Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Б. Шабат, Теория рассеяния для дельтаобразных потенциалов, *ТМФ*, 2015, том 183, номер 1, 105–119

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8783>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.205.225.156

26 апреля 2023 г., 14:07:00

© 2015 г.

А. Б. Шабат^{*†}

ТЕОРИЯ РАССЕЯНИЯ ДЛЯ ДЕЛЬТАОБРАЗНЫХ ПОТЕНЦИАЛОВ

На примере уравнения Кортевега–де Фриза рассматривается вопрос о расширении рамок метода обратной задачи рассеяния при помощи дельтаобразных потенциалов и их преобразований Дарбу. Задача о свойствах данных рассеяния сводится в этом случае к изучению целых функций спектрального параметра, заданных явно.

Ключевые слова: обратная задача рассеяния, дополнительный спектр, уравнение Кортевега–де Фриза, второе уравнение Пенлеве.

DOI: 10.4213/tmf8783

Памяти С. И. Похожаева посвящается

1. МАТРИЦА РАССЕЯНИЯ

Рассматривая теорию рассеяния для уравнения Шредингера с финитным потенциалом, мы заменяем потенциал $u(x)$ конечной суммой δ -функций:

$$\psi'' = (k^2 + u(x))\psi, \quad u(x) = \sum_{j=1}^N \gamma_j \delta(x - x_j), \quad k \in \mathbb{C}. \quad (1)$$

Для произвольного решения $\psi = \psi(x, k)$ уравнения (1) мы имеем на интервалах между узлами

$$\psi(x, k) = a_j e^{kx} + b_j e^{-kx}, \quad \dots < x_j < x < x_{j+1} < \dots. \quad (2)$$

При переходе от интервала $I_j = (x_{j-1}, x_j)$ к следующему интервалу I_{j+1} мы находим, что в силу условий склейки

$$(a, b)_j = (a, b)_{j-1} S_j(k), \quad S_j(k) = \frac{1}{2k} \begin{pmatrix} 2k + \gamma_j & -\gamma_j e^{2kx_j} \\ \gamma_j e^{-2kx_j} & 2k - \gamma_j \end{pmatrix}. \quad (3)$$

^{*}Карачаево-Черкесский государственный университет им. У. Д. Алиева, Карачаевск, Россия. E-mail: shabatab@mail.ru

[†]Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН, Москва, Россия

Решение ψ при этом предполагается непрерывным, а условия скачка его первых производных в узлах x_j , имеют следующий вид:

$$\lim_{x \rightarrow x_j+0} \psi'(x, k) - \lim_{x \rightarrow x_j-0} \psi'(x, k) = \gamma_j \psi(x_j, k).$$

Аналогичная (3) формула выполняется при пересечении следующего узла x_{j+1} , поэтому

$$(a, b)_{j+1} = (a, b)_j S_{j+1} = (a, b)_{j-1} S_j S_{j+1}.$$

Таким образом, сумме дельтаобразных потенциалов отвечает произведение матриц вида (3), и мы называем произведение $S = \prod_{j=1}^N S_j$ *матрицей рассеяния* уравнения (1), а матрицы $S_j = S_j(k)$, зависящие от двух параметров x_j и γ_j , — *элементарными матрицами рассеяния*. Ясно, что рассматриваемые матрицы рассеяния имеют следующую общую структуру:

$$S(k) = S_1(k) \dots S_N(k) = \begin{pmatrix} a(k) & b(k) \\ b(-k) & a(-k) \end{pmatrix}, \quad a(k)a(-k) = 1 + b(k)b(-k). \quad (4)$$

Чтобы найти явный вид функций $a(k)$ и $b(k)$, мы будем использовать рекуррентные формулы

$$\begin{aligned} 2ka(n, k) &= (2k + \gamma_n)a(n-1, k) + \gamma_n b(n-1, k)e^{-2kx_n}, \\ 2kb(n, k) &= (2k - \gamma_n)b(n-1, k) - \gamma_n a(n-1, k)e^{2kx_n}, \end{aligned} \quad (5)$$

где $a(n, k)$ и $b(n, k)$ обозначают элементы верхней строки произведения $S(n, k)$ первых n элементарных матриц рассеяния,

$$S(n, k) = S(n-1, k)S_n(k), \quad S(1, k) = S_1(k) = \frac{1}{2k} \begin{pmatrix} 2k + \gamma_1 & -\gamma_1 e^{2kx_1} \\ \gamma_1 e^{-2kx_1} & 2k - \gamma_1 \end{pmatrix}.$$

Непосредственным следствием формул (5) является

ЛЕММА 1. Пусть матрица $S(n, k) = S_1(k) \dots S_n(k)$ есть произведение элементарных матриц рассеяния (3). Тогда $2kS(n, k)$ является целой функцией от k , и при любом n

$$\lim_{k \rightarrow 0} 2kS(n, k) = \alpha_0(n) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Чтобы записать $a(n, k)$ и $b(n, k)$ в явном виде, вводятся обозначения

$$e_j = e^{2kx_j}, \quad E_{ij} = 1 - e^{2kx_{ij}}, \quad x_{ij} = x_i - x_j.$$

Представив функции $(2k)^n a(n, k)$, $(2k)^n b(n, k)$ в виде разложения по однородным многочленам от переменных $\gamma_1, \dots, \gamma_n$, можно индукцией проверить, что

$$\begin{aligned} (2k)^n a(n, k) &= (2k)^n + (2k)^{n-1} \alpha_1(n) + \dots + \alpha_n(n), \\ -(2k)^n b(n, k) &= (2k)^{n-1} \beta_1(n) + (2k)^{n-2} \beta_2(n) + \dots + \beta_n(n), \end{aligned} \quad (6)$$

где структура однородных многочленов $\alpha_m(n)$ и $\beta_m(n)$ не зависит от n . Ниже приводится несколько точных формул для этих однородных многочленов от $\gamma_1, \dots, \gamma_n$

