Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ф. Л. Безруков, Использование классических сингулярных решений для вычисления сечений многочастичных процессов в теории поля, *ТМФ*, 1998, том 115, номер 3, 358–372

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf879>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.23.180.231

26 апреля 2023 г., 11:13:39

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ КЛАССИЧЕСКИХ
СИНГУЛЯРНЫХ РЕШЕНИЙ
ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ СЕЧЕНИЙ
МНОГОЧАСТИЧНЫХ ПРОЦЕССОВ
В ТЕОРИИ ПОЛЯ

Приведен метод, который сводит задачу нахождения древесного многочастичного сечения в теории φ^4 к решению классической евклидовой сингулярной граничной задачи. Найдены соответствующие численные решения в представлении разложения по сферическим гармоникам, и дана оценка древесного сечения при произвольных энергиях. Численный анализ согласуется с аналитическими результатами, полученными ранее для предельных случаев малых и больших энергий.

1. ВВЕДЕНИЕ

Важным теоретическим инструментом исследований в квантовой теории поля является теория возмущений по константе связи. С ее помощью получены результаты, большинство из которых на сегодняшний день экспериментально проверены. Поэтому значительный интерес представляют границы применимости пертурбативных вычислений. Имеются эффекты, не предсказуемые с точки зрения теории возмущений. Они связаны со сложной структурой вакуума в калибровочных теориях и нетривиальными классическими решениями уравнений поля. Кроме того, даже в топологически тривиальном секторе при относительно невысоких энергиях существуют процессы, плохо описываемые теорией возмущений.

Теория возмущений дает надежные результаты только в моделях со слабой связью, когда параметр разложения – безразмерная константа связи – много меньше единицы. Однако и в этом случае возможно появление конкурирующих малых (или больших) параметров. Так происходит в процессах с большим, сравнимым с обратной константой связи λ^{-1} , количеством частиц n в конечном состоянии.

*Институт ядерных исследований РАН, Москва, Россия

Например, в обычной теории возмущений даже около топологически тривиального вакуума уже наивная оценка амплитуды дает факториальную зависимость $n!$ от количества частиц в конечном состоянии. В древесном приближении выражение для амплитуды рождения одной виртуальной частицей n реальных частиц для теории с лагранжианом

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi)^2 - \frac{1}{2}\varphi^2 - \frac{\lambda}{4}\varphi^4 \quad (1)$$

(масса положена равной единице) при специальной кинематике, когда все частицы обладают нулевыми пространственными импульсами, имеет вид [1]

$$A_{1 \rightarrow n}^{\text{tree}} = n! \left(\frac{\lambda}{8} \right)^{\frac{n-1}{2}}. \quad (2)$$

Данный результат указывает на полную неприменимость при $n > \lambda^{-1}$ обычной теории возмущений, поскольку входит в противоречие с унитарностью теории.

Таким образом, для вычисления данных сечений необходим некоторый непертурбативный метод. Интерес представляет случай, когда

$$\lambda \rightarrow 0, \quad \lambda n \text{ и } \varepsilon \text{ фиксированы.} \quad (3)$$

Здесь $\varepsilon = (E - n)/n$ — средняя кинетическая энергия конечных частиц в системе центра масс. Существующие пертурбативные вычисления [2, 3] свидетельствуют о том, что в режиме (3) полное сечение имеет экспоненциальный вид,

$$\sigma_{1 \rightarrow n} \sim \exp \left(\frac{1}{\lambda} F(\lambda n, \varepsilon) \right). \quad (4)$$

Это указывает на возможность применения квазиклассического приближения. В работе [4] сформулирован метод получения функции $F(\lambda n, \varepsilon)$ во всех петлях, сводящийся к решению классической граничной задачи в комплексном времени. При малых λn оказывается достаточным решить чисто евклидовы уравнения с определенными граничными условиями. В обычной теории возмущений этот случай отвечает вкладу древесных диаграмм, что приводит к следующей зависимости от λ :

$$F_{\text{tree}}(\lambda n, \varepsilon) = \lambda n \ln \left(\frac{\lambda n}{16} \right) - \lambda n + \lambda n f(\varepsilon). \quad (5)$$

Отметим, что в пределах своей области применимости, т.е. при $\lambda n \ll 1$, эта зависимость дает экспоненциальное подавление сечения, если, конечно, функция $f(\varepsilon)$ не обращается в бесконечность. Однако при росте λn функция $F_{\text{tree}}(\lambda n, \varepsilon)$ становится положительной

и подавление пропадает. Следовательно, в этом случае необходимо учитывать петлевые поправки в $F(\lambda n, \varepsilon)$, которые имеют порядок $(\lambda n)^2$ и выше [5].

С помощью техники, развитой в работах [4, 6], можно, по крайней мере в принципе, найти единственную неизвестную функцию $f(\varepsilon)$ в (5).

