Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. А. Тайманов, Разрушающиеся решения модифицированного уравнения Веселова–Новикова и минимальные поверхности, *ТМФ*, 2015, том 182, номер 2, 213–222

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8785>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.5.30

26 апреля 2023 г., 15:52:54

© 2015 г.

И. А. Тайманов^{*†}

РАЗРУШАЮЩИЕСЯ РЕШЕНИЯ МОДИФИЦИРОВАННОГО УРАВНЕНИЯ ВЕСЕЛОВА–НОВИКОВА И МИНИМАЛЬНЫЕ ПОВЕРХНОСТИ

Предложена конструкция разрушающихся решений модифицированного уравнения Веселова–Новикова, основанная на преобразовании Мутара двумерных операторов Дирака и его геометрической интерпретации в терминах геометрии поверхностей. Рассмотрен явный пример такого решения, построенный с помощью минимальной поверхности Эннепера.

Ключевые слова: разрушающееся решение, модифицированное уравнение Веселова–Новикова, преобразование Мутара, двумерный оператор Дирака, представление Вейерштрасса поверхностей, минимальные поверхности.

DOI: 10.4213/tmf8785

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящей статье построено решение модифицированного уравнения Веселова–Новикова (двумерного обобщения модифицированного уравнения Кортевега–де Фриза), которое имеет особенность в точности в одной точке (теорема 2, см. раздел 4).

Решение задано явной формулой

$$\begin{aligned}\tilde{U}(x, y, t) &= - \frac{3((x^2 + y^2 + 3)(x^2 - y^2) - 6x(C - t))}{Q(x, y, t)}, \\ Q(x, y, t) &= (x^2 + y^2)^3 + 3(x^4 + y^4) + 18x^2y^2 + 9(x^2 + y^2) + \\ &\quad + 9(C - t)^2 + (6x^3 - 18xy^2 - 18x)(C - t),\end{aligned}\tag{1}$$

из которой ясно, что оно обладает следующими свойствами:

1) оно бесконечно дифференцируемо (и даже вещественно-аналитично) всюду вне точки $x = y = 0$, $t = C = \text{const}$, в которой оно не определено и имеет различные

^{*}Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия.
E-mail: taimanov@math.nsc.ru

[†]Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия

конечные предельные значения вдоль лучей $x/y = \text{const}$, $t = C$, входящих в эту точку;

2) его ограничения на все плоскости $t = \text{const}$ убывают как $O(1/r^2)$ и, в частности, имеют конечные L_2 -нормы;

3) первый интеграл (закон сохранения)

$$\int_{\mathbb{R}^2} \tilde{U}^2 dx dy$$

имеет одно и то же значение, равное 3π при $t \neq C$ и 2π при $t = C$.

Метод построения таких решений дается теоремой 1 (см. раздел 4) и мы рассматриваем в деталях только простейший пример. Он основан на геометрической интерпретации [1] преобразования Мутара двумерных операторов Дирака [2].

2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ФАКТЫ

2.1. Модифицированное уравнение Веселова–Новикова. Модифицированное уравнение Веселова–Новикова (уравнение мВН) имеет вид

$$U_t = \left(U_{zzz} + 3U_z V + \frac{3}{2} U V_z \right) + \left(U_{\bar{z}\bar{z}\bar{z}} + 3U_{\bar{z}} \bar{V} + \frac{3}{2} U \bar{V}_{\bar{z}} \right), \quad (2)$$

где $V_{\bar{z}} = (U^2)_z$, $z = x + iy \in \mathbb{C}$, U – вещественнозначная функция.

Для корректной постановки необходимо однозначно разрешить последнее условие, определяющее функцию V . Например, для быстроубывающих решений U мы можем сделать это, предположив, что V также быстро убывает.