при $m = 1, 2, 3, 4$:

$$\begin{aligned}
 \alpha_1 &= \sum_j \gamma_j, & \beta_1 &= \sum_j \gamma_j e_j, \\
 \alpha_2 &= \sum_{i < j} \gamma_i \gamma_j E_{ij}, & \beta_2 &= \sum_{i < j} \gamma_i \gamma_j e_j E_{ij}, \\
 \alpha_3 &= \sum_{i < j < l} \gamma_i \gamma_j \gamma_l E_{ij} E_{jl}, & \beta_3 &= \sum_{l < i < j} \gamma_l \gamma_i \gamma_j e_j E_{li} E_{ij}, \\
 \alpha_4 &= \sum_{i < j < l < m} \gamma_i \gamma_j \gamma_l \gamma_m E_{ij} E_{jl} E_{lm}, & \beta_4 &= \sum_{l' < l < i < j} \gamma_{l'} \gamma_l \gamma_i \gamma_j e_j E_{l'l} E_{li} E_{ij}.
 \end{aligned} \tag{7}$$

Эти формулы демонстрируют очевидную аналогию однородных многочленов $\alpha_m(n)$ и $\beta_m(n)$ и элементарных симметрических многочленов той же степени m . Например, для всех n

$$\beta_n(n) = \gamma_1 \gamma_2 \cdots \gamma_n e_n E_{12} E_{23} \cdots E_{n-1,n}.$$

Возвращаясь к матрице рассеяния и обозначениям формулы (4), отметим, что при вещественных γ_j коэффициенты псевдомногочленов (5) также вещественны, и поэтому выполняются условия

$$a(-k) = \bar{a}(k), \quad b(-k) = \bar{b}(k), \quad |a(k)|^2 = 1 + |b(k)|^2 \quad \text{при} \quad \operatorname{Re} k = 0.$$

С другой стороны, так как $x_{ij} = x_i - x_j < 0$ при $i < j$, при комплексных значениях $k = k' + ik''$

$$|1 - E_{ij}(k)| \leq e^{-2\varepsilon \operatorname{Re} k}, \quad \varepsilon = \min |x_{ij}| > 0, \quad \operatorname{Re} k > 0. \tag{8}$$

Используя приведенные выше формулы для коэффициентов $\alpha_m(n)$ и $\beta_m(n)$, мы можем утверждать, что целую функцию $2ka(k)$ (см. лемму 1) в правой полуплоскости комплексной переменной k можно приближенно заменить многочленом $(2k)^N \tilde{a}(k)$, так как с экспоненциальной точностью, определяющей соотношением (8),

$$a(k) \approx \tilde{a}(k) \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{j=1}^N \left(1 + \frac{\gamma_j}{2k}\right), \quad \operatorname{Re} k > 0, \quad |k| \geq 1. \tag{9}$$

Другими словами, на вещественной оси при $k \rightarrow +\infty$ коэффициенты асимптотических разложений $a(k)$ ¹⁾ и $\tilde{a}(k)$ совпадают, и имеет место следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Для восстановления по матрице рассеяния коэффициентов $\gamma_1, \dots, \gamma_N$ в формуле (1) для потенциала*

$$u(x) = \sum_{j=1}^N \gamma_j \delta(x - x_j), \quad x_1 < x_2 < \cdots < x_n < \cdots < x_N, \tag{10}$$

достаточно, в силу (9), вычислить коэффициенты асимптотического разложения функции $a(k)$ при $k \rightarrow +\infty$.

¹⁾В методе обратной задачи асимптотика $\ln a(k)$ определяет законы сохранения для уравнения Кортевега–де Фриза.

Переходя от формул для $a(k)$ к формулам для $b(k)$, нужно обсудить вопрос о выборе узлов x_j в формуле (10). Заметим сначала, что вид функции $b(k)$ в отличие от $a(k)$ зависит от выбора на оси x начала координат. Добиться инвариантности рассматриваемой формулы можно переходом от $b(k)$ к

$$b^\ell(k) = -e^{-2kx_1}b(k) \quad \text{или} \quad b^r(k) = -e^{-2kx_N}b(k).$$

В обоих случаях зависимость $b(n, k)$ от координат узлов x_j пропадает²⁾ и заменяется зависимостью от расстояний между узлами $x_{ij} = x_i - x_j$. В случае $b^r(k)$ все $x_{ij} < 0$, и с экспоненциальной точностью так же, как в формуле (9), мы получаем

$$b^r(k) \approx \tilde{b}^r(k) = \gamma_N \prod_{j=1}^{N-1} \left(1 + \frac{\gamma_j}{2k}\right), \quad \operatorname{Re} k > 0, \quad |k| \geq 1.$$

Аналогично, в случае $b^\ell(k)$ все $x_{ij} > 0$ и, соответственно,

$$b^\ell(k) \approx \tilde{b}^\ell(k) = \gamma_1 \prod_{j=2}^N \left(1 - \frac{\gamma_j}{2k}\right), \quad \operatorname{Re} k < 0, \quad |k| \geq 1.$$

Из этих формул следует, в частности, что

$$x_N = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2k} |\ln b(k)|, \quad x_1 = \lim_{k \rightarrow -\infty} \frac{1}{2k} |\ln b(k)|.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если расстояния между соседними узлами x_j одинаковы, то приведенные выше предложение 1 и формулы для x_1 и x_N полностью определяют параметры рассматриваемого потенциала (10). Общая теорема о единственности финитного потенциала с заданными $a(k)$ и $b(k)$ была установлена независимо двумя различными способами в работах [1] и [2].

