Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. М. Гончаровский, И. В. Широков, Дифференциальные инварианты и операторы инвариантного дифференцирования проецируемого действия групп Ли, *ТМФ*, 2015, том 183, номер 2, 202–221

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8792>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.81.55.215

26 апреля 2023 г., 10:13:03

© 2015 г.

М. М. Гончаровский*, И. В. Широков†

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ИНВАРИАНТЫ И ОПЕРАТОРЫ ИНВАРИАНТНОГО ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ ПРОЕЦИРУЕМОГО ДЕЙСТВИЯ ГРУПП ЛИ

Описана связь между операторами инвариантного дифференцирования и инвариантными операторами на орбитах действия групп Ли. Предложен новый эффективный метод нахождения дифференциальных инвариантов и операторов инвариантного дифференцирования. Приведены примеры.

Ключевые слова: групповой анализ дифференциальных уравнений, дифференциальные инварианты, операторы инвариантного дифференцирования, инвариантные операторы.

DOI: 10.4213/tmf8792

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе рассматривается задача построения дифференциальных инвариантов и операторов инвариантного дифференцирования групп преобразований. Дифференциальные инварианты являются классическим объектом исследования в групповом анализе дифференциальных уравнений. Они представляют собой инварианты действия группы Ли, продолженного на так называемое пространство струй, имеющее смысл линейного пространства независимых переменных, зависимых переменных и производных зависимых переменных по независимым (см., например, [1]–[3]). Необходимость изучения дифференциальных инвариантов групп преобразований обусловлена двумя важными областями приложений. Знание дифференциальных инвариантов, во-первых, позволяет построить все уравнения, инвариантные относительно заданной группы, и, во-вторых, что более важно, в некоторых случаях дает возможность построить дополнительные классы точных решений, называемых *дифференциально-инвариантными*. Операторы инвариантного дифференцирования – это дифференциальные операторы, переводящие дифференциальные инварианты в другие инварианты, зависящие от производных более высокого

*Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского, Омск, Россия.
E-mail: eiklm@mail.ru

†Омский государственный технический университет, Омск, Россия.
E-mail: iv_shirokov@mail.ru

порядка. Они представляют интерес, так как с их помощью из конечного набора инвариантов можно получать инварианты любого порядка простым дифференцированием.

Последовательная теория дифференциальных инвариантов, по-видимому, была впервые развита Трессе [4] и получила широкую известность только в 70-х годах XX века благодаря работам Овсянникова [1]. С тех пор было получено множество частных результатов для конкретных групп и систем уравнений [5]–[9]. В последние годы усилиями Олвера [10], [11] в теории инвариантов достигнут значительный прогресс. Разработанный Олвером алгебраический метод вычисления дифференциальных инвариантов и операторов инвариантного дифференцирования уже нашел свое применение в теоретико-групповом исследовании нелинейных уравнений в частных производных [12]–[14]. Тем не менее во многих конкретных случаях (в особенности при больших размерностях группы или пространства переменных) нахождение инвариантов по-прежнему сопряжено с большими вычислительными трудностями и может оказаться практически неосуществимым, вследствие чего представляет интерес развитие новых методов отыскания инвариантов. Данная работа является продолжением работы [15], в которой была рассмотрена частная ситуация, когда заменой независимых переменных можно исключить их преобразование под действием группы симметрии системы дифференциальных уравнений. Здесь мы развиваем подход, примененный в [15], на случай преобразования независимых переменных общего вида.

В разделе 2 мы вводим основные обозначения, кратко излагаем необходимые теоретические сведения и делаем некоторые предварительные замечания. В разделе 3 устанавливается соответствие между алгебрами операторов инвариантного дифференцирования и инвариантных операторов на орбитах действия группы. Это соответствие позволяет во многих случаях легко находить часть (а иногда и все) операторов инвариантного дифференцирования алгебраическим путем, т. е. не прибегая к решению дифференциальных уравнений. Раздел 4 посвящен изложению общего метода вычисления дифференциальных инвариантов и операторов инвариантного дифференцирования, альтернативного классической схеме Овсянникова. Наш подход обладает существенными преимуществами перед классическим, а именно позволяет упростить возникающие в ходе вычисления системы линейных дифференциальных уравнений (ЛДУ) и не требует построения в явном виде генераторов продолженного действия группы. Кроме того, излагаемый подход является бескоординатным: возникающие при его реализации уравнения полностью определяются структурными константами алгебры симметрии и не зависят от конкретного вида действия группы в пространстве независимых и зависимых переменных.

Применение изложенной теории иллюстрируется на примере группы симметрий уравнения Дирака для частиц во внешнем гравитационном поле.

2. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ И ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

2.1. Элементы теории дифференциальных инвариантов. В этом разделе мы в основном следуем монографиям [1] и [2], в которых можно найти доказательства всех встречающихся здесь утверждений. Более сжатое изложение данной теории содержится, например, в книге [3].

Пусть группа Ли G симметрии дифференциального уравнения действует диффеоморфизмами ϕ на множестве $Z \times U$ независимых $z \in Z = \mathbb{R}^n$ и зависимых $u \in U = \mathbb{R}^m$ переменных:

$$\phi(z, u, g) = (z'(z, u, g), u'(z, u, g)), \quad z \in Z, \quad u \in U, \quad g \in G. \quad (1)$$

Для определенности будем считать, что действие ϕ правое. Пусть

$$\hat{\zeta}_X \equiv \phi_* X = \zeta_X^\alpha(z, u) \frac{\partial}{\partial z^\alpha} + \theta_X^\alpha(z, u) \frac{\partial}{\partial u^\alpha}, \quad X \in \mathcal{G} = T_e G,$$

– генераторы этого действия. Здесь ϕ_* – касательный гомоморфизм алгебры Ли $\mathcal{G} = T_e G$ группы G в алгебру гладких векторных полей на множестве $Z \times U$, z^a – локальные координаты на множестве Z . По дважды повторяющимся индексам везде подразумевается суммирование, греческие индексы $\alpha, \beta, \dots$ пробегает значения от 1 до $\dim U$, латинские $a, b, \dots$ – от 1 до $\dim Z$, а $i, j, \dots$ – от 1 до $\dim G$.

Рассматривая переменные u как функции от переменных z и вводя операторы полного дифференцирования D_a согласно формуле

$$D_a = \frac{\partial}{\partial z^a} + u_a^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha} + u_{ab}^\alpha \frac{\partial}{\partial u_b^\alpha} + \dots, \quad u_a^\alpha = \frac{\partial u^\alpha}{\partial z^a} \quad \text{и т. д.,}$$

действие ϕ можно единственным образом расширить на производные $\partial u^\alpha / \partial z^a$, линейное пространство которых обозначим посредством U_1 :

$$\phi^{(1)} u_a^\alpha = \frac{\partial u'^\alpha}{\partial z'^a} = \sum_{b=1}^n \frac{D_b u'^\alpha(z, u, g)}{D_b z'^a(z, u, g)}.$$

Аналогично получаются рекуррентные формулы преобразования производных любого порядка:

$$\phi^{(k+1)} u_{aI}^\alpha = \frac{\partial^{k+1} u'^\alpha}{\partial z'^a \partial z'^I} = \sum_{b=1}^n \frac{D_b u'_I{}^\alpha(z, u, u_1, \dots, u_k, g)}{D_b z'^a(z, u, g)},$$

$$I = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}, \quad u_k = \{u_I^\alpha\}.$$

Множество $Z \times U \times U_1 \times \dots \times U_s$, содержащее пространства производных до порядка s включительно, называется *пространством струй порядка s* , или, кратко, *пространством s -струй*. Коэффициенты генераторов действия, продолженного на пространство s -струй, выражаются через коэффициенты генераторов $\hat{\zeta}$:

$$\hat{\zeta}_s = \hat{\zeta} + \theta^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha} + \Theta_a^\alpha \frac{\partial}{\partial u_a^\alpha} + \dots + \Theta_{a_1 \dots a_s}^\alpha \frac{\partial}{\partial u_{a_1 \dots a_s}^\alpha} = \hat{\zeta} + \Theta_I^\alpha \frac{\partial}{\partial u_I^\alpha}, \quad (2)$$

$$\Theta_I^\alpha = D_I Q^\alpha + \zeta^a D_I u_a^\alpha, \quad Q^\alpha = \theta^\alpha - \zeta^a u_a^\alpha.$$

Здесь I – мультииндекс, длина которого пробегает значения от 0 до s , и D_{ab} означает $D_a D_b$ и т. п. Таким образом, произвольная система дифференциальных уравнений порядка s геометрически определяет поверхность в пространстве s -струй, а s -е продолжение группы G есть совокупность преобразований, переводящих эту поверхность саму в себя.