Даже для малых λn вычисление функции F_{tree} при всех энергиях ε достаточно сложно (соответствующий формализм описан ниже в разделе 2). В этом случае классическое решение имеет сингулярности на трехмерной гиперповерхности в четырехмерном евклидовом пространстве (в случае четырехмерной теории). Эта гиперповерхность зависит от ε и определяется в процессе вычислений. С помощью вариационной процедуры Рэлея–Ритца можно получить ограничение снизу на F_{tree} . Метод вычислений и его численная реализация описываются в разделах 3 и 4. Целью данной работы является исследование возможностей этого метода для реального вычисления “древесной экспоненты” (5). В разделе 5 полученные результаты сравниваются с известными аналитическими результатами, найденными в предельных случаях.

2. СВЯЗЬ СИНГУЛЯРНЫХ РЕШЕНИЙ С СЕЧЕНИЯМИ В ДРЕВЕСНОМ ПРИБЛИЖЕНИИ. ОБЩИЙ ФОРМАЛИЗМ

Опишем метод нахождения сечения в древесном приближении в режиме (3) [4–6]. Изучим процесс распада виртуальной частицы с энергией E и импульсом $\mathbf{P} = 0$ в n реальных частиц для модели с лагранжианом (1). Для этого рассмотрим матричный элемент $\langle \beta | S \varphi | 0 \rangle$ в представлении когерентных состояний [7–9] в пространстве-времени Минковского ($\langle \beta |$ – некоторое когерентное состояние)

$$\begin{aligned} \langle \beta | S \varphi | 0 \rangle = & \lim_{\substack{T_i \rightarrow -\infty \\ T_f \rightarrow +\infty}} \int D\varphi D\varphi_i D\varphi_f \varphi(E, \mathbf{P}) \times \\ & \times \exp \left\{ i \int \mathcal{L} d^{d+1}x + B_i(\varphi_i) + B_f(\beta^*, \varphi_f) \right\}, \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} \varphi(E, \mathbf{P}) &= \int dt d^d x \varphi(t, \mathbf{x}) e^{-iEt + i\mathbf{P}\mathbf{x}}, & \varphi_{\mathbf{k}}(t) &= \int \frac{d^d x}{(2\pi)^{d/2}} \varphi(t, \mathbf{x}) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}}, \\ \varphi_i(\mathbf{k}) &= \varphi_{\mathbf{k}}(T_i), & \varphi_f(\mathbf{k}) &= \varphi_{\mathbf{k}}(T_f), \end{aligned}$$

а граничные члены имеют вид

$$\begin{aligned} B_i(\varphi_i) &= -\frac{1}{2} \int d^d k \omega_{\mathbf{k}} \varphi_i(\mathbf{k}) \varphi_i(-\mathbf{k}), \\ B_f(\beta^*, \varphi_f) &= -\frac{1}{2} \int d^d k \omega_{\mathbf{k}} \varphi_f(\mathbf{k}) \varphi_f(-\mathbf{k}) - \\ &\quad - \frac{1}{2} \int d^d k \beta_{\mathbf{k}}^* \beta_{-\mathbf{k}}^* e^{2i\omega_{\mathbf{k}} T_f} + \int d^d k \sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}} e^{i\omega_{\mathbf{k}} T_f} \beta_{\mathbf{k}}^* \varphi_f(-\mathbf{k}), \end{aligned}$$

где $\omega_{\mathbf{k}} = \sqrt{1 + \mathbf{k}^2}$. На древесном уровне интеграл (6) определяется значением подынтегрального выражения в седловой точке. Условием экстремальности экспоненты является классическое уравнение поля

$$\partial_\mu^2 \varphi + \varphi + \lambda \varphi^3 = 0 \quad (7)$$

со следующими граничными условиями:

$$\varphi_{\mathbf{k}}(t) \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} a_{\mathbf{k}} e^{i\omega_{\mathbf{k}} t}, \quad \varphi_{\mathbf{k}}(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} \frac{\beta_{\mathbf{k}}^*}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} e^{i\omega_{\mathbf{k}} t} + c_{\mathbf{k}} e^{-i\omega_{\mathbf{k}} t}, \quad (8)$$

где $a_{\mathbf{k}}$ и $c_{\mathbf{k}}$ произвольны. При $t \rightarrow -\infty$ решение $\varphi_c(\beta^*, t, \mathbf{x})$ имеет только положительно-частотную часть. Из закона сохранения энергии следует, что при $t \rightarrow +\infty$ в нем не должно содержаться отрицательных частот, т.е. $c_{\mathbf{k}} = 0$, а показатель экспоненты в (6) обращается в нуль. Таким образом, матричный элемент в древесном приближении имеет вид фурье-образа седлового решения

$$A_E(\beta^*) \equiv \langle \beta | S \varphi | 0 \rangle_{\text{tree}} = \int dt d^d x \varphi_c(\beta^*, t, \mathbf{x}) e^{-iEt + i\mathbf{P}\mathbf{x}}. \quad (9)$$

В соответствии с формализмом когерентных состояний древесную амплитуду $1 \rightarrow n$ можно выразить из (9) следующим образом:

$$A_{1 \rightarrow n}(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n) = \left. \frac{\partial^n A_E(\beta^*)}{\partial \beta_{\mathbf{k}_1}^* \dots \partial \beta_{\mathbf{k}_n}^*} \right|_{\beta^*=0}. \quad (10)$$