ЗАМЕЧАНИЕ 2. При традиционном изложении обратной задачи роль правой полуплоскости $\operatorname{Re} k > 0$ играет верхняя полуплоскость комплексной переменной $\zeta = ik$; данные рассеяния формулируются при этом в терминах полюсов функции $1/a(-i\zeta)$, рассматриваемой в верхней полуплоскости $\operatorname{Im} \zeta > 0$, и отношений $\rho(k) = b(k)/a(k)$, заданных на вещественной оси $\zeta = \xi \in \mathbb{R}$. Нетрудно убедиться, что в рассматриваемом нами случае рекуррентные формулы (5) сводятся для этих отношений к формулам, напоминающим непрерывную дробь:

$$\left(\rho_n e^{-2kx_n} + 1 - \frac{2k}{\gamma_n}\right) \left(\rho_{n-1} e^{-2kx_n} + 1 + \frac{2k}{\gamma_n}\right) + \frac{4k^2}{\gamma_n^2} = 0.$$

Здесь

$$\rho_n = \frac{b(n, k)}{a(n, k)}, \quad \rho_1 = -\frac{\gamma_1 e^{2kx_1}}{2k + \gamma_1}, \quad \rho_2 = \frac{-2k(\gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_2) + \gamma_1 \gamma_2 (e_1 - e_2)}{(2k)^2 + 2k(\gamma_1 + \gamma_2) + E_{12} \gamma_1 \gamma_2}.$$

²⁾ Это становится важным при предельных переходах $x_1 \rightarrow -\infty$ и $x_N \rightarrow \infty$.

2. ФУНКЦИИ ЙОСТА

Решения уравнения Шредингера (1), которые имеют чисто экспоненциальное поведение при $x \rightarrow +\infty$ или при $x \rightarrow -\infty$, называются в теории рассеяния *функциями Йоста*. Всего имеются четыре (по числу возможных комбинаций) функции Йоста. Две из них, $\psi_1^\pm = \psi_1^\pm(x, k)$, убывают при $\operatorname{Re} k > 0$ на соответствующей x -бесконечности:

$$\psi_1^+(x, k) = \begin{cases} e^{kx}, & x \approx -\infty, \\ a(k)e^{kx} + b(k)e^{-kx}, & x \approx \infty; \end{cases} \quad (11)$$

$$\psi_1^-(x, k) = \begin{cases} a(k)e^{-kx} - b(-k)e^{kx}, & x \approx -\infty, \\ e^{-kx}, & x \approx \infty. \end{cases} \quad (12)$$

При этом двойственное к (11) решение (12) соответствует замене $x \rightarrow -x$ и $S_j \rightarrow S_j^{-1}$.

В левой полуплоскости $\operatorname{Re} k < 0$ аналогичными свойствами обладает пара функций Йоста $\psi_2^\pm(x, k)$, которые в случае финитного потенциала можно определить формулами

$$\psi_2^+(x, k) = \psi_1^-(x, -k), \quad \psi_2^-(x, k) = \psi_1^+(x, -k).$$

Верхние индексы $\pm$ соответствуют здесь знаку $\pm kx$ показателя “исходной” экспоненты, а нижние указывают на одну из полуплоскостей комплексной переменной k .

Как будет показано ниже, функции Йоста регулярны в точке $k = 0$, в отличие от элементов матриц рассеяния из леммы 1.

ПРИМЕР 1. Пусть $u(x) = \gamma_1 \delta(x - x_1) + \gamma_2 \delta(x - x_2)$, тогда при любом фиксированном x решение $\psi_1^+(x, k)$ имеет предел $\psi_1^+(x, 0)$ при $k \rightarrow 0$ и

$$\psi_1^+(x, 0) = \begin{cases} 1 + \gamma_1(x - x_1), & x_1 \leq x \leq x_2, \\ 1 + \gamma_1 x_{21} + (\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_1 \gamma_2 x_{21})(x - x_2), & x > x_2. \end{cases}$$

Нетрудно проверить, что условие $\alpha_0(2) = 0$ (см. лемму 1) совпадает с условием ограниченности функции $\psi_1^+(x, 0)$ при $x \rightarrow \infty$ и обращения в ноль в точке $k = 0$ вронскиана функций $\psi_1^+(x, 0)$ и $\psi_1^-(x, 0)$. Напомним, что вронскиан $\langle f, g \rangle$ определяется формулой

$$\langle f, g \rangle \stackrel{\text{def}}{=} f(x)g_x(x) - f_x(x)g(x). \quad (13)$$

Детальное исследование аналитической зависимости от k функций Йоста $\psi_1^\pm(x, k)$ в замыкании правой полуплоскости $\operatorname{Re} k \geq 0$ основано на следующих интегральных уравнениях:

$$\varphi^+(x, k) = 1 + \int_{-\infty}^x R(x - x')u(x')\varphi^+(x', k) dx', \quad \psi_1^+(x, k) = \varphi^+(x, k)e^{kx}, \quad (14)$$

$$\varphi^-(x, k) = 1 + \int_x^\infty R(x' - x)u(x')\varphi^-(x', k) dx', \quad \psi_1^-(x, k) = \varphi^-(x, k)e^{-kx}. \quad (15)$$

Разностное ядро $R(y) = R(y, k)$ в правой полуплоскости $\operatorname{Re} k \geq 0$ допускает оценку

$$R(y) = \frac{1 - e^{-2ky}}{2k} \implies |R(y)| \leq \int_{-y}^0 |e^{2ks}| ds \leq y, \quad \operatorname{Re} k \geq 0, \quad y \geq 0. \quad (16)$$

В пределе $k \rightarrow 0$ ядро $R(y) \rightarrow y$ и, например, уравнение (14) в этом пределе принимает следующий простой вид:

$$\varphi(x) = 1 + \int_{-\infty}^x (x - x') u(x') \varphi(x') dx'. \quad (17)$$

К указанным выше интегральным уравнениям применим стандартный метод итераций, и мы получаем следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1. *Для уравнения Шредингера (1) с финитным потенциалом функция Йоста $\psi_1^+(x, k)$ является целой функцией экспоненциального типа во всей плоскости комплексной переменной k и допускает в правой полуплоскости $\operatorname{Re} k \geq 0$ оценку*

$$|\psi_1^+(x, k) e^{-kx}| = |\varphi^+(x, k)| \leq e^M, \quad x \leq 1, \quad \operatorname{Re} k \geq 0, \quad (18)$$

где

$$M = \sum_j |\gamma_j| + \sum_j |x_j \gamma_j|.$$

Для доказательства оценки (18) используется вспомогательное интегральное уравнение

$$p(x) = 1 + \int_{-\infty}^x (1 + |x'|) |u(x')| p(x') dx', \quad p(x) = \exp \left\{ \int_{-\infty}^x (1 + |x'|) |u(x')| dx' \right\},$$

которое является мажорантным для (14) и (17) в силу оценки (16).