Инварианты продолженного действия группы, зависящие от производных до порядка s включительно, называются *дифференциальными инвариантами порядка s* . Все дифференциальные инварианты порядка $k \leq s$ могут быть найдены из линейной системы дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка, построенной по продолжениям линейно независимых генераторов группы G :

$$\hat{\zeta}_j^s J = 0, \quad j = 1, \dots, \dim G. \quad (3)$$

Очевидно, что дифференциальный инвариант заданного порядка является также инвариантом всех продолжений более высоких порядков. Ясно также, что любой дифференциальный инвариант порядка s может быть выражен через так называемые *базисные инварианты*, число которых определяется максимальным рангом набора векторных полей (2), “обрезанных” до s -х производных.

Дифференциальные инварианты можно размножать при помощи *операторов инвариантного дифференцирования*, т. е. таких операторов δ , которые при действии на дифференциальный инвариант порядка s дают дифференциальный инвариант более высокого порядка:

$$\delta J(z, u, u_1, \dots, u_s) = J'(z, u, u_1, \dots, u_{s+k}), \quad k > 0, \quad \hat{\zeta}_X^s J = \hat{\zeta}_X^{s+k} J' = 0 \quad \forall X \in \mathcal{G}.$$

Из этих соотношений видно, что операторное равенство

$$[\delta, \hat{\zeta}_X^s] = 0, \quad (4)$$

выполняющееся для любых $X \in \mathcal{G}$ и $s \geq 0$, есть достаточное условие того, что оператор δ является оператором инвариантного дифференцирования. Можно показать, что оно является также необходимым.

Линейное пространство всех дифференциальных инвариантов данной группы имеет конечный набор образующих в том смысле, что произвольный дифференциальный инвариант может быть получен конечным числом действий, включающих функциональные операции и применение ограниченного числа операторов инвариантного дифференцирования первого порядка, из базиса дифференциальных инвариантов порядка $\kappa + 1$. Число κ является наименьшим порядком продолжения группы G , ранг которого максимален, т. е. совпадает с размерностью группы:

$$\text{rank}\{ \hat{\zeta}_j^{\alpha} \}_{\kappa-1} < \text{rank}\{ \hat{\zeta}_j^{\alpha} \}_{\kappa} = \dim G. \quad (5)$$

Набор $\dim G$ базисных операторов инвариантного дифференцирования $\delta = \lambda^a D_a$, подобно базису дифференциальных инвариантов, может быть найден как совокупность решений системы ЛДУ в частных производных первого порядка

$$\hat{\zeta}_j^{\alpha} \lambda^a = \lambda^b D_b \zeta_j^a, \quad j = 1, \dots, \dim G, \quad (6)$$

линейно независимых над полем дифференциальных инвариантов порядка κ .

Отметим, что хотя системы (3) и (6), обычно используемые для отыскания дифференциальных инвариантов и операторов инвариантного дифференцирования, как правило, являются сильно переопределенными, их непосредственное решение

в случае больших размерностей множества $Z \times U$ может представлять значительные трудности и оказаться практически невозможным даже с применением современных систем компьютерной математики. В связи с этим представляют интерес альтернативные способы, позволяющие свести задачу нахождения дифференциальных инвариантов и операторов инвариантного дифференцирования к более простым системам дифференциальных уравнений в частных производных или к алгебраическим уравнениям. Так, Олвером [11] был предложен метод *инвариантизации*, т. е. построения по заданной функции инварианта, совпадающего с ней на некотором трансверсальном к орбитам группы подмногообразию – *поперечном сечении* – пространства струй. Для этого необходимо восстановить по генераторам явный вид продолженного достаточное число раз действия группы, а затем для каждой точки пространства струй найти значения параметров преобразования, переводящего эту точку в точку выбранного поперечного сечения.

В данной работе предлагаются новый способ нахождения дифференциальных инвариантов и два различных способа построения операторов инвариантного дифференцирования, обладающие тем преимуществом, что они не требуют поднятия с алгебры генераторов до группы и вычисления продолжений и вместе с тем обеспечивают существенное упрощение возникающих в процессе решения задачи систем уравнений, а в наиболее распространенных случаях – сведение задачи к алгебраической.

2.2. Вводные замечания. В настоящей работе мы будем рассматривать только случай *проецируемых действий* [2], т. е. таких, для которых корректно ограничение $\phi|_Z$. Самый общий вид генераторов такого действия дается выражением

$$\hat{\zeta}_X = \zeta_X^a(z) \frac{\partial}{\partial z^a} + \theta_X^\alpha(z, u) \frac{\partial}{\partial u^\alpha}.$$

При этом пространство независимых переменных Z , не ограничивая общности, всегда можно считать локально диффеоморфным однородному правому G -пространству $M = H \backslash G$, где H – некоторая замкнутая подгруппа в G . Действительно, если действие группы G на пространстве Z не транзитивно, то можно рассматривать его ограничение на отдельные орбиты. Для этого необходимо взять в качестве части независимых переменных набор $y^\mu = J_\zeta^\mu(x)$, $\mu = 1, \dots, \text{codim } M$, независимых инвариантов векторных полей $\zeta_X = \hat{\zeta}_X|_Z$, после чего генераторы группы приводятся к виду

$$\hat{\zeta}_X = \zeta_X^a(x) \frac{\partial}{\partial x^a} + \theta_X^\alpha(x, y, u) \frac{\partial}{\partial u^\alpha}, \quad (7)$$

где x^a – локальные координаты на орбите M . В дальнейшем мы будем опускать аргумент y у функций θ_X , подразумевая, что последние зависят от инвариантных переменных y^μ как от параметров.

Пусть $\{J^A(x, u)\}$ – совокупность всех функционально независимых инвариантов действия (7). В работе [15] был рассмотрен случай, когда орбиты группы трансверсальны к пространству U , т. е.

$$\text{rank} \frac{\partial J^A(x, u)}{\partial u^\alpha} = \dim U. \quad (8)$$

Это позволяет перейти к новым инвариантным зависимым переменным $v^A = J^A(x, u)$, $\alpha = 1, \dots, \dim U$, после чего действие группы ограничивается до пространства M , т. е. его генераторы $\hat{\zeta}_X$ уже не содержат переменных u :

$$\hat{\zeta}_X = \zeta_X^a(x) \frac{\partial}{\partial x^a}.$$

Выясним пределы применимости этого предположения. Для этого рассмотрим очевидное матричное равенство

$$\begin{pmatrix} \zeta & \theta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nabla_x J \\ \nabla_u J \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \nabla_u J \end{pmatrix}.$$

Здесь два верхних блока первого сомножителя в левой части составляют компоненты генераторов группы, записанные по строкам, а второй сомножитель состоит из градиентов полного набора независимых инвариантов, записанных по столбцам: $\nabla_x J = (\partial J^A / \partial x^a)^\top$, $\nabla_u J = (\partial J^A / \partial u^\alpha)^\top$. Ранг первого сомножителя равен $\text{rank } \zeta + \dim U$, а второго – количеству базисных инвариантов $[J] = \dim M + \dim U - \text{rank}(\zeta\theta)$, в силу их независимости. Из неравенств Сильвестра [16] для ранга произведения матриц получаем

$$\dim U + \text{rank } \zeta - \text{rank}(\zeta\theta) \leq \text{rank } \nabla_u J \leq \dim U + \dim M - \text{rank}(\zeta\theta). \quad (9)$$

Поскольку действие группы на многообразии M транзитивно, то $\text{rank } \zeta = \dim M$, и мы приходим к критерию выполнимости условия трансверсальности (8).

