Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. Д. Фаддеев, Методические замечания по поводу квантовой теории Янга–Миллса, *ТМФ*, 2014, том 181, номер 3, 597–602

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8782>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.174.149.18

26 апреля 2023 г., 16:00:03

© 2014 г.

Л. Д. Фаддеев^{*†}

ПАРА МЕТОДИЧЕСКИХ ЗАМЕЧАНИЙ ПО ПОВОДУ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ЯНГА–МИЛЛСА

Приведены методические предложения по поводу определения понятия эффективного действия, перенормировки константы связи и интерпретации размерной трансмутации. Показано, что расходимости при квантовании полей Янга–Миллса устраняются и приводят к нарушению масштабной инвариантности классической теории.

Ключевые слова: эффективное действие, размерная трансмутация.

DOI: 10.4213/tmf8782

1. ВВЕДЕНИЕ

Наша монография [1] с Андреем Славновым вышла уже 35 лет назад. Это первая книга по квантовой теории поля, в которой в основу изложения положен фейнмановский функциональный интеграл. Однако, глядя на нее сейчас, я считаю, что мы были недостаточно радикальны: ряд положений можно было бы усовершенствовать. В духе Фейнмана не следует использовать функции Грина–Швингера, а отправляться только от S -матрицы. Кстати, этой же идеологии придерживался и Н. Н. Боголюбов. Метод фонового поля следует формулировать, имея в виду его приложение к определению S -матрицы.

В методе эффективного действия особенно просто описывается перенормировка единственного параметра классической теории – константы связи g^2 , которая входит в формулировку как множитель перед классическим действием. Расходящиеся коэффициенты в эффективном действии собираются в перенормированную константу связи g_t^2 .

Я уже делал методические замечания на различных конференциях, труды которых опубликованы [2], [3]. Однако в периодических научных журналах, за исключением работы [4], эти замечания не публиковались.

^{*}Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова РАН, Санкт-Петербург, Россия. E-mail: faddeev@pdmi.ras.ru

[†]Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия

2. ЭФФЕКТИВНОЕ ДЕЙСТВИЕ

Используем следующие обозначения: поле Янга–Миллса $A_\mu(x)$ имеет значения в алгебре Ли калибровочной группы. Кривизна $F_{\mu\nu}$ задается как

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu],$$

классическое действие имеет вид

$$\mathcal{A}(x) = \frac{1}{4g^2} \text{tr} F_{\mu\nu}^2,$$

где g играет роль классической константы связи.

В определении S -матрицы через функциональный интеграл, предложенном в [1], функционал

$$\exp \left\{ i \int d^4x \mathcal{A}(x) \right\}$$

интегрируется по полям $A_\mu(x)$, имеющим заданное асимптотическое поведение при больших временах:

$$A_\mu \rightarrow A_\mu^{\text{in,out}}, \quad t \rightarrow \mp\infty,$$

где свободные поля A_μ^{in} и A_μ^{out} имеют заданную сходящуюся волну A_μ^- и расходящуюся волну A_μ^+ соответственно. S -матрица становится функционалом от A_μ^- и A_μ^+ , т. е. производящей функцией для элементов S -матрицы. В функциональном интеграле следует интегрировать по классам калибровочно-эквивалентных полей, что осуществляется при помощи введения соответствующих духов.

Для вычисления S -матрицы удобно использовать формализм фонового поля. Положим

$$A_\mu = B_\mu + ga_\mu,$$

где калибровочное поле B_μ удовлетворяет тем же асимптотическим условиям, что и A_μ , а векторное поле a_μ не имеет сходящихся волн при $t \rightarrow -\infty$ и расходящихся волн при $t \rightarrow \infty$. Этими условиями однозначно определяется оператор квадратичной формы $\square = \nabla_\mu^2$.

Фиксация калибровки достигается наложением условия $\nabla_\mu a_\mu = 0$ или добавкой к действию члена $(1/2) \text{tr}(\nabla_\mu a_\mu)^2$. Соответствующее духовое слагаемое имеет вид

$$\text{tr}(\nabla_\mu \bar{c}(\nabla_\mu + ga_\mu)c).$$

В результате мы должны интегрировать функционал, содержащий квадратичные формы $(M_1(B)a, a)$ и $(M_0(B)\bar{c}, c)$, где

$$M_0(B)c = \nabla_\mu^2 c, \quad M_1(B)a_\nu = \nabla_\mu^2 a_\nu + 2[F_{\mu\nu}, a_\mu],$$