Для вычисления n -частичного сечения введем производящую функцию

$$\Sigma(\xi, E) = \frac{1}{Z} \int D\beta D\beta^* \exp \left\{ - \int d^d k \beta_{\mathbf{k}} \beta_{\mathbf{k}}^* \right\} A_E(\sqrt{\xi} \beta^*) \bar{A}_E(\sqrt{\xi} \beta), \quad (11)$$

где Z – нормировочный фактор. Полное сечение дается формулой

$$\sigma_{1 \rightarrow n}^{\text{tree}}(E, n) = \frac{1}{n!} \left. \frac{\partial^n}{\partial \xi^n} \Sigma(\xi, E) \right|_{\xi=0},$$

в чем можно убедиться [6, 10], непосредственно продифференцировав (11) и воспользовавшись формулой (10).

С помощью формулы Коши можно переписать выражение для $\sigma_{1 \rightarrow n}^{\text{tree}}$ в виде

$$\sigma_{1 \rightarrow n}^{\text{tree}} = \frac{1}{Z} \oint \frac{d\xi}{\xi^{n+1}} \int D\beta D\beta^* \exp \left\{ - \frac{1}{\xi} \int d^d k \beta_{\mathbf{k}} \beta_{\mathbf{k}}^* \right\} A_E(\beta^*) \bar{A}_E(\beta). \quad (12)$$

Этот интеграл опять можно вычислить с помощью метода перевала, учитывая наличие нулевых мод, отвечающих временным трансляциям, и возможных экспоненциально больших множителей в $A_E(\beta^*)$. Для того чтобы от них избавиться, произведем замену переменных

$$\beta_{\mathbf{k}}^* = b_{\mathbf{k}}^* e^{i\omega_{\mathbf{k}} t_0 - i\mathbf{k}\mathbf{x}_0}.$$

В результате этой замены получим, что

$$\begin{aligned}\varphi_c(\beta^*, t, \mathbf{x}) &= \varphi(b^*, t + t_0, \mathbf{x} + \mathbf{x}_0), \\ A_E(\beta^*) &= A_E(b^*) e^{iEt_0 - i\mathbf{P}\mathbf{x}_0}.\end{aligned}$$

Здесь t_0 , $\mathbf{x}_0$ — коллективные координаты, а $b_{\mathbf{k}}$ — новые переменные интегрирования, на которые мы наложим в дальнейшем связь, нарушающую трансляционную инвариантность, отвечающую закону сохранения энергии-импульса. В новых переменных выражение (12) принимает вид

$$\begin{aligned}\sigma_{1 \rightarrow n}^{\text{tree}} &= \frac{1}{Z} \oint \frac{d\xi}{\xi} \int Db Db^* dx_0 dx'_0 JA_E(b^*) \bar{A}_E(b) \times \\ &\times \exp \left[iE(t_0 - t'_0) - i\mathbf{P}(\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}'_0) - \right. \\ &\left. - \frac{1}{\xi} \int d^d k b_{\mathbf{k}}^* b_{\mathbf{k}} \exp \{ i\omega_{\mathbf{k}}(t_0 - t'_0) - i\mathbf{k}(\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}'_0) \} - n \ln \xi \right],\end{aligned}\quad (13)$$

где J содержит δ -функцию связи на переменные $b_{\mathbf{k}}$ и соответствующий детерминант Фаддеева–Попова, который не дает экспоненциального вклада и не будет рассматриваться далее. Интегрирование по переменной $(x_0 + x'_0)$ вносит объемный фактор, который сокращается с Z . Считая, что в A_E больше нет экспоненциальных факторов, можем теперь применить метод перевала (седловая точка по переменной $(\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}'_0)$ равна нулю, т.к. мы работаем в системе центра масс $\mathbf{P} = 0$; эту переменную мы больше выписывать не будем):

$$\sigma^{\text{tree}}(E, n) \propto e^{W_{\text{tree}}^{\text{extr}}}, \quad (14)$$

где $W_{\text{tree}}^{\text{extr}}$ является экстремальным значением функционала

$$W_{\text{tree}}(T, \theta, b_{\mathbf{k}}, b_{\mathbf{k}}^*) = ET - n\theta - e^{-\theta} \int d^d k b_{\mathbf{k}}^* b_{\mathbf{k}} e^{\omega_{\mathbf{k}} T} \quad (15)$$

по отношению к аргументам $T = i(t_0 - t'_0)$, $\theta = \ln \xi$, $b_{\mathbf{k}}$ и $b_{\mathbf{k}}^*$.