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. *Орбиты действия группы на множестве $M \times U$ трансверсальны к пространству U тогда и только тогда, когда ограничение этого действия на многообразие M не понижает размерности орбит:*

$$\text{rank}(\zeta\theta) = \text{rank } \zeta.$$

В данной работе мы отказываемся от этого требования и рассматриваем более общую ситуацию, а именно по-прежнему полагаем действие проецируемым (ζ_X^a не зависят от u), однако в остальном произвольным, т. е. преобразующим зависимые переменные произвольным образом. Мы также рассмотрим подробнее специальный случай, когда зависимые переменные преобразуются под действием группы по линейному закону:

$$\theta_X = -A_{X\beta}^\alpha(x) u^\beta \frac{\partial}{\partial u^\alpha} \equiv -(A_X u) \nabla_u.$$

Этот случай охватывает ряд важных физических приложений. Так, квантово-полевые уравнения для свободных релятивистских частиц инвариантны относительно группы Пуанкаре с генераторами

$$p_a = \frac{\partial}{\partial x^a}, \quad M_{ab} = x_a \frac{\partial}{\partial x^b} - x_b \frac{\partial}{\partial x^a} - A_{ab\beta}^\alpha u^\beta \frac{\partial}{\partial u^\alpha}.$$

Здесь (постоянные) матрицы A_{ab} – образующие представления алгебры Лоренца, соответствующего данному типу частиц. Менее тривиальный пример – уравнения для частиц в заданном внешнем гравитационном поле. При этом в качестве генераторов группы симметрии в пространстве $D = \mathbb{R}^4$ выступают производные Ли вдоль полей Киллинга метрики пространства-времени, а матрицы A_X , вообще говоря, приобретают зависимость от координат.

3. ИНВАРИАНТНЫЕ ОПЕРАТОРЫ И ОПЕРАТОРЫ ИНВАРИАНТНОГО ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

3.1. Инвариантные операторы на однородных пространствах. Пусть группа G транзитивно действует на гладком многообразии $M = H \backslash G$ (правое действие), $H \subset G$ – подгруппа изотропии некоторой точки $x_0 \in M$. Обозначим через $\mathcal{H}$ алгебру Ли группы H , а через $\mathcal{H}^*$ – сопряженное к ней пространство (коалгебру). Поскольку точками многообразия M являются правые смежные классы группы G по подгруппе H , то в каждой достаточно малой области $V \subset G$ произвольный элемент $g \in V$ может быть представлен в виде $g = hs(x)$, $h \in H$, $x \in M$, с некоторым сечением s главного расслоения (G, M, π, H) , так что $\pi g = x$, а для действия группы G на M справедливо представление

$$x \circ g = \pi(s(x)g).$$

По этой же причине произвольную гладкую функцию на многообразии M можно рассматривать как функцию на группе G , постоянную на правых классах смежности, или, другими словами, инвариантную относительно левых сдвигов на элементы подгруппы H : $\varphi(hg) = \varphi(g)$. Вводя отображение правого сдвига $R_g g' = g'g$, можно сформулировать инфинитезимальный критерий левой H -инвариантности в виде равенства

$$\eta_X \varphi = 0 \quad \forall X \in \mathcal{H}, \quad (10)$$

где $\eta_X(g) = -R_{g*}X$ – правоинвариантное векторное поле вдоль касательного вектора X . На языке координат это означает, что локально всегда может быть введена такая карта (V, ψ) , что $\psi(g) = (x^1, \dots, x^n, h^1, \dots, h^d)$, $d = \dim H$, причем x^a и h^μ – локальные координаты на M и H соответственно, а H -инвариантная слева функция φ не зависит от переменных h^μ . Здесь и далее величины, относящиеся к подгруппе H , будем нумеровать греческими индексами $\mu, \nu, \dots$. Кроме того, можно показать, что в этих координатах левоинвариантные поля на группе G принимают вид

$$\xi_X = \zeta_X^a(x) \frac{\partial}{\partial x^a} + \xi_X^\mu(x, h) \frac{\partial}{\partial h^\mu}, \quad X \in \mathcal{G}, \quad \zeta_X = \pi_* \xi_X, \quad (11)$$

а правоинвариантные поля, касательные к подгруппе H , – вид

$$\eta_X = \eta_X^\mu(h) \frac{\partial}{\partial h^\mu}, \quad X \in \mathcal{H}. \quad (12)$$

Пусть в алгебре Ли $\mathcal{G}$ фиксирован базис e_i и пусть

$$[e_i, e_j] = C_{ij}^k e_k \quad (13)$$

– коммутационные соотношения в этом базисе. Очевидно, таким же соотношениям будут удовлетворять и векторные поля $\xi_j \equiv \xi_{e_j}$, $\eta_j \equiv \eta_{e_j}$, $\zeta_j \equiv \zeta_{e_j}$ и $\hat{\zeta}_j \equiv \hat{\zeta}_{e_j}$. Отметим, что явный вид лево- и правоинвариантных полей всегда может быть восстановлен по коммутационным соотношениям (13) [17], [18].

Линейный оператор χ , коммутирующий со всеми генераторами группы G на однородном пространстве M , называется *инвариантным оператором на M* :

$$[\chi, \zeta_X] = 0 \quad \forall X \in \mathcal{G}. \quad (14)$$

Множество дифференциальных инвариантных операторов, очевидно, замкнуто относительно операции произведения операторов. Помимо чисто дифференциальных операторов в алгебру инвариантных операторов иногда может быть включено также некоторое число псевдодифференциальных операторов. Мы не будем здесь рассматривать эту ситуацию ввиду ее недостаточной изученности и везде далее будем считать инвариантные операторы дифференциальными.

Можно показать (см., например, [19], [20]), что произвольный инвариантный оператор представим в виде полиномиальной комбинации некоторого минимального набора образующих. Соответственно, коммутатор двух инвариантных операторов также может быть представлен полиномом от базисного набора, т. е. множество инвариантных операторов составляет конечномерную *функциональную алгебру*, или *F -алгебру*. Число $\dim F$ образующих называется размерностью F -алгебры, а размерность $\text{ind } F$ ее центра – индексом F -алгебры. Эти величины могут быть вычислены по формулам

$$\begin{aligned}\dim F &= \dim M - \dim \mathcal{H}/\mathcal{H}^\lambda = 2 \dim M - \dim G + i_M, & \text{ind } F &= \dim \mathcal{G}^\lambda/\mathcal{H}^\lambda, \\ \lambda \in \mathcal{H}^\perp &\equiv \{f \in \mathcal{H}^* | \langle f, \mathcal{H} \rangle = 0\}, & \mathcal{H}^\lambda &= \{X \in \mathcal{H} | \text{ad}_X^* \lambda = 0\}, \\ \mathcal{G}^\lambda &= \{X \in \mathcal{G} | \text{ad}_X^* \lambda = 0\}.\end{aligned}$$

Здесь $i_M = \dim \mathcal{H}^\lambda$ – индекс однородного пространства M , т. е. число функциональных связей вида $\Gamma(\zeta) = 0$ между генераторами группы G на M , ad_X^* – оператор коприсоединенного представления алгебры $\mathcal{G}$.

Процедура нахождения базиса инвариантных операторов и соответствующая теория подробно изложены в [19], [20]. Здесь достаточно указать, что эта процедура сводится к решению переопределенной системы ЛДУ

$$C_{\mu a}^b f_b \frac{\partial a(f)}{\partial f_a} = 0, \quad a, b = 1, \dots, \dim M, \quad \mu = 1, \dots, \dim H, \quad (15)$$

состоящей из $\dim H - i_M \leq \min\{\dim M, \dim H\}$ уравнений на одну неизвестную функцию от $\dim M$ переменных f_a . Если мы интересуемся только чисто дифференциальными инвариантными операторами, то все независимые решения $a_s(f)$ системы (15) можно считать однородными полиномами, и задача нахождения базиса F -алгебры становится алгебраической. Когда функции $a_s(f)$ найдены, главная (т. е. содержащая производные старшего порядка) часть инвариантных операторов получается из них заменой $f_a \rightarrow \eta_a$ с последующей симметризацией, а слагаемые более низкого порядка достраиваются из правоинвариантных полей η_a исходя из условия коммутативности (14).