Аналогичное теореме 1 утверждение справедливо и для функции Йоста $\psi_1^-(x, k)$, удовлетворяющей интегральному уравнению (15). Оценка (18) принимает в этом случае вид

$$|\psi_1^-(x, k) e^{kx}| = |\varphi^-(x, k)| \leq e^M, \quad x \geq -1, \quad \operatorname{Re} k \geq 0.$$

Такие же оценки выполняются и для второй пары функций Йоста $\psi_2^\pm(x, k)$ с заменой условия $\operatorname{Re} k \geq 0$ на противоположное. Ограничение области изменения x в этих оценках вызвано возможностью роста решения при $x \rightarrow \pm\infty$ соответственно (ср. с примером 1). В частности, для уравнения (17) имеем

$$u(x) = \gamma \delta(x) \implies \varphi(x) = \begin{cases} 1 + \gamma x, & x > 0, \\ 1, & x < 0. \end{cases}$$

Хотя предельный переход $N \rightarrow \infty$ не входит в наши планы, ясно, что равномерные оценки из теоремы 1 позволяют избавиться от условия конечности суммы в формуле (10). Известно к тому же, что для уравнения Шредингера оценка (18) выполняется для потенциалов $u(x)$ общего вида, удовлетворяющих условию

$$M = \int_{-\infty}^{\infty} (1 + |x|) |u(x)| dx < \infty.$$

Это условие обеспечивает также однозначную разрешимость интегральных уравнений (14) и (15) методом итераций [3], [4].

Для уравнения Шредингера с потенциалом (10) в виде конечной суммы δ -функций решение интегральных уравнений типа (14) и (17) методом итераций сводится к построению последовательности функций, удовлетворяющих этим уравнениям в расширяющемся наборе областей

$$\Omega_n = \{x: -\infty < x < x_{n+1}\}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (19)$$

Например, для интегрального уравнения (17) соответствующая рекуррентная формула принимает следующий вид:

$$\varphi_{n+1}(x) = \varphi_n(x) + \varphi_n(x_{n+1})\gamma_{n+1}X_{n+1}(x), \quad \varphi_0 \equiv 1,$$

где $X_j(x) = (x - x_j)\theta(x - x_j)$. Здесь кусочно-линейные по x функции $\varphi_n(x)$ определены при всех $x \in \mathbb{R}$ и удовлетворяют уравнению (17) при $x \in \Omega_n$. При этом значения точного решения $\varphi(x)$ отличаются от приближенного $\varphi_n(x)$ только при $x > x_{n+1}$. Как и в случае рекуррентных формул (5), окончательный ответ в определенном смысле повторяет структуру симметрических многочленов от $\gamma_1, \dots, \gamma_N$: имеет место

ЛЕММА 2. *Решение интегрального уравнения (17) записывается в виде следующей суммы однородных многочленов от параметров потенциала (10):*

$$\varphi = 1 + \sum_j \gamma_j X_j + \sum_{i < j} \gamma_i \gamma_j X_j x_{ji} + \sum_{l < i < j} \gamma_l \gamma_i \gamma_j X_j x_{il} x_{ji} + \dots \quad (20)$$

Однородные многочлены степени m по переменным $\gamma_1, \dots, \gamma_N$ имеют в этой формуле (как и в формуле (7)) при любом $m > 1$ структуру элементарных симметрических многочленов той же степени.

Построенное кусочно-линейное решение $\varphi(x)$ уравнения Шредингера (1) отвечает значению $k = 0$ спектрального параметра. В силу осцилляционных теорем Штурма число собственных значений задачи с нулевыми граничными условиями при $x \rightarrow \pm\infty$ совпадает с числом нулей функции $\varphi(x)$. Очевидно, что число этих нулей определяется чередованием знаков в последовательности $\varphi(x_j)$, $j = 1, \dots, N$, значений $\varphi(x)$ в узлах, начиная с $\varphi(x_1) = 1$. Равенство (20) дает для первых членов этой последовательности формулы

$$\begin{aligned} \varphi(x_2) &= 1 + \gamma_1 x_{21}, \\ \varphi(x_3) &= 1 + \gamma_1 x_{31} + \gamma_2 x_{32} + \gamma_1 \gamma_2 x_{21} x_{32}, \\ \varphi(x_4) &= 1 + \gamma_1 x_{41} + \gamma_2 x_{42} + \gamma_3 x_{43} + \gamma_1 \gamma_2 x_{21} x_{42} + \dots + \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 x_{21} x_{32} x_{43}, \end{aligned}$$

позволяющие восстановить расстояния x_{ij} между узлами, если известны параметры γ_j потенциала (10) (ср. предложение 1 и замечание 1 в разделе 1).

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Сравнив асимптотики функций Йоста (см. формулы (11), (12)) при $x \rightarrow \pm\infty$ с определением матрицы рассеяния, мы приходим к формуле

$$\psi_1^+(x, k) = a(k)\psi_2^+(x, k) + b(k)\psi_1^-(x, k), \quad (21)$$

которая позволяет выразить элементы матрицы рассеяния $a(k)$ и $b(k)$ через вронскианы функций Йоста:

$$a(k) = \frac{\langle \psi_1^+, \psi_1^- \rangle}{\langle \psi_2^+, \psi_1^- \rangle} = -\frac{\langle \psi_1^+, \psi_1^- \rangle}{2k}, \quad b(k) = \frac{\langle \psi_1^+, \psi_2^+ \rangle}{\langle \psi_1^-, \psi_2^+ \rangle} = \frac{\langle \psi_1^+, \psi_2^+ \rangle}{2k}.$$