Связь, налагаемая на $b_{\mathbf{k}}$, должна нарушать трансляционную инвариантность в пространстве-времени. Как уже говорилось выше, мы хотели бы наложить условие на $b_{\mathbf{k}}$ таким образом, чтобы $A_E(b^*)$ не содержало экспоненциальных факторов. Продолжим

полученное решение φ_c в область комплексного времени. Тогда согласно граничному условию (8) и равенству $c_{\mathbf{k}} = 0$ оно должно стремиться к нулю при $\text{Im } t = \tau \rightarrow +\infty$, где τ – евклидово время. Поскольку мы не рассматриваем инстантонных эффектов, т.е. не интересуемся классическими решениями, регулярными в евклидовом пространстве (в теории $\lambda\varphi^4$ с $\lambda > 0$ их просто нет), то решение φ_c должно быть сингулярным в евклидовом пространстве-времени. В общем случае φ_c имеет особенности на d -мерной поверхности $\tau = \tau_s(\mathbf{x})$, при этом $\tau_s(\mathbf{x}) < 0$ для решений, гладких на действительной оси времени. Интеграл типа (9) определяется особенностями функции φ_c , а именно, он пропорционален $\exp(E\tau_m + i\mathbf{P}\mathbf{x}_m)$, где τ_m и $\mathbf{x}_m$ – координаты особенности, лежащей ближе всего к действительной оси ($\tau_m < 0$). Поэтому, чтобы $\varphi_c(b)$ не содержало экспоненциальных факторов, потребуем, чтобы $\tau_m \rightarrow 0$, $\mathbf{x}_m = 0$. Другими словами, мы требуем, чтобы поверхность сингулярностей касалась¹⁾ в евклидовом времени снизу поверхности $\tau = 0$ в точке $\mathbf{x} = 0$, т.е. $\tau_s(\mathbf{x} = 0) = 0$ и $\tau_s(\mathbf{x}) < 0$ при $\mathbf{x} \neq 0$. Это ограничение нарушает трансляционную инвариантность в пространстве-времени, т.е. действительно представляет собой связь, выделяющую нулевые моды.

Кроме того, т.к. мы находимся в системе центра масс и в задаче нет выделенного направления ($\mathbf{P} = 0$), то поверхность сингулярностей (как и само решение) обладает симметрией относительно пространственных вращений ($O(d)$ -симметрией). Предполагая, что решение, сингулярное на заданной поверхности и спадающее на бесконечности, единственно, получаем, что поверхность сингулярностей решений и частотные компоненты $b_{\mathbf{k}}, b_{\mathbf{k}}^*$ этих решений находятся во взаимно однозначном соответствии. Варьирование по фурье-компонентам поля $b_{\mathbf{k}}, b_{\mathbf{k}}^*$ (удовлетворяющим упомянутому ограничению) и варьирование поверхности сингулярностей взаимозаменяемы.

Опишем метод получения сечения при любых E и n :

1) находятся $O(d)$ -симметричные решения $\varphi(\tau, \mathbf{x})$ евклидова уравнения поля

$$\partial^2 \varphi - \varphi - \lambda \varphi^3 = 0, \quad (16)$$

сингулярные на поверхности $\tau_s(\mathbf{x}) \leq 0$, $\tau_s(0) = 0$ и имеющие следующий асимптотический вид при $\tau \rightarrow \infty$:

$$\int \frac{d^d x}{(2\pi)^{d/2}} \varphi(\tau, \mathbf{x}) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} = \frac{b_{\mathbf{k}}^*}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} e^{-\omega_{\mathbf{k}}\tau}; \quad (17)$$

2) вычисляются частотные компоненты $b_{\mathbf{k}}$, и по формуле (15) находится функционал W ;

3) ищется экстремум функционала W по всем описанным поверхностям сингулярностей (это эквивалентно вычислению экстремума по $b_{\mathbf{k}}$ при наличии обсуждавшейся выше связи), а также по T и θ ; тогда древесное сечение дается выражением (14).

¹⁾ Отметим, что в действительности достаточно потребовать только стремления τ_s к нулю в точке $\mathbf{x} = 0$.

Аналитическое решение описанной граничной задачи можно получить только в специальных предельных случаях (они будут вкратце обсуждаться в разделе 5). При численном же вычислении невозможно найти экстремум функционала (15) по бесконечномерному пространству поверхностей сингулярностей. Можно лишь воспользоваться методом Рэлея–Ритца, т.е. выбрать некоторый конечномерный подкласс этих поверхностей, по которому и искать экстремум функционала. Рассмотрим этот процесс подробнее.

Пусть функционал

$$\int d^d k b_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}}^* e^{\omega_{\mathbf{k}} T}$$

достигает минимального значения для некоторых $b_{\mathbf{k}}$:

$$\int d^d k b_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}}^* e^{\omega_{\mathbf{k}} T} \Big|_{\min} = C(T) > 0.$$

Зафиксируем теперь некоторое семейство поверхностей сингулярностей $\Sigma(T)$. Для него

$$\int d^d k b_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}}^* e^{\omega_{\mathbf{k}} T} \Big|_{\Sigma(T)} = C_{\Sigma}(T) \geq C(T)$$

для всех значений T . После взятия седлового значения для θ , равного $-\ln n + \ln C(T)$, получаем, что $W(T) = n \ln n - n + ET - n \ln C(T)$ имеет экстремум при $T = T_1$, а $W_{\Sigma}(T) = n \ln n - n + ET - n \ln C_{\Sigma}(T)$ — при $T = T_2$. Сравнивая $W(T_1)$ и $W_{\Sigma}(T_2)$, можно получить следующие цепочки неравенств: $W(T_1) \geq W(T_2) \geq W_{\Sigma}(T_2)$, если W имеет максимум при $T = T_1$; $W_{\Sigma}(T_2) \leq W_{\Sigma}(T_1) \leq W(T_1)$, если W_{Σ} имеет минимум при $T = T_2$ (при вычислении реализуется второй случай). Таким образом, ограничившись лишь подклассом поверхностей сингулярностей, мы получаем ограничение снизу на точное значение $W_{\text{tree}}(E, n)$.