ПРИМЕР 1. Пусть G – группа преобразований четырехмерного однородного пространства M , генерируемая векторными полями (индексы у координат для удобства пишем снизу, $\partial_a \equiv \partial/\partial x_a$)

$$\begin{aligned}\zeta_1 &= e^{-x_3} \partial_1, & \zeta_2 &= \partial_2, & \zeta_3 &= \partial_3, & \zeta_4 &= x_2 \partial_2 - x_4 \partial_4, \\ \zeta_5 &= -\frac{x_2^2}{2} \partial_2 + (x_2 x_4 + 1) \partial_4.\end{aligned} \quad (16)$$

Ненулевые коммутационные соотношения в алгебре Ли этой группы имеют вид

$$[e_1, e_3] = e_1, \quad [e_2, e_4] = e_2, \quad [e_4, e_5] = e_5, \quad [e_5, e_2] = e_4. \quad (17)$$

В качестве подалгебры $\mathcal{H}$ возьмем подалгебру изотропии точки многообразия M с координатами $x^a = 0$, натянутую на вектор e_4 . Считая действие правым, восстановим вид левоинвариантных полей:

$$\xi_j = \zeta_j, \quad j = 1, 2, 3, \quad \xi_4 = \zeta_4 + \partial_h, \quad \xi_5 = \zeta_5 - x_2 \partial_h, \quad (18)$$

и выпишем базис правоинвариантных полей на группе G :

$$\begin{aligned} \eta_1 &= -\partial_1, & \eta_2 &= e^h \left(x_4 \partial_h - \partial_2 - \frac{x_4^2}{2} \partial_4 \right), & \eta_3 &= x_1 \partial_1 - \partial_3, \\ \eta_4 &= -\partial_h, & \eta_5 &= -e^{-h} \partial_4. \end{aligned}$$

Так как алгебра $\mathcal{H}$ одномерна, то система (15) состоит из одного уравнения

$$f_2 \frac{\partial a}{\partial f_2} - f_5 \frac{\partial a}{f_5} = 0, \quad a = a(f_1, f_2, f_3, f_5),$$

независимые решения которого суть

$$a_1 = -f_1, \quad a_2 = f_3, \quad a_3 = f_2 f_5.$$

Заменяя в них f_a правоинвариантными полями, получим образующие алгебры инвариантных операторов на многообразии M :

$$\chi_1 = -\eta_1, \quad \chi_2 = \eta_3, \quad \chi_3 = \frac{1}{2}(\eta_2 \eta_5 + \eta_5 \eta_2)|_M + c^a \eta_a.$$

Из требования коммутативности с полями (16) находим, что неизвестные постоянные c^a необходимо положить равными нулю, после чего окончательно получаем базис F -алгебры на однородном пространстве M :

$$\chi_1 = \partial_1, \quad \chi_2 = x_1 \partial_1 - \partial_3, \quad \chi_3 = \partial_{2,4} + \frac{x_4^2}{2} \partial_4^2 + x_4 \partial_4. \quad (19)$$

3.2. Связь операторов инвариантного дифференцирования с инвариантными операторами. Поскольку мы рассматриваем функции только от конечного числа переменных, то формально в сумме (2) можно перейти к пределу $s \rightarrow \infty$, не заботясь о сходимости, поэтому ниже везде подразумевается суммирование по всем значениям дважды встречающегося мультииндекса I в пределах от $|I| = 0$ до $|I| = \infty$. Бесконечное продолжение генератора (1) может быть представлено в виде

$$\hat{\zeta}_\infty = \zeta \cdot D + \hat{\zeta}^{\text{LB}}, \quad (20)$$

где введено обозначение $\zeta \cdot D = \zeta^a D_a$, а $\hat{\zeta}^{\text{LB}}$ – канонический оператор Ли–Беклунда:

$$\hat{\zeta}^{\text{LB}} = Q^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha} + D_a Q^\alpha \frac{\partial}{\partial u_a^\alpha} + D_{ab} Q^\alpha \frac{\partial}{\partial u_{ab}^\alpha} + \dots = D_I Q^\alpha \frac{\partial}{\partial u_I^\alpha}.$$

Если воспользоваться стандартным коммутатором [1]

$$[D_a, \hat{\zeta}_\infty] = (D_a \zeta) \cdot D$$

и представлением (20), легко видеть, что оператор Ли–Беклунда коммутирует с любым оператором полной производной:

$$[D_a, \hat{\zeta}^{\text{LB}}] = [D_a, \hat{\zeta}] - [D_a, \zeta \cdot D] = (D_a \zeta) \cdot D - D_a \zeta \cdot D + \zeta \cdot DD_a = 0. \quad (21)$$

Используя бесконечное продолжение, условие (4) для оператора инвариантного дифференцирования можно переписать в виде

$$[\delta, \hat{\zeta}] = 0. \quad (22)$$

Пусть теперь действие группы G проецируемо. Тогда справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\chi = a^I(x)\partial_I$ – инвариантный дифференциальный оператор порядка s , $a \{J_1, \dots, J_{s-1}\}$ – произвольный набор дифференциальных инвариантов. Тогда $\delta^{(s)} = a^I(x)\partial_I$ и $\delta^{(k)} = [\delta^{(k+1)}, J_k]$ – операторы инвариантного дифференцирования порядка s и $k = 1, \dots, s-1$ соответственно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как коэффициенты оператора $\delta^{(s)}$ не зависят от переменных u , то с учетом (21) имеем $[\delta^{(s)}, \hat{\zeta}^{\text{LB}}] = 0$, а из коммутативности операторов χ и ζ следует, что и $[\delta^{(s)}, \zeta \cdot D] = 0$. Таким образом, из представления (20) сразу следует, что $[\delta^{(s)}, \hat{\zeta}] = 0$, т. е. оператор $\delta^{(s)}$ является оператором инвариантного дифференцирования.

Далее проводим доказательство по индукции. Предположим, что для некоторого $k < s$ оператор $\delta^{(k+1)}$ является оператором инвариантного дифференцирования. Тогда, применяя тождество Якоби и равенство (22) для оператора $\delta^{(k+1)}$, получим

$$[\delta^{(k)}, \hat{\zeta}] = [[\delta^{(k+1)}, J_k], \hat{\zeta}] = [[\hat{\zeta}, J_k], \delta^{(k+1)}] + [[\delta^{(k+1)}, \hat{\zeta}], J_k] = 0,$$

т. е. для оператора $\delta^{(k)}$ также выполняется соотношение (22), откуда заключаем, что $\delta^{(k)}$ – оператор инвариантного дифференцирования. ■

ПРИМЕР 2. Будем рассматривать группу из примера 1 как группу движений однородного псевдориманова пространства M . Общий вид метрики, инвариантной относительно данной группы, дается выражением

$$ds^2 = g_{ab} dx^a dx^b = c_1 dx_1^2 - \frac{1}{\Lambda} (x_4^2 dx_2^2 - 2 dx_2 dx_4) + \\ + 2(c_1 x_1 + c_2) dx_1 dx_3 + (c_1 x_1^2 + 2c_2 x_1 + c_3) dx_3^2, \quad (23)$$

где c_1, c_2, c_3, Λ – произвольные постоянные (при $c_2^2 = c_1(c_3 - 1/\Lambda)$ эта метрика удовлетворяет вакуумным уравнениям Эйнштейна с космологической постоянной Λ). В тетрадном базисе

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{c_1}} \partial_1, \quad e_2 = \frac{\sqrt{\Lambda}}{x_4} \partial_2, \quad e_3 = \frac{1}{\sqrt{c_1(c_2^2 - c_1 c_3)}} ((c_1 x_1 + c_2) \partial_1 - c_1 \partial_3), \\ e_4 = -i\sqrt{\Lambda} \left(\frac{1}{x_4} \partial_2 + x_4 \partial_4 \right)$$

метрика (23) приводится к лоренцеву виду:

$$g_{ab}e_A^ae_B^b = G_{AB}, \quad G = \text{diag}(1, -1, -1, -1).$$

Рассмотрим уравнение Дирака на многообразии M :

$$\mathcal{D}u \equiv i\tilde{\gamma}^a(\partial_a - \Gamma_a)u = mu, \quad \tilde{\gamma}^a = e_A^a\gamma^A, \quad \Gamma_a = \frac{1}{4}\tilde{\gamma}_a^b\tilde{\gamma}_b, \quad u \in U = \mathbb{C}^4.$$