Уравнение имеет вид (L, A, B) -тройки Манакова:

$$\mathcal{D}_t + [\mathcal{D}, \mathcal{A}] - \mathcal{B}\mathcal{D} = 0,$$

где $\mathcal{D}$ – двумерный оператор Дирака:

$$\mathcal{D} = \begin{pmatrix} 0 & \partial \\ -\bar{\partial} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix}, \quad (3)$$

$\partial = \partial/\partial z$ и $\bar{\partial} = \partial/\partial \bar{z}$,

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \partial^3 + \bar{\partial}^3 + 3 \begin{pmatrix} V & 0 \\ U_z & 0 \end{pmatrix} \partial + 3 \begin{pmatrix} 0 & -U_{\bar{z}} \\ 0 & \bar{V} \end{pmatrix} \bar{\partial} + \frac{3}{2} \begin{pmatrix} V_z & 2U\bar{V} \\ -2UV & \bar{V}_{\bar{z}} \end{pmatrix}, \\ \mathcal{B} &= 3 \begin{pmatrix} -V & 0 \\ -2U_z & V \end{pmatrix} \partial + 3 \begin{pmatrix} \bar{V} & 2U_{\bar{z}} \\ 0 & -\bar{V} \end{pmatrix} \bar{\partial} + \frac{3}{2} \begin{pmatrix} \bar{V}_{\bar{z}} - V_z & 2U_{\bar{z}\bar{z}} \\ -2U_{zz} & V_z - \bar{V}_{\bar{z}} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4)$$

Если U зависит только от x и при этом $V = U^2$, то это уравнение сводится к модифицированному уравнению Кортевега–де Фриза

$$U_t = \frac{1}{4} U_{xxx} + 6U_x U^2.$$

Уравнение мВН было введено в работе [3] и своим названием обязано уравнению Веселова–Новикова, введенному в [4] (см. также [5]) и являющемуся аналогичной двумеризацией уравнения Кортевега–де Фриза.

2.2. Представление Вейерштрасса минимальных поверхностей. Поверхность в пространстве $\mathbb{R}^3$ называется минимальной, если ее средняя кривизна всюду равна нулю: $H = 0$.

Представление Вейерштрасса сопоставляет каждой паре голоморфных функций $\psi_1, \psi_2: \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}$ минимальную поверхность

$$F: \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad F = (u^1, u^2, u^3),$$

заданную формулами

$$\begin{aligned} u^1(P) &= \frac{i}{2} \int_{P_0}^P ((\psi_1^2 + \bar{\psi}_2^2) dz - (\bar{\psi}_1^2 + \psi_2^2) d\bar{z}) + u^1(P_0), \\ u^2(P) &= \frac{1}{2} \int_{P_0}^P ((\bar{\psi}_2^2 - \psi_1^2) dz + (\psi_2^2 - \bar{\psi}_1^2) d\bar{z}) + u^2(P_0), \\ u^3(P) &= \int_{P_0}^P (\psi_1 \bar{\psi}_2 dz + \bar{\psi}_1 \psi_2 d\bar{z}) + u^3(P_0), \end{aligned} \quad (5)$$

где (u^1, u^2, u^3) – евклидовы координаты в $\mathbb{R}^3$, $P_0 \in \mathcal{U}$ и интеграл берется по пути в $\mathcal{U}$, соединяющему P_0 и P . Если область $\mathcal{U}$ односвязна, то интеграл не зависит от выбора пути. Полученная поверхность погружена вне точек ветвления, в которых индуцированная метрика

$$ds^2 = e^{2\alpha} dz d\bar{z} = (|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2)^2 dz d\bar{z} \quad (6)$$

равна нулю. Единичный вектор нормали равен

$$\mathbf{n} = \frac{1}{|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2} (i(\psi_1 \psi_2 - \bar{\psi}_1 \bar{\psi}_2), -(\psi_1 \psi_2 + \bar{\psi}_1 \bar{\psi}_2), (|\psi_2|^2 - |\psi_1|^2)).$$

Формулы (5) задают поверхность с точностью до сдвигов, т. е. с точностью до $F(P_0)$.