3. РАЗЛОЖЕНИЕ ПО СФЕРИЧЕСКИМ МОДАМ

Дальнейшие вычисления будем проводить в $(3 + 1)$ -мерном пространстве-времени. Кроме того, мы будем рассматривать только компактные поверхности сингулярностей.

Так как единственное требование к поверхности сингулярностей состоит в том, что в точке $\mathbf{x} = 0$ она касается плоскости $\tau = 0$, а в остальных пространственных точках $\tau_s(\mathbf{x}) < 0$, то можно задавать конфигурации следующим образом. Выберем сферу радиуса R_s с центром в начале координат. Будем рассматривать такие конфигурации поля φ , что в точке $\tau = R_s$, $\mathbf{x} = 0$ значение поля равно бесконечности, а во всех точках $\sqrt{\mathbf{x}^2 + \tau^2} > R_s$ оно конечно. Тогда мы можем сказать, что поверхность сингулярностей для такого поля касается плоскости $\tau = R_s$ при $\mathbf{x} = 0$ и целиком лежит внутри выбранной сферы, т.е. $\tau_s(\mathbf{x}) \leq R_s$. Такое описание подходит лучше всего для поверхностей,

имеющих вид немного сжатых с боков сфер, которые, как это будет видно из дальнейшего, нас и интересуют. Остается только совершить замену координат $\tau \rightarrow \tau + R_s$, чтобы сдвинуть сингулярность в начало координат. Это эквивалентно следующему изменению частотных компонент поля:

$$b_{\mathbf{k}} = \tilde{b}_{\mathbf{k}} e^{-\omega_{\mathbf{k}} R_s}, \quad (18)$$

где $\tilde{b}_{\mathbf{k}}$ – фурье-компоненты поля, сингулярного в точке $(R_s, 0)$.

Считая, что полевая конфигурация имеет пространственную $O(3)$ -симметрию, получаем, что поле является функцией от двух переменных, т.е. $\varphi = \varphi(\rho, \theta)$, где θ – угол между радиус-вектором и осью τ , а ρ – длина радиус-вектора в четырехмерном евклидовом пространстве. Евклидовы уравнения поля можно получить, варьируя действие

$$S = 4\pi \int_0^\pi d\theta \int d\rho \rho^3 \sin^2 \theta \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \rho} \right)^2 + \frac{1}{2\rho^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{1}{2} \varphi^2 + \frac{\lambda}{4} \varphi^4 \right\}. \quad (19)$$

Перейдем к разложению по сферическим модам

$$\varphi(\rho, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(\rho) C_n^{(1)}(\cos \theta), \quad (20)$$

где

$$C_n^{(1)}(\cos \theta) = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin \theta}$$

– полиномы Гегенбауэра. Асимптотически при $\rho \rightarrow \infty$ функции $\varphi_n(\rho)$ имеют вид

$$\varphi_n(\rho) = a_n \frac{K_{n+1}(\rho)}{\rho}, \quad (21)$$

где $K_n(x)$ – функции Макдональда. Коэффициенты $\tilde{b}_{\mathbf{k}}$ разложения такой полевой конфигурации по плоским волнам таковы:

$$\tilde{b}_{\mathbf{k}} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sqrt{2\pi} \frac{C_n^{(1)}(\omega_{\mathbf{k}})}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}}.$$

Соответственно интеграл в формуле (15) выражается через коэффициенты a_n следующим образом:

$$I(z) \equiv \int \tilde{b}_{\mathbf{k}}^* \tilde{b}_{\mathbf{k}} e^{-\omega_{\mathbf{k}} z} d^3 \mathbf{k} = 2\pi^2 \sum_{n,m=0}^{\infty} a_n a_m [K_{n+m+2}(z) - K_{n-m}(z)], \quad (22)$$

где $z = 2R_s - T$. Подставляя разложение по модам (20) в (19), получаем выражение для действия через сферические моды, условие экстремальности которого и дает представление уравнения (16) через сферические моды $\varphi_n(\rho)$.

На бесконечности частотные компоненты должны иметь вид (21), т.е. не иметь растущей составляющей.