Отсюда, в частности, следует, что нули функции $a(k)$, расположенные в правой полуплоскости $\operatorname{Re} k \geq 0$, соответствуют собственным значениям $\lambda = -k^2$ уравнения (1). Отвечающие им собственные функции пропорциональны функциям Йоста $\psi_1^\pm(x, k_j)$ и стремятся к нулю при $x \rightarrow \pm\infty$ в силу формул (11), (12). Задача о распределении бесконечного множества нулей целой функции $ka(k)$ в левой полуплоскости $\operatorname{Re} k \leq 0$ рассматривалась в работах [2], [5]. Интересной (ср. с работой [6]) представляется также задача о структуре множества нулей произведения функций Йоста $\psi_1^\pm$

$$A(x) \equiv A(x, k) = \psi_1^+ \psi_1^- = \begin{cases} a(k) + b(k)e^{-2kx}, & x \approx +\infty, \\ a(k) - b(-k)e^{2kx}, & x \approx -\infty. \end{cases}$$

Нули этой функции $A = \psi_1^+ \psi_1^-$, удовлетворяющей линейному дифференциальному уравнению третьего порядка

$$A_{xxx} = 4UA_x + 2U_x A, \quad U = u - \lambda, \quad (22)$$

определяют, как известно, дополнительный спектр соответствующего уравнения Шредингера. В частности, при $N = 1$

$$u(x) = \gamma_1 \delta(x - x_1) \implies A = 1 + \frac{\gamma_1}{2k} (1 - e^{-2k|x-x_1|}).$$

Рассматриваемый класс финитных потенциалов (10) можно было бы расширить, используя преобразования Дарбу $\psi \rightarrow \hat{\psi}$:

$$\hat{\psi} = (f - D_x)\psi, \quad f' + f^2 = u(x) - \lambda,$$

где $\hat{\psi}$ и ψ удовлетворяют уравнению Шредингера с разными потенциалами,

$$\psi'' = (u(x) + k^2)\psi, \quad \hat{\psi}'' = (\hat{u}(x) + k^2)\hat{\psi}, \quad \hat{u} = u - 2f',$$

а в качестве f выбирается логарифмическая производная какого-нибудь частного решения исходного уравнения:

$$f = D_x \ln \varphi, \quad \varphi'' = (u(x) - \lambda)\varphi,$$

при подходящем выборе $\lambda \in \mathbb{C}$. Оба потенциала $\hat{u}$ и u являются финитными, если выполняются условия

$$f'(x) = 0, \quad D_x \ln \varphi = \text{const}, \quad |x| \gg 1.$$

Так как $\varphi(x) = c_1 e^{kx} + c_2 e^{-kx}$ вне носителя потенциала $u(x)$, это условие приводит нас с необходимостью к функциям Йоста и к задаче о нулях элементов матрицы рассеяния. В частности, при $\lambda = -k_0^2$, $a(k_0) = 0$

$$f = D \ln \varphi \implies \hat{a}(k) = a(k) \frac{k_0 + k}{k_0 - k}, \quad \hat{b}(k) = b(k). \quad (23)$$

ПРИМЕР 2. При $u(x) = \gamma\delta(x)$, используя единственный имеющийся здесь ноль функции $2ka(k) = 2k + \gamma$ (см. соотношение (3)), мы находим, что с точностью до преобразования Дарбу (23)

$$u(x) = \gamma\delta(x) \iff \hat{u} = -\gamma\delta(x).$$

При отрицательном γ ноль $k_0 = -\gamma/2$ находится в правой полуплоскости и соответствует собственной функции

$$\varphi(x) = \psi_1^+(x, k_0) = e^{-k_0|x|} \rightarrow 0, \quad x \rightarrow \pm\infty, \quad k_0 > 0.$$

Преобразование Дарбу переводит эту собственную функцию в ноль. Второе (растущее) линейно независимое решение $e^{|\gamma||x|/2}$ преобразуется при этом в функцию Йоста преобразованного уравнения с потенциалом $\hat{u}$ без собственных значений. При положительном γ всё происходит в обратном порядке.

2.1. Уравнения Кортевега–де Фриза и Пенлеве. Обсудим в сжатой форме известную связь автомодельных решений уравнения Кортевега–де Фриза (КдФ) с дифференциальными уравнениями Пенлеве и обобщенными симметриями уравнения Шредингера, которые мы записываем в следующем виде:

$$\psi_\tau = P\psi_x + Q\psi, \quad \lambda_\tau = \omega(\lambda).$$

Примером здесь служат уравнения

$$\psi_\tau = x\psi_x, \quad \lambda_\tau = 2\lambda \implies u_\tau = xu_x + 2u,$$

соответствующие группе растяжений

$$\psi(x, \lambda) \rightarrow \hat{\psi}(\hat{x}, \hat{\lambda}), \quad \hat{x} = e^\tau x, \quad \hat{\lambda} = e^{2\tau} \lambda, \quad \hat{u}(\hat{x}) = e^{2\tau} u(x), \quad (24)$$

которую допускает спектральная задача $\psi'' + \lambda\psi = u\psi$.

Условие совместности линейных задач

$$\psi_{xx} = U(x, \lambda)\psi, \quad D_\tau\psi = P\psi_x + Q\psi$$

приводит к соотношению $2Q_x + P_{xx} = 0$ и (ср. с (22)) уравнению

$$2D_\tau(U) = 4UP_x + 2U_xP - P_{xx}, \quad D_\tau = \partial_\tau + \omega(\lambda)\partial_\lambda. \quad (25)$$

В частности, при $\lambda_\tau = \omega(\lambda) = 0$ находим для уравнения КдФ, что

$$P = 4\lambda + 2u \implies u_t + u_{xxx} = 6uu_x. \quad (26)$$

При $\lambda_\tau \neq 0$ эволюционное уравнение (25) приводится (см. работу [7]) к виду

$$u_\tau + u_{xxx} = 6uu_x + \varepsilon_1(2u + xu_x) + 2\varepsilon_0,$$

а интересующие нас уравнения Пенлеве отвечают условию стационарности $u_\tau = 0$ в этом обобщенном уравнении КдФ.