Здесь γ^A – гамма-матрицы (ниже мы будем использовать для них представление Дирака), Γ_a – компоненты спинорной связности (коэффициенты Фока–Иваненко). Известно [21], что спинорные производные Ли вдоль векторных полей Киллинга (16) являются операторами симметрии уравнения Дирака:

$$\mathcal{L}_j = \zeta_j - \zeta_j^a\Gamma_a - \frac{1}{8}\zeta_{j;b}^a[\tilde{\gamma}_a, \tilde{\gamma}^b], \quad [\mathcal{L}_j, \mathcal{D}] = 0, \quad j = 1, \dots, 5.$$

Соответствующие генераторы группы G в координатном пространстве $\mathbb{R}^4 \times U$ имеют вид

$$\hat{\zeta}_j = \zeta_j, \quad j = 1, 2, 3, 4, \quad \hat{\zeta}_5 = \zeta_5 + \frac{i}{2x_4}(u^2\partial_{u^1} - u^1\partial_{u^2} + u^4\partial_{u^3} - u^3\partial_{u^4}). \quad (24)$$

Они удовлетворяют тем же коммутационным соотношениям, что и поля Киллинга, поэтому могут быть получены из последних как $\text{aut } \mathbb{C}^4$ -деформации (см. п. 4.1). Воспользовавшись ранее полученными инвариантными операторами (19) и теоремой 1, сразу находим три оператора инвариантного дифференцирования:

$$\delta_1 = D_1, \quad \delta_2 = x_1D_1 - D_3, \quad \delta_3 = D_{2,4} + \frac{x_4^2}{2}D_4^2 + x_4D_4.$$

Отметим, что для отыскания операторов инвариантного дифференцирования стандартным способом [1] нам потребовалось бы решить систему из $5 \cdot 4 = 20$ линейных уравнений в частных производных от $4 + 4 = 8$ независимых переменных на четыре неизвестные функции, тогда как нахождение правоинвариантных векторных полей и инвариантных операторов фактически сводится к операциям линейной алгебры [17], [19].

Таким образом, знание инвариантных операторов позволяет найти $\text{ind } F$ операторов инвариантного дифференцирования. Зачастую, однако, этого бывает недостаточно, так как полный набор должен включать $\dim M$ операторов первого порядка. Он гарантированно может быть получен из одних только инвариантных операторов лишь в случае просто-транзитивного действия (см. п. 4.2). В следующем разделе мы покажем, как можно получить недостающие операторы инвариантного дифференцирования и вычислить базис дифференциальных инвариантов.

4. ПОСТРОЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИНВАРИАНТОВ И ОПЕРАТОРОВ ИНВАРИАНТНОГО ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

Благодаря специальному виду инфинитезимальных преобразований (7) для их исследования удобно использовать теорию $\text{aut } U$ -деформаций алгебр Ли векторных полей. $\text{aut } U$ -деформации являются обобщением понятия $\mathfrak{gl}(U)$ -продолжений, которое было введено и изучено в работе [22], и их теория строится вполне аналогично. Здесь мы приведем без доказательств ее основные результаты.

4.1. Элементы теории деформаций векторных полей. Пусть M , как и прежде, – однородное G -пространство, действие группы на котором генерируется векторными полями ζ , U – произвольное гладкое многообразие, а θ – линейное отображение из алгебры $\mathcal{G}$ в алгебру Ли $\text{aut } U$ векторных полей, касательных к многообразию U . Рассмотрим алгебру линейных дифференциальных операторов

$$\hat{\zeta}_X = \zeta_X + \theta_X = \zeta_X^a(x) \frac{\partial}{\partial x^a} + \theta_X^\alpha(x, u) \frac{\partial}{\partial u^\alpha}, \quad (25)$$

действующих в пространстве функций на тривиальном расслоении $\pi: M \times U \rightarrow M$. Алгебра операторов $\hat{\zeta}_X$ называется *aut U -деформацией* алгебры векторных полей ζ_X , если отображение $X \rightarrow \hat{\zeta}_X$ является изоморфизмом алгебр Ли, т. е. $[\hat{\zeta}_X, \hat{\zeta}_Y] = \hat{\zeta}_{[X, Y]}$ для любых $X, Y \in \mathcal{G}$. Ниже мы для краткости будем называть *aut U -деформации* просто *деформациями*. Из последнего равенства следует соотношение на операторы θ :

$$\zeta_X \theta_Y - \zeta_Y \theta_X + [\theta_X, \theta_Y] = \theta_{[X, Y]} \quad \forall X, Y \in \mathcal{G}. \quad (26)$$

Определим естественным образом представление ρ группы автоморфизмов $\text{Aut } U$ в пространстве функций на $M \times U$:

$$(\rho(a)f)(x, u) = f(x, ua), \quad a \in \text{aut } U.$$

Две деформации $\hat{\zeta}$ и $\hat{\zeta}'$ одной и той же алгебры векторных полей называются *эквивалентными*, если они связаны преобразованием

$$\hat{\zeta}' = S^{-1} \hat{\zeta} S = \zeta + \theta', \quad S \in \rho,$$

причем оператор S в общем случае зависит от точки базы M . Компоненты операторов θ' вычисляются по формуле

$$\theta'^\alpha = \left(\zeta^a(x) \frac{\partial S^\alpha(x, v)}{\partial x^a} + \theta^\beta(x, v) \frac{\partial S^\alpha(x, v)}{\partial v^\beta} \right) \Big|_{v=S^{-1}(x, u)}.$$

Здесь $S^\alpha(x, u)$ – результат действия оператора представления S на координатные функции u^α . Деформацию, для которой все θ равны нулю, будем называть *нулевой*, а деформацию, эквивалентную нулевой, – *тривиальной*. Любая тривиальная деформация имеет вид

$$\hat{\zeta}^{\text{tr}} = S^{-1} \zeta S = \zeta + \zeta S^\alpha(x, v) \Big|_{v=S^{-1}(x, u)} \frac{\partial}{\partial u^\alpha}. \quad (27)$$

Если в качестве многообразия M взять саму группу G , а в качестве исходной алгебры – алгебру левоинвариантных полей на ней, то из утверждения 1 легко получается следующий вывод.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. *Произвольная деформация алгебры левоинвариантных векторных полей на группе Ли тривиальна.*

Нетривиальные деформации получаются, когда подгруппа изотропии H нетривиальна (см. п. 3.1). В этом случае $\dim H$ линейно независимых векторных полей ζ

обращаются в нуль в точке x_0 , для которой H является подгруппой изотропии, и если отображение θ в этой точке определено, то из соотношения (26) получаем

$$[\theta_X(x_0, u), \theta_Y(x_0, u)] = \theta_{[X, Y]}(x_0, u) \quad \forall X, Y \in \mathcal{H},$$

т. е. операторы $\theta_X(x_0, u)$ образуют представление подалгебры $\mathcal{H}$. Используя соображения, приведенные в п. 3.1, в частности представление (11) для левоинвариантных полей, можно показать, что любая нетривиальная деформация эквивалентна некоторой деформации канонического вида

$$\theta_X(x, u) = \xi_X^\mu(e_H, x) \theta_\mu^\alpha(x_0, u) \frac{\partial}{\partial u^\alpha}, \quad (28)$$

где e_H — единичный элемент группы H . Таким образом, задача описания и классификации всевозможных деформаций сводится к классификации их канонических форм, или, учитывая соотношение (28), к классификации представлений подалгебры изотропии $\mathcal{H}$.

Применение теории деформаций в групповом анализе целесообразно, поскольку, как легко видеть, генераторы действия группы на $M \times U$ являются $\text{aut } U$ -деформациями генераторов его ограничения на M . Кроме того, из вида коэффициентов (2) ясно, что s -е продолжение алгебры генераторов есть $\text{aut } U_s$ -деформация ее продолжения порядка $s-1$ и, более общо, $\text{aut } U_k \times \cdots \times U_s$ -деформация продолжения порядка $k-1$.

4.2. Дифференциальные инварианты просто-транзитивного действия.