Необходимо также наложить второе граничное условие, которое обеспечит обращение поля в бесконечность на некоторой поверхности сингулярностей, описанной в начале раздела. Чтобы корректно сформулировать это условие, необходимо немного отойти от сингулярности, т.е. заменить условие $\varphi(R_s, 0) = \infty$ условием $\varphi(R, 0) = A$, где $A \gg 1/\sqrt{\lambda}$. При этом около точки $(R_s, 0)$ можно пренебречь в уравнении массовым членом, а поверхность сингулярностей в первом приближении заменить плоскостью. Тогда φ в этой области имеет вид

$$\varphi = \sqrt{\frac{2}{\lambda}} \frac{1}{l(x)},$$

где $l(x)$ – расстояние от точки x до поверхности сингулярностей. Отсюда сразу получаем, что настоящая сингулярность находится на расстоянии

$$R_s = R - \sqrt{\frac{2}{\lambda}} \frac{1}{A} \quad (23)$$

от начала координат.

Таким образом, поверхность сингулярностей, удовлетворяющая необходимым ограничениям (точнее ее форму мы опишем позднее), определяется набором сферических компонент $c_n = \varphi_n(R)$, которые должны удовлетворять условию

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(n+1) = A, \quad (24)$$

т.е. $\varphi(R, \theta = 0) = A$, а также условию

$$\varphi(R, \theta \neq 0) \leq A, \quad (25)$$

которое в простейшем случае двух не равных нулю компонент c_n сводится к тому, что обе они положительны.

Простейшие конфигурации $O(4)$ -симметричны. Они задаются как $c_0 = A$ и $c_n = 0$ для всех остальных n и характеризуются в действительности только одним параметром – радиусом поверхности сингулярностей R .

Найдем экстремум функционала (15) по параметрам T , θ и поверхностям сингулярностей. С помощью (18) и (22) можно записать выражение (15) как

$$W_{\text{tree}}(T, \theta, b_{\mathbf{k}}, b_{\mathbf{k}}^*) = ET - n\theta - I(z)e^{-\theta},$$

где $z = 2R_s - T$. Условия стационарности этого выражения по T и θ имеют вид

$$n = I(z)e^{-\theta}, \quad E = -I'(z)e^{-\theta}, \quad (26)$$

где $I'(z)$ – производная от выражения (22). Окончательно имеем

$$W_{\text{tree}}(b_{\mathbf{k}}, b_{\mathbf{k}}^*) = n \ln \frac{\lambda n}{16} - n + n f(\varepsilon), \quad (27)$$

$$f(\varepsilon) = (\varepsilon + 1)T + \ln 16 - \ln(\lambda I(z)), \quad (28)$$

где T выражается через ε из уравнения

$$\varepsilon + 1 = -\frac{I'(z)}{I(z)}, \quad (29)$$

которое следует из (26).

Практически удобнее искать экстремум несколько в другом порядке: зафиксировать некоторое значение T , затем найти минимум по всем поверхностям сингулярностей ($b_{\mathbf{k}}$ и $b_{\mathbf{k}}^*$) величины $I(z)$ и определить соответствующее значение ε из (29).

Заметим, что функция $f(\varepsilon)$ не зависит от λ . Действительно, произведем замену

$$\varphi \rightarrow \frac{\tilde{\varphi}}{\sqrt{\lambda}}.$$

Тогда уравнение (16) переходит в уравнение на $\tilde{\varphi}$ с $\lambda = 1$, а интеграл (22) преобразуется как

$$I(z) \rightarrow \frac{\tilde{I}(z)}{\lambda},$$

и зависимость от λ в выражении (28) пропадает. Таким образом, для вычисления $f(\varepsilon)$ значение λ можно положить равным единице.

В случае, если $c_n \ll c_0$ (или, что то же самое, $c_n \ll A$) для всех $n > 0$, несложно определить отличие поверхности сингулярностей соответствующей полевой конфигурации от сферы. При этом поле φ достаточно велико, если $\rho = R$ для всех θ , что означает возможность везде в этой области использовать приближение безмассового поля. Будем также полагать, что радиус R достаточно велик, чтобы считать в каждой точке поверхность сингулярностей плоскостью. Тогда, учитывая формулу (23), сразу получаем, что

$$\Delta R_s(\theta) = \sqrt{\frac{2}{\lambda}} \left(\frac{1}{\varphi(R, \theta)} - \frac{1}{\varphi(R, 0)} \right),$$

где величина $\Delta R_s(\theta) = R_s(0) - R_s(\theta)$ характеризует отличие поверхности сингулярностей от сферической. На рис. 1 изображена поверхность сингулярностей при энергии $\varepsilon = 10$ (сплошная линия). На бесконечности включена 4-я сферическая гармоника. Изображена также сфера радиуса R , на которой можно сформулировать условия на c_n .

Рис. 1

4. ЧИСЛЕННОЕ НАХОЖДЕНИЕ ДРЕВЕСНЫХ СЕЧЕНИЙ

В случае, когда мы ограничиваемся $O(4)$ -симметричными решениями (однопараметрическое задание поверхностей сингулярностей), задача чрезвычайно проста. Она сводится к решению одного обыкновенного дифференциального уравнения на $\varphi_0(\rho)$. Причем даже необязательно решать граничную задачу. Можно задавать различные значения a_0 (т.е. начальные условия при бесконечном ρ) и находить отвечающие им радиусы поверхности сингулярностей R_s .