Известно, что любая минимальная поверхность в $\mathbb{R}^3$ допускает такое представление.

2.3. Поверхность Эннепера. Поверхность Эннепера является погруженной (не вложенной) минимальной поверхностью, которая определяется по формулам (5) вектор-функцией

$$\psi_1 = z, \quad \psi_2 = 1.$$

Подставляя ее в (5), мы получаем

$$\begin{aligned} u^1(x, y) &= y \left(\frac{y^2}{3} - x^2 - 1 \right) + u_0^1, \\ u^2(x, y) &= x \left(1 + y^2 - \frac{x^2}{3} \right) + u_0^2, \\ u^3(x, y) &= x^2 - y^2 + u_0^3, \end{aligned} \quad (7)$$

где $\mathbf{u}_0 = (u_0^1, u_0^2, u_0^3)$ – образ начала координат $x = y = 0$ при погружении.

3. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ МУТАРА

Пусть $\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$ – решение уравнения Дирака

$$\mathcal{D}\psi = 0,$$

где $\mathcal{D}$ – оператор Дирака (3). Легко заметить, что $\psi^* = \begin{pmatrix} -\bar{\psi}_2 \\ \bar{\psi}_1 \end{pmatrix}$ удовлетворяет тому же уравнению. Составим матричнозначную функцию Ψ из ψ и ψ^* следующим образом:

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_1 & -\bar{\psi}_2 \\ \psi_2 & \bar{\psi}_1 \end{pmatrix}.$$

Она удовлетворяет матричному уравнению Дирака

$$\mathcal{D}\Psi = 0. \quad (8)$$

Обозначим через H пространство, образованное всеми матрицами вида $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, и положим

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что H замкнуто относительно произведений и $\Gamma, \Psi \in H$.

При $U = 0$ мы получаем оператор

$$\mathcal{D}_0 = \begin{pmatrix} 0 & \partial \\ -\bar{\partial} & 0 \end{pmatrix}$$

и вектор-функции ψ , которые задают минимальные поверхности посредством (5) и являются в точности решениями уравнения $\mathcal{D}_0\psi = 0$.

Для заданных скалярных функций U и V сопоставим H -значным функциям Φ и Ψ матричнозначную 1-форму

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}(\Phi, \Psi) &= \Phi^\top \Psi dy - i\Phi^\top \sigma_3 \Psi dx + \left[i(\Phi_{yy}^\top \sigma_3 \Psi + \Phi^\top \sigma_3 \Psi_{yy} - \Phi_y^\top \sigma_3 \Psi_y) + \right. \\ &\quad \left. + 2iU(\Phi_y^\top \sigma_2 \Psi - \Phi^\top \sigma_2 \Psi_y) + \Phi^\top \begin{pmatrix} iU^2 - 3iV & -iU_x \\ -iU_x & -iU^2 + 3i\bar{V} \end{pmatrix} \Psi \right] dt = \\ &= -\frac{i}{2}(\Phi^\top \sigma_3 \Psi + \Phi^\top \Psi) dz - \frac{i}{2}(\Phi^\top \sigma_3 \Psi - \Phi^\top \Psi) d\bar{z} + \\ &\quad + \left[-i((\Phi_{zz}^\top + \Phi_{\bar{z}\bar{z}}^\top - 2\Phi_{z\bar{z}}^\top) \sigma_3 \Psi + \Phi^\top \sigma_3 (\Psi_{zz} + \Psi_{\bar{z}\bar{z}} - 2\Psi_{z\bar{z}}) - \right. \\ &\quad \left. - (\Phi_z^\top - \Phi_{\bar{z}}^\top) \sigma_3 (\Psi_z - \Psi_{\bar{z}})) - 2U((\Phi_z^\top - \Phi_{\bar{z}}^\top) \sigma_2 \Psi - \Phi^\top \sigma_2 (\Psi_z - \Psi_{\bar{z}})) + \right. \\ &\quad \left. + \Phi^\top \begin{pmatrix} iU^2 - 3iV & -i(U_z + U_{\bar{z}}) \\ -i(U_z + U_{\bar{z}}) & -iU^2 + 3i\bar{V} \end{pmatrix} \Psi \right] dt \end{aligned} \quad (9)$$

