$

Здесь

$$\begin{aligned} m_1(t, x) &= \frac{1}{a^2 \mathcal{D}_G} \left[-\frac{da}{dt} + \left(\mu + \frac{\gamma}{A} \right) a - Ga^2 kN - GY(x, t) \right], \\ \gamma_1(t) &= -\frac{GAk}{a \mathcal{D}_G}, \quad g(x, t) = -\frac{1}{\mathcal{D}_G} \left(Q(x, t) - \mathcal{D}_G F(x, t) - G(t) \frac{\partial b}{\partial x} \right), \\ Y(x, t) &= Ak \left(b(x, t)a - a^2 \frac{J(x, t)}{Ak} \right). \end{aligned} \quad (38)$$

Таким образом, в случае $a = a(t)$ и $G = G(t)$ при произвольных функциях времени $\mu(t)$, $\gamma(t)$, $\mathcal{D}_0(t)$ и произвольной функции $b(x, t)$ функция $w_N = a(u_N + b)$, где u_N определено в (21), удовлетворяет уравнениям нелинейной диффузии (33) и (34).

7. УСЛОВИЯ КОМПЛЕМЕНТАРНОСТИ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Под *условием комплементарности* совокупности решений Φ_i , $i = 1, \dots, N$, уравнения (4) будем понимать такой выбор коэффициентов этих функций, а также вспомогательных функций $a(t)$ и $b(Z, t)$, фигурирующих в определении функций $F(x, t)$ и $S(x, t)$, при которых уравнения (35) или (37) сводятся к исходному уравнению (3) с коэффициентами, являющимися функциями заданного вида, которые зависят только от переменной t .

Чтобы найти условия комплементарности, рассмотрим в качестве $b(x, t)$ функцию

$$b(x, t) = \beta(Z)A^{-1}(t), \quad (39)$$

где $\beta(Z)$ – аналитическая по Z функция. В результате функция $\sigma(Z, t)$, заданная в (28), примет следующий вид:

$$\sigma(Z, t) = \frac{1}{A(t)} \xi(Z), \quad \xi(Z) = ZP'_0(Z) + \beta(Z)P_0(Z).$$

Используя эти соотношения, вычислим функцию $g(x, t)$ в уравнении (35). Согласно (29) имеем

$$F(x, t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln S = k^2 Z \frac{\partial}{\partial Z} \left(Z \frac{\partial \ln \xi(Z)}{\partial Z} \right).$$

Далее,

$$Q(x, t) = \left[\frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{A} + \left(\mu + \frac{\gamma}{A} \right) \frac{1}{A} \right] \beta(Z) + \frac{1}{A} \frac{\partial \beta(Z)}{\partial t} = \frac{R}{A} Z \frac{\partial \beta}{\partial Z}.$$

Здесь $R(t) = \dot{A}/A - \dot{\Theta}$ и было использовано уравнение (7) для A . Подставляя полученные соотношения для $F(x, t)$ и $Q(x, t)$ в выражение (36) для функции $g(x, t)$, находим

$$g(x, t) = -\frac{R}{\mathcal{D}A} Z \frac{\partial \beta}{\partial Z} + k^2 Z \frac{\partial}{\partial Z} \left(Z \frac{\partial \ln \xi(Z)}{\partial Z} \right).$$

Полагая

$$\frac{R}{\mathcal{D}A} = \lambda. \quad (40)$$

выводим общее уравнение, связывающее функции $\beta(Z)$ и $P_0(\mathbf{Z})$, при котором функция $g(x, t)$ является некоторой вещественной постоянной g_0 :

$$g_0 = -\lambda Z \frac{\partial \beta}{\partial Z} + k^2 Z \frac{\partial}{\partial Z} \left(Z \frac{\partial \ln \xi(Z)}{\partial Z} \right). \quad (41)$$

Интегрируя это уравнение один раз по Z , приходим к уравнению

$$g_1 + g_0 \ln Z = -\lambda \beta(Z) + k^2 Z \frac{\partial \ln \xi(Z)}{\partial Z}, \quad (42)$$

которое и представляет собой общее условие комплементарности функций Φ_i , входящих в суперпозицию u_N , определенную соотношениями (21). В (42) g_1 – постоянная интегрирования.

Результат можно сформулировать в виде утверждения.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. *Если выполнены условия (40) и (42), то функция*

$$w_\beta(x, t) = -\frac{a(t)}{A(t)} \left[\frac{1}{k} \left(\frac{\partial}{\partial x} \ln P_0(Z(x, t)) \right) + \beta(Z(x, t)) \right] \quad (43)$$

есть решение уравнения (35) при произвольных постоянных k, λ, g_1, g_0 с коэффициентом $m = m(t)$ и $g \equiv g_0$.