Ограничения на функцию $f(\varepsilon)$, полученные различными методами, отражены на рис. 2, где 1 – $O(4)$ -симметричное ограничение; 2 – аналитическая оценка в случае малых удельных энергий; 3 – ограничение (снизу) при высоких энергиях; 4 – ограничение Волошина; 5 – ограничение, получаемое при включении 4-й сферической гармоники.

Если же мы не хотим ограничиваться сферически-симметричными модами, необходимо, вообще говоря, решать граничную задачу для уравнения (16). Решать ее прямыми методами сложно по следующей причине. Для сходимости суммы (22) необходимо быстрое уменьшение значения φ_n при увеличении номера гармоники (причем требуется это на большом радиусе, т.е. там, где поле уже само по себе мало). Задается же конфигурация при таком способе решения формой поверхности сингулярностей, т.е. фиксацией больших значений поля. Поэтому задача является сильно неустойчивой. По этой же причине невозможно решать граничную задачу в разложении по сферическим компо-

Рис. 2

нентам, задавая значения φ_n на радиусе R около сингулярности.

Однако оказывается возможным применить метод, похожий на использованный при решении $O(4)$ -симметричной задачи. Фиксируем значения a_n , т.е. сферические моды на бесконечности (что эквивалентно заданию $b_{\mathbf{k}}$) и будем решать систему *обыкновенных* дифференциальных уравнений с заданными таким образом *начальными* условиями. При достаточно малом радиусе R поле обратится в бесконечность (точнее, превысит некоторую большую величину A). Если значения $c_n = \varphi_n(R)$ на этом радиусе удовлетворяют условиям (24) и (25), то данная конфигурация удовлетворяет всем выдвинутым требованиям. Оказывается, что это выполняется при достаточно большом множестве фиксированных на бесконечности значений a_n . В частности, можно задавать a_n равными нулю для всех $n \neq 0, k$, где k – некоторое фиксированное целое положительное число.

Основной проблемой такого метода (и большинства других методов, связанных с разложением по частотным составляющим) является необходимость ограничиться при вычислениях конечным числом сферических мод. Однако основные вызванные этим искажения в данной задаче проявляются только на достаточно малых расстояниях от поверхности сингулярностей (в сильно нелинейной области) и не приводят к значительной ошибке в определении R_s при не слишком высоких энергиях.

Для поиска минимума функции $I(2R_s - T)$ по a_n (что фактически представляет собой минимизацию по переменным $b_{\mathbf{k}}, b_{\mathbf{k}}^*$) использовался метод многомерного симплектического спуска [11], который не требует никакой дополнительной информации о минимизируемой функции (т.е. не требует знания ее производных). Для нахождения минимума оказывалось необходимым сделать около 50 вычислений функции $I(2R_s - T)$ для раз-

Рис. 3

личных конфигураций.

Вычисления производились с заданием на бесконечности двух ненулевых мод a_0 и a_k . Были исследованы все значения k меньше 8. Максимальное отличие от $O(4)$ -симметричного результата наблюдалось при $k = 4$. Напомним, что т.к. мы получаем ограничение снизу на $f(\varepsilon)$ методом Рэлея–Ритца, то нас интересует именно максимальное получаемое значение $f(\varepsilon)$.

На рис. 3 приведены ограничения на $f(\varepsilon)$, где 1 – $O(4)$ -симметричное ограничение; 2 – ограничение, получаемое при включении 2-й гармоники; 3 – 4-й гармоники; 4 – 6-й гармоники; 5 – ограничение (снизу) при высоких энергиях. Рис. 3 представляет собой увеличенную часть рис. 2 в соответствующей области значений абсциссы и ординаты для несферического случая. При меньших энергиях ε отличие от сферического вычисления становится незначительным, а при больших – радиус сингулярности R_s становится малым и возрастает относительная погрешность в его определении. Вычисления для $O(4)$ -симметричного случая проводились для большего интервала энергий, что отображено на рис. 2 вместе с некоторыми аналитическими результатами (см. раздел 5).

Интерес представляет также форма поверхности сингулярностей, отвечающая минимальному значению функции $I(2R_s - T)$. На рис. 1 приведена поверхность, соответствующая значениям $\varepsilon = 10$ и $k = 4$ [12].

5. СРАВНЕНИЕ ЧИСЛЕННЫХ И АНАЛИТИЧЕСКИХ РЕЗУЛЬТАТОВ

В предельных случаях малых и очень больших энергий оказывается возможным вы-

полнить сформулированную в разделе 2 процедуру аналитически [4, 13]. Приведем здесь эти результаты для сравнения.