и матричнозначные функции

$$\begin{aligned}\tilde{S}(\Phi, \Psi)(z, \bar{z}, t) &= \Gamma \int_0^z \tilde{\omega}(\Phi, \Psi), \\ K(\Psi) &= \Psi \tilde{S}^{-1}(\Psi, \Psi) \Gamma \Psi^\top \Gamma^{-1}, \\ M(\Psi) &= \Gamma \Psi_y \Psi^{-1} \Gamma^{-1} = i \Gamma (\Psi_z - \Psi_{\bar{z}}) \Psi^{-1} \Gamma^{-1}.\end{aligned}$$

Следующее преобразование Мутара решений уравнения мВН было введено в работе [2].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1 [2]. Пусть функции $U(z, \bar{z}, t)$ и $V(z, \bar{z}, t)$ удовлетворяют уравнению мВН (2), $\mathcal{D}$ – семейство операторов Дирака с потенциалами $U(z, \bar{z}, t)$, а $\Psi_0(z, \bar{z}, t)$ – удовлетворяет системе уравнений

$$\mathcal{D}\Psi_0 = 0, \quad \frac{\partial \Psi_0}{\partial t} = \mathcal{A}\Psi_0,$$

где $\mathcal{A}$ имеет вид (4). Тогда справедливы следующие утверждения.

1. Матрицы $K(\Psi_0)$ и $M(\Psi_0)$ принимают вид

$$K = \begin{pmatrix} iW & a \\ -\bar{a} & -iW \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} b & c \\ -\bar{c} & \bar{b} \end{pmatrix},$$

где W – вещественнозначная функция.

2. Для каждого решения Ψ уравнений (8) и

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \mathcal{A}\Psi$$

функция $\tilde{\Psi}$ вида

$$\tilde{\Psi} = \Psi - \Psi_0 \tilde{S}^{-1}(\Psi_0, \Psi_0) \tilde{S}(\Psi_0, \Psi)$$

удовлетворяет уравнениям

$$\tilde{\mathcal{D}}\tilde{\Psi} = 0$$

для оператора Дирака $\tilde{\mathcal{D}}$ с потенциалом

$$\tilde{U} = U + W \tag{10}$$

и

$$\frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial t} = \tilde{\mathcal{A}}\tilde{\Psi},$$

где $\tilde{\mathcal{A}}$ имеет вид (4) с заменой U на $\tilde{U}$ и V на $\tilde{V}$:

$$\tilde{V} = V + 2UW + a^2 + 2(a\bar{b} - i\bar{c}W).$$

3. Функция $\tilde{U}$ является вещественнозначной, и функции $\tilde{U}$ и $\tilde{V}$ удовлетворяют уравнению мВН

$$\begin{aligned}\tilde{U}_t &= \left(\tilde{U}_{zzz} + 3\tilde{U}_z \tilde{V} + \frac{3}{2} \tilde{U} \tilde{V}_z \right) + \left(\tilde{U}_{\bar{z}\bar{z}\bar{z}} + 3\tilde{U}_{\bar{z}} \bar{\tilde{V}} + \frac{3}{2} \tilde{U} \bar{\tilde{V}}_{\bar{z}} \right), \\ \tilde{V}_{\bar{z}} &= (\tilde{U}^2)_{\bar{z}}.\end{aligned} \tag{11}$$

4. МИНИМАЛЬНЫЕ ПОВЕРХНОСТИ И РАЗРУШАЮЩИЕСЯ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ мВН

Применим предложение 1 к оператору с нулевым потенциалом $U = 0$. Хотя он задает стационарное решение уравнения мВН, преобразование Мутара приводит к нетривиальному нестационарному решению уравнения мВН. Аналогичный эффект был замечен и использован для уравнения Веселова–Новикова [6], [7].