Наряду с эволюционными уравнениями для потенциала $U = u - \lambda$ естественный интерес представляют самодостаточные уравнения, управляющие динамикой функций Йоста $\psi = \psi_j^\pm$. В рассмотренном выше случае уравнения (26) непосредственно из уравнений вспомогательной линейной задачи

$$D_t(\psi) = P\psi_x + Q\psi, \quad D_t(\psi_x) = (P_x + Q)\psi_x + (Q_x + UP)\psi, \quad Q = -\frac{1}{2}P_x \quad (27)$$

следует, как нетрудно проверить, что³⁾

$$\begin{aligned} \chi_t + \chi_{xxx} &= 2\chi_x^3 + 6\lambda\chi_x, & \chi &= \ln \psi, \\ f_t + f_{xxx} &= 6(f^2 + \lambda)f_x, & f &= \chi_x, & \lambda &= -k^2. \end{aligned} \quad (28)$$

Несложно проверить далее, что дифференциальные подстановки Миуры–Риккати

$$u = \pm f_x + f^2 + \lambda \quad (29)$$

переводят решения модифицированного уравнения КдФ (уравнения мКдФ) в решения (26). Аналогичные замены связывают и соответствующие уравнения Пенлеве (см. работу [7]).

Так как вид спектральной задачи не меняется при растяжениях (24), уравнения (28) при $\lambda = 0$ допускают семейство автомодельных решений, и подстановка в эти уравнения $f(t, x) = t^\alpha g(xt^\alpha)$ при $\alpha = -1/3$ дает

$$g_{xx}(x) = \frac{1}{3}xg(x) + 2g^3(x) + \text{const.} \quad (30)$$

Простейшим рациональным решениям $g = \pm x^{-1}$ полученного уравнения Пенлеве P2 отвечают, очевидно, стационарные решения $f(t, x) = g(x)$ уравнения мКдФ. Другие рациональные решения (30) можно получить (см. работу [7]) при помощи цепочки уравнений Риккати

$$g'_n + g'_{n+1} = g_n^2 - g_{n+1}^2, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad g_0 = 0.$$

Более сложный пример автомодельного решения уравнения (28) рассматривается ниже.

ПРИМЕР 3. Дифференцируя уравнение Риккати, мы получаем для линейного уравнения $\psi'' = \varepsilon x\psi$ при $\varepsilon = 1/6$ (ср. с (30))

$$g' = g^2 + \varepsilon x \implies g''(x) = \frac{1}{3}xg(x) + 2g^3(x) + \frac{1}{6}, \quad \varepsilon = \frac{1}{6}.$$

Убывающее при $x \rightarrow +\infty$ решение линейного уравнения $\psi'' = \varepsilon x\psi$, $\varepsilon > 0$, с асимптотикой вида

$$\ln \psi = \alpha \ln x + \beta x^\gamma + \dots, \quad (\ln \psi)_x = \frac{\alpha}{x} + \gamma \beta x^{\gamma-1} + \dots, \quad \gamma = \frac{3}{2}, \quad \gamma^2 \beta^2 = \varepsilon,$$

³⁾Простейшее решение $\chi(t, x) = kx - 4k^3t$ используется для нормировки функций Йоста при $x \rightarrow \pm\infty$.

приводит нас к функции Эйри

$$z(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(x\xi + \xi^3)} d\xi = \int_{\operatorname{Im} \zeta = \varepsilon > 0} e^{i(\zeta x + \zeta^3)} d\zeta \implies 3z_{xx} = xz \quad (31)$$

и автомодельному решению линейного уравнения

$$Z(t, x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(x\xi + t\xi^3)} d\xi \implies Z_t + Z_{xxx} = 0. \quad (32)$$

Функция Эйри положительна при $x \geq 0$, но имеет бесконечно много нулей при $x < 0$, так как (см. монографию [8])

$$z(x) \sim |x|^{-1/4} \cos(\beta|x|^{3/2} + \varepsilon_0) \left(1 + \frac{C_1}{|x|^{3/2}} + \dots \right), \quad x \approx -\infty.$$

Таким образом, соответствующее (31), (32) автомодельное решение уравнения мКдФ имеет при $t > 0$ полюсы на семействе кривых $x = x(t) = x_n t^{1/3}$, $x_n < 0$, связанных с нулями $z(x_n) = 0$ функции Эйри.

Выбрав в качестве начальных данных для уравнения КдФ δ -функцию,

$$u_t + u_{xxx} = 6uu_x, \quad u|_{t=0} = \gamma\delta(x), \quad (33)$$

можно было бы перейти к уравнению мКдФ и попытаться подобрать автомодельное решение $f(t, x) = t^\alpha g(xt^\alpha)$, подходящее для описания поведения решения рассматриваемой задачи при $|t| \gg 1$. Однако, хотя переход к уравнению (28) и снимает часть вопросов, связанных с перемножением обобщенных функций [9], вопрос о выборе начальных данных, соответствующих задаче (33), связан так или иначе с очевидной неединственностью решения уравнения Риккати $\pm f' + f^2 = \delta(x)$. Ниже этот вопрос обсуждается с точки зрения метода обратной задачи рассеяния.

3. УРАВНЕНИЕ ГЕЛЬФАНДА–ЛЕВИТАНА–МАРЧЕНКО И ЗАДАЧА ОБ АСИМПТОТИКЕ ПРИ $|t| \gg 1$

Как уже отмечалось (ср. с формулой (21)), в обратной задаче рассеяния исходным является следующее соотношение между функциями Йоста $\psi_j^\pm = \psi_j^\pm(t, x, k)$:

$$\psi_1^+ = a(k)\psi_2^+ + b(t, k)\psi_1^-, \quad b(t, k) = b(k)e^{-8k^3 t} \quad (34)$$

(зависимость $b(t, k)$ от t связана с нормировкой асимптотик функций Йоста в уравнениях (28)). Поведение функций $\psi_1^\pm$ как функций спектрального параметра k в правой полуплоскости $\operatorname{Re} k \geq 0$ указано в теореме 1, а дополнительная функция Йоста ψ_2^+ обладает аналогичными свойствами в левой полуплоскости $\operatorname{Re} k \leq 0$. Грубо говоря, преобразование Фурье по $\zeta = ik$ и теорема Винера–Пэли позволяют исключить из уравнений (21), (34) “лишнюю” функцию Йоста ψ_2^+ и получить семейство интегральных соотношений [4], в которых время t играет роль внешнего параметра (ср. с работой [10]):

$$\begin{aligned} \psi_1^+(x, k) &= e^{kx} + \int_{-\infty}^x K(x, y) e^{ky} dy, \quad \operatorname{Re} k \geq 0, \\ K(x, y) + F(x + y) + \int_{-\infty}^x K(x, s) F(s + y) ds &= 0, \quad y < x. \end{aligned} \quad (35)$$