а также вершины первого, третьего и четвертого порядков:

$$\begin{aligned} \Gamma_1(B) &= \frac{1}{g} \int d^4x \text{tr}(\nabla_\mu F_{\mu\nu} a_\nu), \\ \Gamma_3(B) &= g \int d^4x \text{tr} \nabla_\mu a_\nu [a_\mu, a_\nu], \end{aligned}$$

$$\Gamma_4(B) = g^2 \int d^4x \operatorname{tr}[a_\mu, a_\nu]^2,$$

$$\Omega(B) = g \int d^4x \operatorname{tr} \nabla_\mu \bar{c}[a_\mu, c].$$

S -матрица представляется как функционал эффективного действия:

$$S = \exp\{iW(B)\}.$$

При вычислении $W(B)$ обычно принято считать, что вершина $\Gamma_1(B)$ исчезает, другими словами, на фоновое поле налагается условие

$$\nabla_\mu F_{\mu\nu}(B) = 0,$$

т.е. классическое уравнение движения. В случае конечномерных интегралов это естественное положение метода стационарной фазы. Однако я предлагаю наложить на B_μ другое условие, графически оно выглядит так:

$$\text{---} \bigcirc \text{---} = 0, \quad (1)$$

где блок $\bigcirc$ — представляет собой сумму сильно связанных диаграмм с одной внешней линией. Асимптотическое условие можно наложить на решение этого уравнения.

Термин “сильно связанные” имеет синоним “одночастично-неприводимые”. На уровне игры слов можно сказать, что уравнение (1) определяет самодействие асимптотических частиц.

При этом условии функционал $W(B)$ может быть записан в виде

$$W(B) = \frac{1}{4g^2} \int F_{\mu\nu}^2 d^4x - \frac{1}{2} \ln \det M_1 + \ln \det M_0 + \sum_{n=1}^{\infty} g^{2n} W_n(B), \quad (2)$$

где $W_n(B)$ задается суммой сильно связанных диаграмм с $n+1$ петлями.

Сделаем маленькое примечание. Понятию эффективного действия посвящена большая литература. В рамках общепринятого метода следует начинать с функционала для функций Грина, внешнее поле вводится при помощи преобразования Лежандра. Внешний ток неудобен в теории Янга–Миллса, так как он нарушает явную калибровочную инвариантность. Предложенный здесь метод является более непосредственным и лучше подходит для теории Янга–Миллса.

3. ПЕРЕНОРМИРОВКА КОНСТАНТЫ СВЯЗИ

Перенормировка в формализме эффективного действия сводится к переопределению константы связи g^2 . В духе Ландау ее следует считать функцией параметра регуляризации ϵ и убедиться, что вклад расходящихся интегралов в разложении (2) содержит выражения типа $C_k(g, \epsilon) \int d^4x F_{\mu\nu}^2$, комбинация которых с классическим вкладом в действии дает перенормированный заряд:

$$\frac{1}{g_r^2} = \frac{1}{g^2(\epsilon)} + \sum C_k(g, \epsilon).$$

Вся эта процедура уже описана мною в терминологии предыдущего раздела в работе [4]. Здесь я ограничусь более подробным, чем в [4] описанием однопетлевого вклада, где появляются все характерные черты процедуры перенормировки. После вычитания (бесконечной) константы $W_0(0)$ этот вклад имеет вид

$$W_0(B) - W_0(0) = -\frac{1}{2} \ln \det \frac{M_1(B)}{M_1(0)} + \ln \det \frac{M_0(B)}{M_0(0)}.$$

Для вычисления этих определителей естественно использовать метод собственного времени, восходящий к работе Фока [5]:

$$\ln \det \frac{A}{B} = -\int_0^\infty \frac{ds}{s} \text{Tr}(e^{-sA} - e^{-sB}).$$

Операторы $e^{-M_1(B)s}$ и $e^{-M_0(B)s}$ являются интегральными операторами с ядрами $D_{\mu\nu}(x, y; s)$ и $D(x, y; s)$ со значениями в калибровочной алгебре. Поведение этих ядер при $s \rightarrow 0$ дается известным разложением

$$D(x, y; s) = a_{-1}(x, y)s^{-2} + a_0(x, y)s^{-1} + a_1(x, y) + a_2(x, y)s + \dots, \quad (3)$$

где коэффициенты $a_i(x, y)$, $i = -1, 0, 1, 2, \dots$, явно вычисляются (процедура, возвращающая нас к началу XX века). В нашем случае первое слагаемое в (3) сокращается при вычитании вклада от $e^{-M(0)s}$; далее мы имеем

$$\text{tr } a_0(x, x) = 0,$$

так что выражение для $\text{tr } D(x, x; s)$ начинается со слагаемого $\text{tr } a_1(x, x)$, которое пропорционально $\text{tr } F_{\mu\nu}^2$ (что, кстати, следует из соображений локальности и размерности). Имеем, таким образом,

$$W_0 = \int_0^\infty \frac{ds}{s} D(B, s), \quad (4)$$

где при $s \rightarrow 0$

$$D(B, s) = \beta \int d^4x \text{tr } F_{\mu\nu}^2 + O(s).$$

Регуляризуем интеграл (4),

$$\int_0^\infty \frac{ds}{s}(\cdot) = \int_\epsilon^\mu \frac{ds}{s}(\cdot) + \int_\mu^\infty \frac{ds}{s}(\cdot),$$