Прямыми вычислениями мы выводим следующую теорему.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\psi_1(z, \bar{z}, t)$ и $\psi_2(z, \bar{z}, t)$ – функции, удовлетворяющие уравнениям

$$\bar{\partial}\psi_1 = \bar{\partial}\bar{\psi}_2 = 0, \quad \frac{\partial\psi_1}{\partial t} = \frac{\partial^3\psi_1}{\partial z^3}, \quad \frac{\partial\psi_2}{\partial t} = \frac{\partial^3\psi_2}{\partial \bar{z}^3}.$$

Тогда

$$\tilde{S}(\Psi_0, \Psi_0)(z, \bar{z}, t) = \begin{pmatrix} iu^3 & -u^1 - iu^2 \\ u^1 - iu^2 & -iu^3 \end{pmatrix} + i \int_0^t \begin{pmatrix} w & \bar{v} \\ v & -w \end{pmatrix} d\tau, \quad (12)$$

где

$$\Psi_0 = \begin{pmatrix} \psi_1 & -\bar{\psi}_2 \\ \psi_2 & \bar{\psi}_1 \end{pmatrix},$$

минимальные поверхности $F(z, \bar{z}, t) = (u^1, u^2, u^3)$ задаются функциями ψ_1 и ψ_2 с помощью формул (5), $\mathbf{u}_0$ не зависит от времени и

$$v = (\psi_{1,z}^2 - \psi_{2,\bar{z}}^2) - 2(\psi_1\psi_{1,zz} - \psi_2\psi_{2,\bar{z}\bar{z}}), \\ w = \psi_{1,z}\bar{\psi}_{2,z} + \bar{\psi}_{1,\bar{z}}\psi_{2,\bar{z}} - \psi_{1,zz}\bar{\psi}_2 - \psi_1\bar{\psi}_{2,\bar{z}\bar{z}} - \bar{\psi}_{1,\bar{z}\bar{z}}\psi_2 - \bar{\psi}_1\psi_{2,\bar{z}\bar{z}}.$$

Теорема 1 показывает, что $\tilde{S}$ – деформация минимальной поверхности, которая зависит от t и задается вторым членом в (12). Мы приходим к следующему заключению:

Чтобы получить разрушающееся решение уравнения мВН, мы должны найти такие ψ_1 и ψ_2 , чтобы они удовлетворяли условиям теоремы 1 и матрица $\tilde{S}$ вырождалась в некоторый момент времени.

Простейший кандидат на роль таких функций дается поверхностью Эннепера. В этом случае

$$\psi_1 = z, \quad \psi_2 = 1, \quad v = 1, \quad w = 0.$$

Отобразим начало координат в точку

$$u_0^1 = u_0^3 = 0, \quad u_0^2 = C > 0,$$

и согласно (7) получим

$$\tilde{S}(x, y, t) = \begin{pmatrix} iu^3 & -u^1 - iu^2 + it \\ u^1 - iu^2 + it & -iu^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \delta \\ -\bar{\delta} & \bar{\gamma} \end{pmatrix},$$

где

$$\gamma = i(x^2 - y^2), \quad \delta = -y\left(\frac{y^2}{3} - x^2 - 1\right) - i\left[x\left(1 + y^2 - \frac{x^2}{3}\right) + C - t\right]. \quad (13)$$

Также легко вывести, что

$$K = \begin{pmatrix} z & -1 \\ 1 & \bar{z} \end{pmatrix} \tilde{S}^{-1} \begin{pmatrix} \bar{z} & 1 \\ -1 & z \end{pmatrix},$$

$$M = \frac{i}{1 + |z|^2} \begin{pmatrix} -z & -1 \\ -1 & \bar{z} \end{pmatrix}$$