Рассмотрим сначала более простой случай, когда действие группы Ли G на многообразии M *просто-транзитивно*, т. е. транзитивно и свободно. Это означает, что подгруппа изотропии каждой точки $x \in M$ состоит из одного единичного элемента e , и, таким образом, M представляет собой *главное однородное пространство* группы G и локально может быть отождествлено с самой группой, действующей на себе правыми сдвигами $R_x: G \times G \rightarrow G$ по формуле $R_x g = gx$, $x, g \in G$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если действие ϕ группы G левое, то в просто-транзитивном случае оно сводится к левым сдвигам. Все рассуждения при этом остаются аналогичными, если в них правоинвариантные поля заменить левоинвариантными и наоборот.

Генераторами правых сдвигов на группе Ли, как известно, являются левоинвариантные векторные поля, которые могут быть получены из элементов алгебры Ли $\mathcal{G}$ посредством дифференциалов левых сдвигов:

$$\xi_X(x) = L_{x*} X, \quad L_x g = xg, \quad x, g \in G, \quad X \in \mathcal{G},$$

т. е. в данном случае $\zeta_X = \xi_X$. Рассмотрим проецируемое просто-транзитивное на множестве M действие группы Ли общего вида

$$\hat{\xi}_X = \xi_X^a(x) \frac{\partial}{\partial x^a} + \theta_X^\alpha(x, u) \frac{\partial}{\partial u^\alpha} \equiv \xi_X + \theta_X \nabla_u. \quad (29)$$

Его генераторы образуют по отношению к алгебре левоинвариантных полей $\text{aut } U$ -деформацию, которая в силу утверждения 2 эквивалентна нулевой деформации.

Это означает, что любое просто-транзитивное действие группы Ли заменой переменных может быть сведено к действию, не преобразующему зависимые переменные. Действительно, из выражения (27) непосредственно следует, что общий инвариант преобразований (29) имеет вид $S^{-1}\varphi(u)$, где φ – произвольная функция u , а в качестве базиса инвариантов можно взять прообразы $S^{-1}\alpha(x, u)$ координатных функций. Предположим, что преобразование S известно. Произведем в $M \times U \approx G \times U$ замену координат

$$x^\alpha \rightarrow x^\alpha, \quad u^\alpha \rightarrow v^\alpha = S^{-1}\alpha(x, u).$$

При этом производные преобразуются следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \rightarrow \frac{\partial}{\partial x^\alpha} + \left. \frac{\partial S^{-1}\beta(x, u)}{\partial x^\alpha} \right|_{u=S(x, v)} \frac{\partial}{\partial v^\beta}, \quad \frac{\partial}{\partial u^\alpha} \rightarrow \left. \frac{\partial S^{-1}\beta(x, u)}{\partial u^\alpha} \right|_{u=S(x, v)} \frac{\partial}{\partial v^\beta},$$

а генератор $\hat{\zeta}_X$ в новых переменных примет вид

$$\hat{\zeta}_X = \xi_X^\alpha(x) \frac{\partial}{\partial x^\alpha} + \left(\xi_X^\alpha \frac{\partial S^{-1}\beta(x, u)}{\partial x^\alpha} + \theta_X^\alpha(x, u) \frac{\partial S^{-1}\beta(x, u)}{\partial u^\alpha} \right) \bigg|_{u=S(x, v)} \frac{\partial}{\partial v^\beta}.$$

Выражение в скобках с учетом явного вида функций θ_X^α для тривиальной деформации (27) равно нулю, и $\hat{\zeta}_X$ редуцируется до левоинвариантного поля ξ_X .

Теперь мы можем воспользоваться теоремой 1 из работы [15] и сформулировать следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 2. *Базис дифференциальных инвариантов просто-транзитивного действия группы Ли составляют функции*

$$v^\alpha = J^\alpha(x, u), \quad \alpha = 1, \dots, \dim U,$$

– инварианты нулевого порядка. Правоинвариантные векторные поля $\eta_i \cdot D$ составляют полный набор операторов инвариантного дифференцирования.

Таким образом, например, базис дифференциальных инвариантов первого порядка будет состоять из функций $\eta_j v^\alpha \equiv \eta_j^\alpha D_\alpha v^\alpha$. В качестве базиса инвариантов более высоких порядков удобно выбирать симметризованные комбинации

$$(\eta_{j_1} \dots \eta_{j_s}) v^\alpha = \frac{1}{s!} \sum_{\sigma_s} \eta_{\sigma(j_1)} \dots \eta_{\sigma(j_s)} v^\alpha$$

(сумма по всем перестановкам s элементов). Мы будем использовать для этого базиса обозначение $v_{(j_1 \dots j_s)}^\alpha$: $v_{(j)}^\alpha = \eta_j v^\alpha$, $v_{(jk)}^\alpha = (\eta_j \eta_k + \eta_k \eta_j) v^\alpha / 2$ и т. д.

ПРИМЕР 3. Генераторы (24), найденные в примере 2, являются проекциями на $M \times U$ генераторов $\hat{\xi}_j$ той же группы, действующей на $G \times U$:

$$\hat{\xi}_j = \xi_j, \quad j = 1, 2, 3, 4, \quad \hat{\xi}_5 = \xi_5 + \frac{i}{2x_4} (u^2 \partial_{u^1} - u^1 \partial_{u^2} + u^4 \partial_{u^3} - u^3 \partial_{u^4}),$$

где левоинвариантные поля ξ_j определены выражениями (18). Система уравнений $\hat{\xi}_j v = 0$ легко решается и дает четыре независимых инварианта, которые в соответствии с теоремой 2 образуют базис пространства дифференциальных инвариантов:

$$\begin{aligned} v^1 &= u^1 \operatorname{ch} z - i u^2 \operatorname{sh} z, & v^2 &= i u^1 \operatorname{sh} z + u^2 \operatorname{ch} z, & v^3 &= u^3 \operatorname{ch} z - i u^4 \operatorname{sh} z, \\ v^4 &= i u^3 \operatorname{sh} z + u^4 \operatorname{ch} z, & z &= \frac{1}{2} (h + \ln x_4). \end{aligned} \quad (30)$$

Взяв их в качестве новых зависимых переменных, видим, что генераторы при этом редуцируются до левоинвариантных полей: $\hat{\xi}'_j = \xi_j$. Выпишем также операторы инвариантного дифференцирования, снова воспользовавшись теоремой 2 и найденными в примере 1 правоинвариантными полями:

$$\begin{aligned}\eta_1 &= -D_1, & \eta_2 &= e^h \left(x_4 D_h - D_2 - \frac{x_4^2}{2} D_4 \right), \\ \eta_3 &= x_1 D_1 - D_3, & \eta_4 &= -D_h, & \eta_5 &= -e^{-h} D_4.\end{aligned}$$

Действуя ими (с последующей симметризацией) на найденные базисные инварианты s раз, получим все функционально независимые дифференциальные инварианты порядка s .

ПРИМЕР 4 (действие, нелинейное на U). Пусть $M = \mathbb{R}^4$, $U = \mathbb{R}^2$ и действие группы на $M \times U$ генерируется векторными полями

$$\hat{\xi}_1 = \xi_1, \quad \hat{\xi}_2 = \xi_2 - \operatorname{tg} u^2 \partial_{u^1}, \quad \hat{\xi}_3 = \xi_3 + \partial_{u^1}, \quad \hat{\xi}_4 = \xi_4 + u^1 \operatorname{tg} u^2 \partial_{u^1} + \partial_{u^2},$$

а левоинвариантные поля ξ_j имеют вид

$$\xi_1 = \partial_1, \quad \xi_2 = \partial_2, \quad \xi_3 = x_2 \partial_1 + \partial_3, \quad \xi_4 = \frac{1}{2}(x_2^2 - x_3^2) \partial_1 - x_3 \partial_2 + x_2 \partial_3 + \partial_4.$$

Базис инвариантов этого действия можно выбрать в виде

$$v^1 = (u^1 - x_3) \cos u^2 + x_2 \sin u^2, \quad v^2 = u^2 - x_4,$$

а правоинвариантные поля (с заменой $\partial_a \rightarrow D_a$)

$$\begin{aligned}\eta_1 &= -D_1, & \eta_2 &= -x_3 \cos x_4 D_1 - \cos x_4 D_2 - \sin x_4 D_3, \\ \eta_3 &= x_3 \sin x_4 D_1 + \sin x_4 D_2 - \cos x_4 D_3, & \eta_4 &= -D_4\end{aligned}$$

образуют полный набор операторов инвариантного дифференцирования.