В случае малых ε можно рассмотреть решения вида

$$\varphi(\tau, \mathbf{x}) = \sqrt{\frac{2}{\lambda}} \frac{1}{\operatorname{sh}(\tau - \tau_s(\mathbf{x}))},$$

которые удовлетворяют уравнению (16) с точностью до $O((\partial_{\mathbf{x}}\tau_s)^2)$ (случай, когда $\tau_s(\mathbf{x}) = 0$ при всех $\mathbf{x}$, отвечает пороговому рождению частиц с нулевым импульсом). Кроме того, можно найти в явном виде поправки порядков $(\partial_{\mathbf{x}}\tau_s)^2$ и $(\partial_{\mathbf{x}}\tau_s)^4$ к этому выражению. В результате получается следующая оценка [4, 13]:

$$f(\varepsilon) = \frac{3}{2} \left(\ln \frac{\varepsilon}{3\pi} + 1 \right) - \varepsilon \frac{17}{12} + \frac{\varepsilon^2}{432} (1327 - 96\pi^2) + O(\varepsilon^3). \quad (30)$$

Она изображена на рис. 2 штриховой линией (случай 2) и хорошо совпадает с численной оценкой при $\varepsilon < 0.5$.

Для больших энергий можно пренебречь массовым членом в уравнении поля и рассматривать безмассовую теорию φ^4 . В ней известно $O(4)$ -симметричное решение – инстантон Фубини–Липатова [14, 15], из которого просто сконструировать решение, сингулярное в точке $\tau = \mathbf{x} = 0$ [16]:

$$\varphi_0 = \sqrt{\frac{8}{\lambda}} \frac{R_s}{\mathbf{x}^2 + (\tau + R_s)^2 - R_s^2}, \quad (31)$$

где R_s – коллективная координата, определяющая размер поверхности сингулярностей. В результате получается ограничение [4, 16]

$$f(\varepsilon \rightarrow \infty) \geq \ln \frac{2}{\pi^2}. \quad (32)$$

Эта величина хорошо согласуется с численными оценками при $\varepsilon > 50$.

Интересно также сравнить полученный результат с другими существующими оценками. С помощью работы [17] можно найти альтернативное ограничение на $f(\varepsilon)$, которое получается непосредственным анализом диаграмм. Как видно из рис. 2, полученное в данной работе ограничение гораздо сильнее.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе описан метод вычисления многочастичных сечений в теории φ^4 в древесном приближении. Полученный численный результат для $O(4)$ -симметричных конфигураций хорошо согласуется с известными предельными случаями. Результаты

вычислений при варьировании по большому семейству поверхностей сингулярностей указывают на близость уже этого простого случая к точному результату. Найденное в работе ограничение лучше аналогичных ограничений, полученных другими методами.

Работа выполнена частично при поддержке гранта РФФИ № 96-02-17449а и программы “Соросовские студенты”.

Автор искренне признателен В. А. Рубакову за многочисленные обсуждения на всех этапах работы и А. Н. Кузнецову, М. В. Либанову, П. Г. Тинякову и С. В. Троицкому за ценные замечания.

Список литературы

- [1] *M. B. Voloshin.* Phys. Rev. D. 1991. V. 43. P. 1726.
- [2] *M. V. Libanov, V. A. Rubakov, D. T. Son, S. V. Troitsky.* Phys. Rev. D. 1994. V. 50. P. 7553.
- [3] *M. V. Libanov, D. T. Son, S. V. Troitsky.* Phys. Rev. D. 1995. V. 52. P. 3679.
- [4] *D. T. Son.* Nucl. Phys. B. 1996. V. 477. P. 378.
- [5] *М. В. Либанов, В. А. Рубаков, С. В. Троицкий.* ЭЧАЯ. 1997. Т. 28. С. 551.
- [6] *V. A. Rubakov.* Non-perturbative aspects of multiparticle production. In: Proc. of the 2nd Rencontres du Vietnam, Hô Chi Minh City, Vietnam. Gif-sur-Yvette: Editions Frontieres, 1995. P. 435.
- [7] *Ф. А. Березин.* Метод вторичного квантования. М.: Наука, 1986.
- [8] *А. А. Славнов, Л. Д. Фаддеев.* Введение в квантовую теорию калибровочных полей. Изд. 2-е. М.: Наука, 1988.
- [9] *P. G. Tinyakov.* Int. J. Mod. Phys. A. 1993. V. 8. P. 1823.
- [10] *V. A. Rubakov, P. G. Tinyakov.* Phys. Lett. B. 1992. V. 279. P. 165.
- [11] *W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, B. P. Flannery.* Numerical recipes in C: the art of scientific computing. Second ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1992.
- [12] *F. L. Bezrukov, M. V. Libanov, S. V. Troitsky.* Mod. Phys. Lett. A. 1995. V. 10. P. 2135.
- [13] *F. L. Bezrukov, M. V. Libanov, D. T. Son, S. V. Troitsky.* Singular classical solutions and tree multiparticle cross sections in scalar theories. In: Proc. of X Int. Workshop on High Energy Physics and Quantum Field Theory, Zvenigorod, Russia. М.: МГУ, 1995. P. 228.
- [14] *S. Fubini.* Nuovo Cimento A. 1976. V. 34. P. 521.
- [15] *Л. Н. Лунатов.* Письма в ЖЭТФ. 1977. Т. 25. С. 116.
- [16] *S. Y. Khlebnikov.* Phys. Lett. B. 1992. V. 282. P. 459.
- [17] *M. B. Voloshin.* Phys. Lett. B. 1992. V. 293. P. 389.

Поступила в редакцию 28.I.1998 г.