и, следовательно,

$$W = -i \frac{|z|^2 \bar{\gamma} + \gamma + \delta z - \bar{\delta} \bar{z}}{|\gamma|^2 + |\delta|^2}, \quad a = \frac{z(\bar{\gamma} - \gamma) - \delta z^2 - \bar{\delta}}{|\gamma|^2 + |\delta|^2},$$

$$b = -\frac{iz}{1 + |z|^2}, \quad c = -\frac{i}{1 + |z|^2}.$$

Поскольку $U = V = 0$, мы окончательно получаем

$$\tilde{U} = -i \frac{|z|^2 \bar{\gamma} + \gamma + \delta z - \bar{\delta} \bar{z}}{|\gamma|^2 + |\delta|^2}, \quad (14)$$

$$\tilde{V} = \frac{(z(\bar{\gamma} - \gamma) - \delta z^2 - \bar{\delta})^2}{(|\gamma|^2 + |\delta|^2)^2} + \frac{2\tilde{U}}{1 + |z|^2} - 2 \frac{iz(z(\bar{\gamma} - \gamma) - \delta z^2 - \bar{\delta})}{(|\gamma|^2 + |\delta|^2)(1 + |z|^2)}, \quad (15)$$

где γ и δ заданы в (13).

Положим $r = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$. Ясно, что

$$b = O\left(\frac{1}{r}\right), \quad c = O\left(\frac{1}{r^2}\right) \quad \text{при } r \rightarrow \infty.$$

Согласно (13) мы имеем

$$\gamma = O(r^2), \quad \delta = O(r^3), \quad a = O\left(\frac{1}{r}\right)$$

и окончательно заключаем, что

$$\tilde{U} = O\left(\frac{1}{r^2}\right), \quad \tilde{V} = O\left(\frac{1}{r^2}\right) \quad \text{при } r \rightarrow \infty. \quad (16)$$

Данные функции $\tilde{U}$ и $\tilde{V}$ могут иметь особенности только в точках, где $|\gamma|^2 + |\delta|^2 = 0$, т. е. в точности в точках, в которых движущаяся поверхность Эннепера $(u^1, u^2 - t, u^3)$ проходит через начало координат. Это движение сохраняет u^1 и u^3 , и, поскольку мы предполагаем, что $u_0^1 = u_0^3 = 0$, из (7) следует, что $u^1 = u^3 = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y = 0$. Но при $x = y = 0$ мы имеем $u^2 = C = \text{const}$ и тем самым

$$|\gamma|^2 + |\delta|^2 = 0 \quad \text{тогда и только тогда, когда} \quad t = C.$$

ТЕОРЕМА 2. Функции $\tilde{U}$ (14) и $\tilde{V}$ (15) при γ и δ , заданных в (13):

- 1) удовлетворяют уравнению мВН (11);
- 2) убывают по крайней мере квадратично по r : $\tilde{U} = O(r^{-2})$, $\tilde{V} = O(r^{-2})$;
- 3) являются вещественно-аналитическими при $t \neq C$;
- 4) имеют особенности в точности при $x = y = 0$, $t = C$; в этой точке функция $\tilde{U}$ не определена и

$$\lim_{\substack{r \rightarrow 0, \\ \varphi = \text{const}}} \tilde{U}(z, \bar{z}, C) = -\cos 2\varphi \quad \text{при} \quad z = re^{i\varphi}. \quad (17)$$

Функция $\tilde{U}$ удовлетворяет равенству

$$\int_{\mathbb{R}^2} |\tilde{U}|^2 dx dy = \begin{cases} 3\pi & \text{при } t \neq C, \\ 2\pi & \text{при } t = C. \end{cases} \quad (18)$$

Утверждения 1–3 теоремы 2 были установлены выше.