Для завершения исследования рассмотрим решения уравнения (42). Введем для удобства функцию $\zeta(Z) = \beta(Z) + P'_0/P_0$ и переменную $y = \ln Z$. В этом случае уравнение (42) примет вид

$$\frac{d\zeta}{dy} - \lambda \zeta^2 + U(y)\zeta = 0,$$

где

$$U(y) = (k^2 + \lambda) \frac{d \ln P_0}{dy} - g_1 - g_0 y.$$

Это уравнение Риккати легко интегрируется, в результате чего получаем выражение для функции ζ :

$$\zeta(Z) = -\frac{Z}{\lambda} \frac{d}{dZ} \ln \eta(\ln Z),$$

где

$$\eta(y) = \eta_1 \int^y \exp \left(- \int^y U(y'') dy'' \right) dy' + \eta_0 = \eta_1 \int^y \frac{e^{-g_1 y' - g_0 y'^2} dy'}{P_0^{k^2 + \lambda}(e^{y'})} + \eta_0, \quad (44)$$

а η_0, η_1 – постоянные интегрирования. Соответственно

$$w_\beta(x, t) = -\frac{a}{A(t)} \frac{1}{k} \frac{\partial}{\partial x} \ln \zeta(Z(x, t)) = \frac{a}{A(t)} \frac{1}{\lambda k^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln \eta(\ln Z(x, t)).$$

Выбор порядка N и коэффициентов полинома $P_0(Z)$ произволен, что также эквивалентно произвольности выбора чисел $z_i = -B_i$, поэтому полученные соотношения позволяют решать задачу Коши на всей оси координат для начальных распределений концентрации, заданных как аналитические функции координаты x . Это

связано с тем, что, переходя к пределу $N \rightarrow \infty$, вместо полинома $P_0(Z)$ мы можем брать любую аналитическую в нуле по Z функцию. Поскольку в начальный момент времени переменная Z является аналитической функцией от x , соответствующие решения могут быть согласованы с почти любым гладким начальным распределением концентрации. Сложности могут возникать в случае, когда строится решение задачи с $g_0 \neq 0$. В этом случае в выражении для $F(\ln Z)$ явно содержится слагаемое, пропорциональное $\ln Z$, которое неаналитично в нуле. Однако анализ данной ситуации полезно проводить при решении конкретных задач.

Важными являются случаи, когда в (44) можно вычислить интеграл в правой части в аналитическом виде. Он вычисляется достаточно просто, если выполнены следующие условия: $g_0 = 0$, $g_1 = L$, $k^2 + \lambda = M$, где M и L – целые числа, а порядок N полинома $P_0(Z)$ конечен. В частности, при $M < 0$ и $g_0 = 0$ для любого конечного N интеграл в (44) является полиномом по Z .

8. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ С КВАДРАТИЧНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

Аналогичные вычисления можно проделать и для уравнения (37). При сделанном выборе функции $b(x, t)$ в форме (39) вычисление функции $g(x, t)$, определенной соотношениями (38), дает

$$g(x, t) = -\frac{R + kG}{\mathcal{D}_G A} Z \frac{\partial \beta}{\partial Z} + k^2 Z \frac{\partial}{\partial Z} \left(Z \frac{\partial \ln \xi(Z)}{\partial Z} \right).$$

Отсюда вытекает, что эта функция будет постоянной, если выполнено условие

$$\frac{R + kG}{\mathcal{D}_G A} = \lambda = \text{const.}$$

При этом функции $\beta(Z)$ и $P_0(\mathbf{Z})$ связаны тем же уравнением (41) и, как следствие, уравнением (42).

Вычислим теперь функцию $Y(x, t)$, входящую в коэффициент $m_1(x, t)$ уравнения (37). Подставляя в нее выражения для b и J , с учетом условия комплементарности находим

$$Y(x, t) = a^2 k \left(\beta(Z) + Z \frac{\partial \ln \xi(Z)}{\partial Z} - N \right).$$

Чтобы эта функция зависела только от переменной t , необходимо и достаточно, чтобы выполнялось еще одно условие:

$$\beta(Z) + Z \frac{\partial \ln \xi(Z)}{\partial Z} = \beta_0 = \text{const}, \quad (45)$$