4.3. Общий случай. Опишем метод вычисления базисов дифференциальных инвариантов в общем случае произвольного проецируемого действия группы преобразований. Рассмотрим проецируемое действие общего вида ϕ группы Ли на открытом подмножестве прямого произведения $M \times U$, где $M = H \backslash G$ – однородное правое G -пространство. Определим также действие $\tilde{R}$ группы G на множестве $G \times U$, которое совпадает с ϕ на U и представляет собой правый сдвиг на G :

$$\tilde{R}_g|_G = R_g, \quad \tilde{R}_g|_U = \phi_g|_U, \quad g \in G.$$

Обозначим посредством $\mathcal{F}$ множество H -левоинвариантных функций на пространстве s -струй над группой G :

$$\mathcal{F} = \{ \varphi \in C^1(G \times U \times \cdots \times U) \mid \varphi(hg, u', \dots, u'_s) = \varphi(g, u, \dots, u_s) \}.$$

Из соображений, изложенных в п. 3.1, ясно, что ϕ представляет собой композицию отображения $\tilde{R}$ и канонической проекции $\pi: G \times U \rightarrow M \times U$, действующей тривиально на U : $\pi(hs(x), u) = (x, u)$:

$$\begin{aligned}\phi_g(x, u) &= \pi \tilde{R}_g \pi^{-1}(x, u) = \pi \tilde{R}_g(Hs(x), u) = \\ &= \pi(Hs(x)g, ug) = (\pi(s(x)g), ug) = (x'(x, g), u'(x, u, g)).\end{aligned}$$

Действие ϕ генерируется векторными полями (7), которые, таким образом, представляют собой проекции векторных полей (29), касательных к $G \times U$: $\hat{\zeta}_X = \pi_* \hat{\xi}_X$. Другими словами, ввиду изоморфизма пространства функций на M и пространства H -левоинвариантных функций на G выражение $\hat{\zeta}\varphi$, $\varphi \in C^1(M \times U)$ тождественно выражению $\hat{\xi}\varphi$, если функцию φ считать элементом $C^1(G \times U)$. При этом она обязана удовлетворять дополнительному условию $\eta_X \varphi = 0$ для всех $X \in \mathcal{H}$, выражающему независимость от координат в подгруппе изотропии H . Поскольку те же рассуждения применимы и к зависимым переменным u , то мы можем написать аналогичное равенство для произвольного продолжения генератора $\hat{\zeta}$:

$$\hat{\zeta}_s X = \pi_* \hat{\xi}_s X, \quad s = 1, 2, \dots$$

Наконец, определим подпространство $\mathcal{P}$, дополняющее подалгебру $\mathcal{H}$ до $\mathcal{G}$:

$$\mathcal{G} = \mathcal{H} \dot{+} \mathcal{P}.$$

Оно может быть естественным образом отождествлено с касательным пространством к многообразию M в точке x_0 .

Справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 3. Пусть ϕ – проецируемое действие группы G на множестве $M \times U$. Тогда произвольный дифференциальный инвариант J порядка s удовлетворяет уравнению

$$\eta_X J(v, v_{(1)}, \dots, v_{(s)}) = 0, \quad X \in \mathcal{H}, \quad (31)$$

где v^α – базис инвариантов действия $\tilde{R}$ группы G на $G \times U$ и $v_{(k)} = \{(\eta_{a_1} \dots \eta_{a_k})v^\alpha\}$.

Любой оператор инвариантного дифференцирования первого порядка имеет вид $\delta = \Delta^a(v, v_{(1)}, \dots) \eta_a$, где функции Δ^a удовлетворяют уравнению

$$\eta_X \Delta + \text{ad}_X|_{\mathcal{P}} \Delta = 0, \quad X \in \mathcal{H}. \quad (32)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку пространства $C^1(M \times U)$ и $\mathcal{F}$ изоморфны, то любой инвариант действия ϕ является также инвариантом действия $\tilde{R}$ и, следовательно, согласно теореме 2 выражается через инварианты последнего: $J = J(v, v_{(1)}, \dots, v_{(s)})$.

Независимость инварианта J от координат в подгруппе изотропии обеспечивается условием (31). Первое утверждение теоремы доказано.

Далее, согласно теореме 2 произвольный оператор инвариантного дифференцирования первого порядка на $G \times U$ представляется в виде $\delta = \Delta^j(v, v_{(1)}, \dots) \eta_j$. Общий вид оператора инвариантного дифференцирования для действия ϕ мы получим, если потребуем, чтобы результат действия оператора δ на функции из $\mathcal{F}$ также лежал в $\mathcal{F}$: $\eta_X \delta \phi = 0$, $\phi \in \mathcal{F}$, $X \in \mathcal{H}$. С учетом того, что при ограничении на $\mathcal{F}$ операторы η_α переходят в нулевые операторы, это требование приводит к условию

$$[\eta_X, \delta] = [\eta_X, \Delta^a \eta_a] = \eta_X(\Delta^a) \eta_a + \Delta^a [\eta_X, \eta_a] = (\eta_X(\Delta^a) + \text{ad}_{X_b}^a \Delta^b) \eta_a = 0,$$

из которого и следует второе утверждение теоремы. ■

Теорема 3 предоставляет эффективный инструмент для вычисления дифференциальных инвариантов и операторов инвариантного дифференцирования. Рассмотрим подробнее уравнение (31). Заметим предварительно, что в силу выражения (12) для правоинвариантного поля, касательного к подгруппе H , действие операторов η_μ на инварианты $v^\alpha(h, x, u)$ не повышает порядок последних, так как зависимые переменные u не содержат зависимости от h . Следовательно, “тривиальные” инварианты $\eta_\mu v^\alpha$ выражаются снова через v^α . Обозначим их посредством $\varphi_\mu^\alpha(v)$. С учетом этого замечания уравнение (31) можно переписать в виде следующей системы:

$$\begin{aligned} \eta_\mu J &= \eta_\mu v^\alpha \frac{\partial J}{\partial v^\alpha} + \eta_\mu v_{(a)}^\alpha \frac{\partial J}{\partial v_{(a)}^\alpha} + \dots = \varphi_\mu^\alpha(v) \frac{\partial J}{\partial v^\alpha} + \eta_\mu \eta_a v^\alpha \frac{\partial J}{\partial v_{(a)}^\alpha} + \dots = \\ &= \varphi_\mu^\alpha(v) \frac{\partial J}{\partial v^\alpha} + ([\eta_\mu, \eta_a] v^\alpha + \eta_a \eta_\mu v^\alpha) \frac{\partial J}{\partial v_{(a)}^\alpha} + \dots = \\ &= \varphi_\mu^\alpha(v) \frac{\partial J}{\partial v^\alpha} + ((C_{\mu a}^\nu \eta_\nu + C_{\mu a}^b \eta_b) v^\alpha + \eta_a \varphi_\mu^\alpha(v)) \frac{\partial J}{\partial v_{(a)}^\alpha} + \dots = \\ &= \varphi_\mu^\alpha(v) \frac{\partial J}{\partial v^\alpha} + \left(C_{\mu a}^\nu \varphi_\nu^\alpha(v) + C_{\mu a}^b v_{(b)}^\alpha + \frac{\partial \varphi_\mu^\alpha(v)}{\partial v^\beta} v_{(a)}^\beta \right) \frac{\partial J}{\partial v_{(a)}^\alpha} + \dots = 0. \end{aligned} \quad (33)$$

Слагаемые, пропорциональные $\partial J / \partial v_{(ab)}^\alpha$ и т. д., выписываются аналогично. Таким образом, мы получили корректно определенную систему уравнений с независимыми переменными $v, v_{(1)}, \dots, v_{(s)}$. Решая ее, найдем базис инвариантов порядка s . Подчеркнем, что данная система не зависит от конкретного координатного вида генераторов группы симметрии и определяется только структурными константами соответствующей алгебры Ли. Отметим также, что по сравнению с системой (3) она содержит меньшее число как уравнений ($\dim H$ вместо $\dim G$), так и независимых переменных (mC_{n+s}^n вместо $n + mC_{n+s}^n$, $n = \dim M$, $m = \dim U$). Особенно упрощается задача вычисления инвариантов, когда подгруппа изотропии H одномерна: в этом случае система (33) состоит из одного уравнения. Если же зависимые переменные преобразуются под действием группы линейно, то функции $\varphi_\mu^\alpha(v)$ тоже линейны, и решение системы может быть сведено к решению системы линейных алгебраических уравнений.