Первое из них определяет, если использовать преобразование Фурье функций Йоста, ядро $K(x, y)$, $y < x$, как функцию от y при фиксированном x . Второе из этих соотношений – уравнение Гельфанда–Левитана–Марченко (ГЛМ) – используется для восстановления функции $K(x, y)$, $y < x$, как решения интегрального уравнения Винера–Хопфа на полуоси $-\infty < y \leq x$ с заданным ядром $F = F(x + y)$, стремящимся к нулю при $X = x + y \rightarrow -\infty$.

ПРИМЕР 4. Потенциалу $u(x) = -2\beta\delta(x)$ в уравнениях (35) соответствуют

$$K(x, y) = -\beta \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & |y| \leq x, \ x \geq 0, \end{cases} \quad F(X) = \begin{cases} 0, & X < 0, \\ \beta e^{\beta X}, & X \geq 0. \end{cases}$$

Действительно (ср. с примером 2), при $x > 0$

$$e^{kx} + \int_{-x}^x K(x, y) e^{ky} dy = \left(1 - \frac{\beta}{k}\right) e^{kx} + \frac{\beta}{k} e^{kx} = \psi_1^+(x, k),$$

а справедливость уравнения ГЛМ проверяется непосредственным вычислением соответствующего интеграла. Единственность решения интегрального уравнения (35) для ядра $K(x, y)$ оператора преобразования доказывается сведением к следующему однородному уравнению в $L^\infty(-\infty, x)$:

$$g(y) + \int_{-y}^x F(y + s)g(s) ds = 0, \quad y < x, \implies g'(y) = \beta(g(y) - g(-y)).$$

Чтобы перевести явную (зависящую экспоненциально от t) формулу для матрицы рассеяния в эволюционные уравнения для ядра $F = F(t, x + y)$ и функции $K = K(t, x, y)$, $y \leq x$, удобно использовать теорию вольтерровых операторов преобразования, инициированную работой [3]. Отметим, что при $k = -i\xi$ интегральный оператор $I + \hat{K}$ с ядром $K(x, y)$ переводит функции $e^{\pm \xi x}$ в соответствующие функции Йоста. Ядро $K(x, y)$ этого вольтеррова оператора преобразования удовлетворяет в полуплоскости $\{y \leq x\}$ условиям

$$(D_x^2 - D_y^2 - u(x))K(x, y) = 0, \quad K(x, x) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^x u(y) dy, \quad (36)$$

и стремится к нулю на семействе характеристик $x + y = X$ при $X \rightarrow -\infty$. В рассматриваемом нами финитном случае с дельтаобразными потенциалами (10)

$$\begin{aligned} K(x, y) &= 0 && \text{при } x + y < 2x_1, \quad y \leq x, \\ K(x, x) &= \frac{1}{2} \sum \gamma_j && \text{при } x > x_N. \end{aligned}$$

Развитая в связи с методом обратной задачи общая теория вольтерровых операторов преобразования приводит к достаточно простой схеме вычисления коэффициентов дифференциального оператора $L(D)$ из следующего условия:

$$L(D) \circ (1 + \hat{K}) - (1 + \hat{K}) \circ L_0(D) = \text{интегральный оператор}. \quad (37)$$

Заданными здесь являются произвольный дифференциальный оператор $L_0(D)$ и ядро интегрального оператора $K(x, y)$, $y \leq x$. Задача (37) решается интегрированием

по частям, и коэффициенты оператора $L(D)$ определяются однозначно. В результате мы получаем нужную нам общую формулу [11] для ядра $M(x, y)$, $y \leq x$, вольтеррова оператора в правой части формулы (37):

$$M(x, y) = L(D_x)K(x, y) - L_0^*(D_y)K(x, y),$$

где оператор $L_0^*(D)$ является формально сопряженным к $L_0(D)$. Указанное выше уравнение (36) соответствует, например, условию $M(x, y) = 0$ для дифференциального оператора $L_0(D) = D^2$.

Ничто не меняется при замене задачи (37) на задачу

$$[D_t + L(D_x)] \circ (1 + \hat{K}) - (1 + \hat{K}) \circ [D_t + L_0(D_x)] = \widehat{M},$$

только к ядру $M(t, x, y)$ интегрального оператора $\widehat{M}$ добавляется слагаемое $K_t(t, x, y)$, которое отвечает коммутатору операторов $[D_t, \hat{K}]$, действующих на гладкие функции от переменных (t, x) :

$$M(t, x, y) = K_t + L(D_x)K(t, x, y) - L_0^*(D_y)K(t, x, y).$$

Коэффициенты дифференциального оператора $L(D)$ по-прежнему определяются здесь уравнением (37), в котором переменная t играет роль параметра. В частности, при $L_0(D) = D^3$, $L_0^*(D) = -D^3$ мы имеем $L(D) = D^3 + fD + g$, и условие $\widehat{M} = 0$ дает

$$K_t + K_{xxx} + K_{yyy} + p(t, x)K_x + q(t, x)K = 0, \quad (38)$$

где, например, $p(t, x) = -3(K_x + K_y)(t, x, x)$. Это уравнение вместе с (36) должно гарантировать, что вольтерров оператор преобразования $1 + \hat{K}$ переводит экспоненты в функции Йоста, удовлетворяющие эволюционным уравнениям (28) и (27). С другой стороны, рассматривая ядро $K(t, x, y)$ как решение задачи Гурса с данными на характеристике $\Gamma = \{y - x = 0\}$, можно проверить, что уравнение (38) сводится на этой прямой Γ к уравнению КдФ (26) (см. работу [11]). Достаточно для этого выразить $(K_x - K_y)|_\Gamma$ через K_Γ при помощи гиперболического уравнения (36).