где β_0 – произвольная вещественная постоянная. При этом коэффициент $m_1(t)$ в уравнении (37) будет зависеть только от t и иметь вид

$$m_1(t) = \frac{1}{a^2 \mathcal{D}_G} \left[-\frac{da}{dt} + \left(\mu + \frac{\gamma}{A} \right) a - G a^2 \beta_0 \right].$$

Следовательно, доказано

УТВЕРЖДЕНИЕ 4. Функция $w_\beta(x, t)$, определенная соотношением (43) в утверждении 3, при произвольных постоянных λ , β_0 , k является решением уравнений (37) с коэффициентами $m_1 = m_1(t)$, $\gamma_1 = \gamma_1(t)$, зависящими только от t , и $g(t) \equiv g_0$, если функции $\beta(Z)$ и $P_0(Z)$ связаны уравнениями (42) и (45) и выполнено условие

$$\frac{R + kG}{\mathcal{D}_G A} = \lambda.$$

Вычисление функциональной формы решений в этом случае приводит при произвольных постоянных g_0 и β_0 к определению явного вида и $\beta(Z)$, и $P_0(Z)$:

$$\beta(Z) = \beta_0 - Z \frac{d \ln \xi(Z)}{dZ}, \quad P_0(Z) = Z^{-\beta_0} \xi(Z) \left(q_0 + \frac{Z}{\beta_0 + 1} \right),$$

где

$$\xi(Z) = e^{W(Z)}, \quad W(Z) = Z^{-\lambda/k^2} \left(c_1 + \int^Z Z'^{\lambda/k^2} ((g_0 + \lambda\beta_0) \ln Z' + g_1) dZ' \right).$$

Функция $W(Z)$ вычисляется в явном виде при любых значениях параметров решения. В частности,

$$W(Z) = Z^{-\lambda/k^2} c_1 + \frac{Z}{\lambda/k^2 + 1} ((g_0 + \lambda\beta_0) \ln Z + g_1) - \frac{(g_0 + \lambda\beta_0)}{(\lambda/k^2 + 1)^2} Z.$$

Эти решения уже не содержат произвольных функциональных параметров и описывают ограниченный класс точных решений уравнения (3). Все замечания о решениях, построенных в предыдущем разделе, остаются справедливыми и для решений, построенных в данном разделе.

9. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Развитый в предложенной работе метод представления суперпозиции простых решений производными от полиномов позволил построить решение задачи Коши для уравнения нелинейной диффузии с нелинейным источником в форме линейной или квадратичной функции концентрации. Поскольку решения строятся практически для любого начального распределения, в рамках такого подхода можно решать задачи о формировании регулярных и периодических структур в среде с нелинейной диффузией. В работе из-за ограниченности объема статьи не проводились вычисления для решений Φ полиномиального по x вида. Для таких решений уравнения для суперпозиционных функций отличаются от тех, которые были получены для решений с экспонентами. Однако все необходимые построения можно воспроизвести по аналогии с приведенными в статье. Более того, развитый метод построения суперпозиционных решений полиномиального типа может быть полезным для более широкого круга нелинейных задач. В частности, связь между суперпозициями решений некоторых нелинейных уравнений с решениями линейных уравнений может рассматриваться в качестве одного из способов строить решения таких уравнений с переменными коэффициентами заданного типа. Это было продемонстрировано на примере суперпозиций полиномов по переменной T как решений телеграфного уравнения.

Благодарности. Автор благодарит за полезные обсуждения результатов данной работы И. О. Золотовского и Д. А. Коробко. Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ (в рамках Государственного задания и проекта № 14.Z50.31.0015), а также при частичной финансовой поддержке РФФИ в рамках проекта 13-01-97067 р-поволжье_а.

Список литературы

- [1] А. А. Самарский, А. П. Михайлов, *Математическое моделирование. Идеи. Методы. Примеры*, Наука, М., 1997.
- [2] А. А. Самарский, В. А. Галактионов, С. П. Курдюмов, А. П. Михайлов, *Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений*, Наука, М., 1987.
- [3] В. В. Пухначев, *Прикл. механика и техн. физика*, **36**:2 (1995), 23–31.
- [4] С. Н. Аристов, *Прикл. механика и техн. физика*, **40**:1 (1999), 22–26.
- [5] В. М. Журавлев, *ТМФ*, **124**:2 (2000), 265–278.
- [6] В. М. Журавлев, *Письма в ЖЭТФ*, **75**:1 (2002), 11–16.
- [7] В. М. Журавлев, *ЖЭТФ*, **129**:3 (2006), 587–604.

Поступила в редакцию 19.08.2014,
после доработки 8.10.2014