Утверждение 4 вытекает из формулы (1), которая непосредственно выводится из (14). При $C = t$ формула (14) сводится к

$$\tilde{U} = -\frac{3r^2(r^2 + 3)\cos 2\varphi}{r^2(r^4 + 3r^2(1 + \sin^2 2\varphi) + 9)}, \quad (19)$$

где r и φ – полярные координаты: $x + iy = ze^{i\varphi} = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$.

Последнее утверждение теоремы будет доказано в следующем разделе.

5. ГЕОМЕТРИЯ РАЗРУШАЮЩЕГОСЯ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ мВН

Изложение геометрических свойств решения основано на явных формулах для действия инверсии Мёбиуса на данных представления Вейерштрасса поверхностей [1] и на связи величины $\int U^2 dx dy$ с функционалом Уиллмора [8].

Любая поверхность в пространстве $\mathbb{R}^3$ задается формулами (5) (представление Вейерштрасса), где спинор ψ удовлетворяет уравнению Дирака

$$\mathcal{D}\psi = \left[\begin{pmatrix} 0 & \partial \\ -\bar{\partial} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix} \right] \psi.$$

При этом z является конформным параметром на поверхности таким, что индуцированная метрика имеет вид (6) и вещественнозначный потенциал U равен

$$U = \frac{e^\alpha H}{2} = \frac{(|\psi_1|^2 + |\psi|^2)H}{2},$$

где H – средняя кривизна поверхности [8]–[10]. При $H = 0$, т. е. для минимальных поверхностей, мы имеем изложенное выше представление Вейерштрасса минимальных поверхностей.

В работе [1] мы показали, что имеют место следующие факты.

1. Редуцированная матричная функция

$$S(\Psi_0, \Psi_0)(x, y, t) = \Gamma \int -\frac{i}{2} (\Psi_0^\top (\sigma_3 + 1) \Psi_0 dz + \Psi_0^\top (\sigma_3 - 1) \Psi_0 d\bar{z}),$$

где

$$\Psi_0 = \begin{pmatrix} \psi_1 & -\bar{\psi}_2 \\ \psi_2 & \bar{\psi}_1 \end{pmatrix},$$

имеет вид

$$\begin{pmatrix} iu^3 & -u^1 - iu^2 \\ u^1 - iu^2 & -iu^3 \end{pmatrix} \in su(2) \approx \mathbb{R}^3, \quad (20)$$

где $\Sigma_t = (u^1, u^2, u^3)$ – поверхность, заданная с точностью до сдвигов функций $\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$ посредством формул (5) в каждый момент времени t .

2. Инверсия Мёбиуса пространства $\mathbb{R}^3 \cup \{\infty\} = S^3$ в терминах (20) принимает простой вид

$$S \rightarrow S^{-1},$$

и если поверхность Σ задана функцией Ψ_0 , то ее образ при инверсии задан функцией

$$\tilde{\Psi} = \Psi_0 \cdot S^{-1}$$

посредством тех же формул (5).

3. Потенциал U преобразуется при инверсии по формуле (10), т. е. под действием преобразования Мутара из предложения 1, с заменой $\tilde{S}$ на S в определении $K(\Psi)$.

Разрушающееся решение уравнения мВН, приведенное в разделе 4, имеет очень простой геометрический смысл. Стационарная функция $\psi = \begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix}$ определяет погружение S_0 поверхности Эннепера Σ_0 , матричная функция $\tilde{S}$ равна

$$\tilde{S}(x, y, t) = S_0(x, y) + \begin{pmatrix} 0 & it \\ it & 0 \end{pmatrix}$$

и определяет жесткую трансляцию Σ_t начальной поверхности Эннепера вдоль оси u^2 : $u^2 \rightarrow u^2 - t$. Поскольку все поверхности Σ_t минимальны, они имеют один и тот же потенциал $U = 0$, однако потенциалы их инверсий Σ_t^{-1} различны и равны $\tilde{U}(x, y, t)$ (14). Поверхности Эннепера Σ_t проходят через начало координат только в точке $x = y = 0$ и только в момент времени $t = C$, при этом инверсия переводит эту точку в бесконечность, Σ_C^{-1} становится некомпактной, а потенциал $\tilde{U}$ приобретает сингулярность в точке $x = y = 0, t = C$.