Рассмотрим теперь интегральное уравнение ГЛМ для вольтеррова ядра $K(t, x, y)$, определяющего преобразование операторов $L_0(D) \rightarrow L(D)$, и потребуем, чтобы “ядро” $V(t, x, y) = F(t, x + y)$ уравнения (35) удовлетворяло следующим двум уравнениям:

$$V_t = V_{xxx} + V_{yyy}, \quad V_{xx} - V_{yy} = 0. \quad (39)$$

Первое из них связано с оператором $L_0 = D_t + D_x^3$, а второе – с $L_0 = D_x^2$. Как было показано в работе [11], этих условий (и условия однозначной разрешимости) достаточно для того, чтобы доказать, что выполнены полученное выше уравнение (38), а также гиперболическое уравнение (36). Как из решения уравнения (38) получаются решения уравнения КдФ, объяснялось выше. Таким образом, посредством линейного уравнения (35) и задачи Коши для первого из уравнений (39),

$$F_t(t, X) = 2F_{XX}(t, X), \quad X = x + y, \quad F(0, X) = F_0(X), \quad (40)$$

можно строить решения уравнения КдФ. В случае задачи (33), как было показано выше,

$$F_0(X) = \begin{cases} 0, & X < 0, \\ \beta e^{\beta X}, & X \geq 0, \end{cases}$$

причем (см. пример 2) потенциалы $u(x) = -2\beta\delta(x)$ с параметрами $\beta > 0$ и $\beta < 0$ переходят друг в друга в результате преобразования Дарбу. Если $\beta < 0$, то солитонный сектор отсутствует, и асимптотика при $t \rightarrow -\infty$ решения $K(t, x, y)$ уравнений (38) и (35) является автомодельной, по крайней мере в расширяющейся области $\Omega_h = \{y \leq x \leq h|t|^{1/3}, h > 0\}$:

$$K(t, x, y) \approx t^{-1/3} \widehat{K}\left(\frac{x}{t^{1/3}}, \frac{y}{t^{1/3}}\right).$$

Соответствующее автомодельное решение линейного уравнения (40) выражается через функцию Эйри (ср. с формулами (32) и (31)). Эти опубликованные в короткой заметке [11] утверждения можно дополнить оценкой $h > 0$, связанной с доказанным отсутствием нулей на положительной части вещественной оси у решения, асимптотически эквивалентного при $x \rightarrow \infty$ решению из примера 3, но удовлетворяющего другому частному случаю второго уравнения Пенлеве (30) с нулевой константой в правой части:

$$g''(x) = 2g^3 + \frac{1}{3}xg. \quad (41)$$

Отметим также, что замена независимой переменной $x^3 = \tau^2$ и, соответственно,

$$D_x^2 \sim \frac{1}{\tau^2} \left(\tau D_\tau - \frac{2}{3} \right) \tau D_\tau$$

приводят линейную часть этого уравнения к виду уравнения для функций Бесселя с показателем $n = 1/3$.

Одну из задач, широко обсуждающихся в солитонной тематике в последнее время, можно было бы сформулировать в применении к модельному для этой тематики уравнению КдФ как задачу о начальных данных, заданных при $t = -T$, $T \gg 1$, которые приводят к чему-то, напоминающему $u(0, x) \sim \delta(x)$ при $t = 0$ (см. работы [12], [9]). Кроме ответа, связанного с отысканием подходящего продолжения на $x < 0$ решения уравнения (41) и автомодельных решений, хотелось бы опробовать на этой интересной задаче альтернативный подход к вопросу о построении точных решений уравнения КдФ, предложенный в недавней работе [6]. В этом подходе основное уравнение (21) используется для того, чтобы зафиксировать отношение функций Йоста $\psi_1^\pm$ в нулях функции $a(k)$. Ключевым в возникающей рациональной интерполяционной задаче является выбор подходящего для аппроксимации конечного набора нулей функции $a(k)$. Естественными кандидатами на роль этих узлов интерполяции в сформулированной задаче о $u(0, x) \sim \delta(x)$ являются кратный ноль в точке $k = 0$ и нули функции $a(k)$, расположенные при отсутствии солитонов в полуплоскости $\text{Re } k < 0$ (см. работу [5]).

Благодарности. Настоящая работа выполнена в рамках Программы РАН “Нелинейная динамика” при финансовой поддержке РФФИ (гранты № 14-01-96501 р-юг_а, 13-01-12460-офи_м-2013, 13-01-00070), а также Программы поддержки научных школ (грант НШ-3139.2014.2).

Список литературы

- [1] А. Б. Шабат, *Функц. анализ и его прил.*, **9**:3 (1975), 75–78.
- [2] Е. Korotyaev, *Inverse Probl.*, **21**:1 (2005), 325–341.
- [3] А. Я. Повзнер, *Матем. сб.*, **23(65)**:1, 3–52.
- [4] З. С. Агранович, В. А. Марченко, *Обратная задача теории рассеяния*, Изд-во Харьковского ун-та, Харьков, 1960.
- [5] М. Ш. Бадахов, О. Ю. Веремеенко, А. Б. Шабат, *Владикавказ. матем. журн.*, **16**:4 (2014), 34–40.
- [6] А. Б. Шабат, *ТМФ*, **179**:3 (2014), 303–316.
- [7] В. Э. Адлер, А. Б. Шабат, Р. И. Ямилов, *ТМФ*, **125**:3 (2000), 355–424.
- [8] А. М. Ильин, А. Р. Данилин, *Асимптотические методы в анализе*, Физматлит, М., 2009.
- [9] S. Grudsky, A. Rybkin, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **2014**:6, 2079–2086.
- [10] C. S. Gardner, J. M. Greene, M. D. Kruskal, R. M. Miura, *Phys. Rev. Lett.*, **19**:19 (1967), 1095–1097.
- [11] А. Б. Шабат, *Докл. АН СССР*, **211**:6 (1973), 1310–1313.
- [12] S. I. Pohozaev, *Nonlinear Anal.*, **75**:12 (2012), 4688–4698.

Поступила в редакцию 25.08.2014