получаем

$$\begin{aligned} W_{-1}(B) + W_0(B) &= \left(\frac{1}{4g^2} + \beta \ln \frac{\mu}{\epsilon} \right) \int d^4x \text{tr } F_{\mu\nu}^2 + \\ &+ \int_0^\mu \frac{ds}{s} \left(D(B, s) - \beta \int d^4x \text{tr } F_{\mu\nu}^2 \right) + \int_\mu^\infty \frac{ds}{s} D(B, s). \end{aligned} \quad (5)$$

Все расходимости содержатся в первом слагаемом в правой части. В процессе регуляризации мы ввели вспомогательное значение μ , так что перенормированный заряд зависит от него:

$$\frac{1}{g_r^2(\mu)} = \frac{1}{g^2(\epsilon)} + 4\beta \ln \frac{\mu}{\epsilon}. \quad (6)$$

Перенормированный заряд принято называть бегущей константой связи.

Выражение (5), очевидно, не зависит от μ . Поэтому понятие бегущей константы связи теряет смысл, и ее призвана заменить размерная константа m , играющая роль константы разделения в (6):

$$\frac{1}{g^2(\epsilon)} = 4\beta \ln \epsilon m^2, \quad \frac{1}{g_r^2(\mu)} = 4\beta \ln \mu m^2. \quad (7)$$

Видим, что перенормированный и неперенормированный заряды являются значениями одной и той же функции $g^2(s)$ в точке перенормировки $s = \mu$ и в точке регуляризации $s = \epsilon$ соответственно. Константа β легко вычисляется (см., например, работу [6]), она отрицательна и содержит, кроме двоек и множителей π , знаменитое значение $11/3$. Это замечательное свойство означает осмысленность формулы (7), величина $g(\epsilon)$ должна стремиться к нулю при $\epsilon \rightarrow 0$, а $g(\mu)$ имеет смысл, если $\mu m^2 < 1$. Единственным параметром теории становится величина m , имеющая размерность массы. Замена $g^2 \rightarrow m$ называется размерной трансмутацией. Однако считать, что квантовая теория Янга–Миллса нетривиально параметризуется величиной m , неправильно. На самом деле m является всего лишь масштабным параметром.

Перенормировка в высших петлях не меняет этих соображений. Независимость физических ответов от нормировки μ гарантируется уравнением Гелмманна–Лоу. В стиле настоящей работы это описано в статье [4].

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Итак, если бы мы с Андреем предприняли попытку еще одного переиздания нашей монографии, я бы настаивал на введении понятия эффективного действия как производящего функционала для S -матрицы и описании перенормировки в рамках этого формализма. Важно было бы также подчеркнуть, что расходимости не являются недостатком квантовой теории. Они всего лишь нарушают масштабную инвариантность классической теории и приводят к тому, что квантовая теория представляет собой динамическую модель, не содержащую произвольных параметров.

Основной нерешенной проблемой в теории Янга–Миллса является описание возбуждений. Следует сознаться, что в определении матрицы рассеяния мы явно использовали асимптотические условия, основанные на свободном движении. Именно это дает возможность однозначно определить операторы, обратные к M_1 и M_0 . Альтернативно можно апеллировать к евклидовой формулировке и определению асимптотических состояний при обратном переходе к формулировке с выделенным временным направлением. Я думаю, что при этом будет важно понять роль квантовых уравнений движения, введенных в разделе 2. В частности, в результате появления размерного параметра m возможно наличие солитонных решений, которые и будут настоящими одночастичными возбуждениями. Спекуляции по этому поводу содержатся в работе [7].

Благодарности. Работа поддержана РНФ (грант № 14-11-00598).

Список литературы

- [1] А. А. Славнов, Л. Д. Фаддеев, *Введение в квантовую теорию калибровочных полей*, Наука, М., 1988.
- [2] L. D. Faddeev, *Bull. Braz. Math. Soc. (N. S.)*, **33**:2 (2002), 201–212, arXiv: 0911.1013.
- [3] L. D. Faddeev, *Separation of scattering and selfaction revisited*, arXiv: 1003.4854.
- [4] Л. Д. Фаддеев, *ТМФ*, **148**:1 (2006), 133–142.
- [5] В. А. Фок, *Изв. АН СССР. Сер. физ.*, **4–5** (1937), 551–568.
- [6] I. Jack, H. Osborn, *Nucl. Phys. B*, **207**:3 (1982), 474–504.
- [7] L. D. Faddeev, “Knots as possible excitations of the quantum Yang–Mills fields”, *Quantum Field Theory and Beyond*, Essays in Honor of Wolfhart Zimmermann (Ringberg Castle, Tegernsee, Germany, 3–6 February 2008), eds. E. Seiler, K. Sibold, World Sci., Hackensack, NJ, 2008, 156–166, arXiv: 0805.1624.

Поступила в редакцию 31.07.2014