Величина $4 \int \tilde{U}^2 dx dy$ задает закон сохранения уравнения мВН и равна значению функционала Уиллмора (интегралу от квадрата средней кривизны) на поверхности, в нашем случае на Σ_t^{-1} [8].

Теперь последнее утверждение теоремы 2 следует, например, из вычислений значений функционала Уиллмора на инверсиях поверхности Эннепера [11].

6. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

1. Деформация Σ_t^{-1} является примером эволюции поверхностей согласно уравнению мВН, введенной в работе [9] для поверхностей, “индуцированных” формулами (5).

2. Построенное решение является специальным с нескольких точек зрения:

а) $\tilde{S}(x, y, t)$ распадается в сумму $S_0(x, y) + P(t)$, т. е. задает жесткую трансляцию минимальной поверхности;

б) инверсии поверхности Эннепера обладают многими интересными геометрическими свойствами и, в частности, являются сферами Уиллмора с точками ветвления [11].

Отвечают ли жесткие трансляции других минимальных поверхностей аналогичным образом интегрируемым солитонным уравнениям?

3. Другие вычислимые интересные примеры могут быть найдены с помощью поверхностей Эннепера большого порядка, определенных функциями $\psi = \begin{pmatrix} z^k \\ 1 \end{pmatrix}$ и солитонными сферами (которые не являются минимальными поверхностями) [12], [13].

Результаты этой статьи были кратко анонсированы в работе [14].

Благодарности. Работа поддержана РНФ (грант № 14-11-00441).

Список литературы

- [1] И. А. Тайманов, *Матем. заметки*, **97**:1 (2015), 126–138, [arXiv:1408.4464](#).
- [2] Delong Yu, Q. P. Liu, Shikun Wang, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **35**:16 (2001), 3779–3785.
- [3] Л. В. Богданов, *ТМФ*, **70**:2 (1987), 309–314.
- [4] А. П. Веселов, С. П. Новиков, *Докл. АН СССР*, **279**:1 (1984), 20–24.
- [5] А. П. Веселов, С. П. Новиков, *Докл. АН СССР*, **279**:4 (1984), 784–788.
- [6] И. А. Тайманов, С. П. Царев, *ТМФ*, **157**:2 (2008), 188–207, [arXiv:0801.3225](#).
- [7] И. А. Тайманов, С. П. Царев, *Докл. РАН*, **240**:6 (2008), 744–745.
- [8] I. A. Taimanov, “Modified Novikov–Veselov equation and differential geometry of surfaces”, *Solitons, geometry, and topology: on the crossroad*, American Mathematical Society. Transl., Ser. 2, **179**, Advances in the Mathematical Sciences, **33**, eds. V. M. Buchstaber, S. P. Novikov, AMS, Providence, RI, 1997, 133–151, [arXiv:dg-ga/9511005](#).
- [9] B. G. Konopelchenko, *Stud. Appl. Math.*, **96**:1 (1996), 9–51.
- [10] И. А. Тайманов, *УМН*, **61**:1(367) (2006), 85–164.
- [11] T. Lamm, Huy The Nguyen, “Branched Willmore spheres”, *J. Reine Angew. Math.*, Ahead of print (May 2013).
- [12] И. А. Тайманов, *Тр. МИАН*, **225** (1999), 339–361.
- [13] C. Bohle, G. P. Peters, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **363**:10 (2011), 5419–5463.
- [14] I. A. Taimanov, *A fast decaying solution to the modified Novikov–Veselov equation with a one-point singularity*, [arXiv:1408.4723](#).

Поступила в редакцию 27.08.2014