Для нахождения операторов инвариантного дифференцирования перепишем систему (32) в компонентах, выражая оператор ad через структурные константы алгебры $\mathcal{G}$:

$$\eta_\mu \Delta^a + C_{\mu b}^a \Delta^b = 0, \quad (34)$$

а $\eta_\mu \Delta^a$ представим аналогично левой части (33). Число независимых переменных в этой системе то же, что и в (33), а число уравнений равно $\dim H \times \dim M$ вместо $\dim G \times \dim M$ уравнений системы (6). Любое решение системы (34) определяет оператор инвариантного дифференцирования по формуле

$$\delta = \Delta^a \eta_a \cdot D|_{\mathcal{F}} = \Delta^a \eta_a^b D_b. \quad (35)$$

ПРИМЕР 5. Вычислим дифференциальные инварианты для группы из примера 1 с генераторами (24). Подгруппой изотропии в данном случае является одномерная

подгруппа $\exp(h\epsilon_4)$. Выпишем сначала явные выражения для тривиальных инвариантов, получающихся действием соответствующего правоинвариантного поля $\eta_4 = -\partial_h$ на инварианты расширенного действия, найденные в примере 3:

$$\eta_4 v^1 = \frac{i}{2} v^2, \quad \eta_4 v^2 = -\frac{i}{2} v^1, \quad \eta_4 v^3 = \frac{i}{2} v^4, \quad \eta_4 v^4 = -\frac{i}{2} v^3.$$

Поскольку ранг действия равен размерности группы, то из условия (5) следует, что полный набор дифференциальных инвариантов содержится в множестве инвариантов не выше первого порядка. Запишем уравнение (33) до слагаемых, содержащих первые производные (множитель $2/i$ введен для удобства):

$$\begin{aligned} \frac{2}{i} \eta_4 J = & v^2 \frac{\partial J}{\partial v^1} - v^1 \frac{\partial J}{\partial v^2} + v^4 \frac{\partial J}{\partial v^3} - v^3 \frac{\partial J}{\partial v^4} + \\ & + v_{(1)}^2 \frac{\partial J}{\partial v_{(1)}^1} + (v_{(2)}^2 + 2iv_{(2)}^1) \frac{\partial J}{\partial v_{(2)}^1} + v_{(3)}^2 \frac{\partial J}{\partial v_{(3)}^1} + (v_{(5)}^2 - 2iv_{(5)}^1) \frac{\partial J}{\partial v_{(5)}^1} - \\ & - v_{(1)}^1 \frac{\partial J}{\partial v_{(1)}^2} - (v_{(2)}^1 - 2iv_{(2)}^2) \frac{\partial J}{\partial v_{(2)}^2} - v_{(3)}^1 \frac{\partial J}{\partial v_{(3)}^2} - (v_{(5)}^1 + 2iv_{(5)}^2) \frac{\partial J}{\partial v_{(5)}^2} + \\ & + v_{(1)}^4 \frac{\partial J}{\partial v_{(1)}^3} + (v_{(2)}^4 + 2iv_{(2)}^3) \frac{\partial J}{\partial v_{(2)}^3} + v_{(3)}^4 \frac{\partial J}{\partial v_{(3)}^3} + (v_{(5)}^4 - 2iv_{(5)}^3) \frac{\partial J}{\partial v_{(5)}^3} - \\ & - v_{(1)}^3 \frac{\partial J}{\partial v_{(1)}^4} - (v_{(2)}^3 - 2iv_{(2)}^4) \frac{\partial J}{\partial v_{(2)}^4} - v_{(3)}^3 \frac{\partial J}{\partial v_{(3)}^4} - (v_{(5)}^3 + 2iv_{(5)}^4) \frac{\partial J}{\partial v_{(5)}^4} = 0. \end{aligned}$$

Оставив в нем четыре первых члена и отбрасывая остальные, получим базис инвариантов нулевого порядка:

$$\begin{aligned} J^{(0)} = & \{(v^1)^2 + (v^2)^2, (v^3)^2 + (v^4)^2, v^1 v^3 + v^2 v^4\} = \\ = & \{(u^1)^2 + (u^2)^2, (u^3)^2 + (u^4)^2, u^1 u^3 + u^2 u^4\}. \end{aligned}$$

Его также можно легко найти непосредственно из уравнений (3) с генераторами (24). Шестнадцать инвариантов первого порядка выберем в виде

$$\begin{aligned} J^{(1)} = & \{v^1 v_{(1)}^1 + v^2 v_{(1)}^2, (v_{(1)}^1)^2 + (v_{(1)}^2)^2, (v_{(3)}^1)^2 + (v_{(3)}^2)^2, (v_{(1)}^3)^2 + (v_{(1)}^4)^2, (v_{(3)}^3)^2 + \\ & + (v_{(3)}^4)^2, v_{(1)}^1 v_{(3)}^1 + v_{(1)}^2 v_{(3)}^2, (v_{(2)}^1 - iv_{(2)}^2)(v_{(5)}^1 + iv_{(5)}^2), (v_{(2)}^1 + iv_{(2)}^2)(v_{(5)}^1 - iv_{(5)}^2), \\ & (v_{(2)}^1 - iv_{(2)}^2)(v_{(5)}^3 + iv_{(5)}^4), v_{(1)}^3 v_{(3)}^3 + v_{(1)}^4 v_{(3)}^4, (v_{(2)}^3 - iv_{(2)}^4)(v_{(5)}^3 + iv_{(5)}^4), \\ & (v_{(2)}^3 + iv_{(2)}^4)(v_{(5)}^3 - iv_{(5)}^4), (v_{(5)}^1 - iv_{(5)}^2)(v_{(2)}^3 + iv_{(2)}^4), v_{(1)}^1 v_{(1)}^3 + v_{(1)}^2 v_{(1)}^4, \\ & (v_{(2)}^1 - iv_{(2)}^2)(v_{(5)}^3 - iv_{(5)}^4)^3, v^1 \operatorname{ch} z + iv^2 \operatorname{sh} z\}, \quad z = \frac{1}{4} \ln((v_{(2)}^1)^2 + (v_{(2)}^2)^2). \end{aligned}$$

Делая замену $v_{(a)}^\alpha \rightarrow \eta_a \cdot D v^\alpha(h, x, u)$, можно выразить их через исходные переменные и убедиться, что при этом исключается зависимость от h . Мы не будем выписывать соответствующие довольно объемные выражения. Вместе J^0 и $J^{(1)}$ составляют базис дифференциальных инвариантов рассматриваемого действия.

Для построения операторов инвариантного дифференцирования достаточно найти любой набор из четырех нетривиальных частных решений системы (34), записанной с учетом коммутационных соотношений (17):

$$\eta_4 \Delta^1 = 0, \quad \eta_4 \Delta^2 = \Delta^2, \quad \eta_4 \Delta^3 = 0, \quad \eta_4 \Delta^5 = -\Delta^5.$$

Легко видеть, что такой набор существует уже для Δ , зависящих только от инвариантов нулевого порядка (это опять следует из (5)). Удобно взять его в следующем виде:

$$\begin{aligned} \Delta &= \{(-1, 0, 0, 0), (0, (iv^1 + v^2)^{-2}, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, (iv^1 + v^2)^2)\} = \\ &= \left\{(-1, 0, 0, 0), \left(0, \frac{-e^{-h}(u^1 - iu^2)^{-2}}{x_4}, 0, 0\right), (0, 0, 1, 0), \right. \\ &\quad \left. (0, 0, 0, -e^h x_4 (u^1 - iu^2)^2)\right\}. \end{aligned}$$

Комбинируя эти функции с правоинвариантными полями, приведенными в примере 1, и заменяя оператор D_h нулем, получим четыре оператора инвариантного дифференцирования:

$$\begin{aligned} \delta_1 &= D_1, & \delta_2 &= \frac{1}{(u^1 - iu^2)^2} \left(\frac{1}{x_4} D_2 + \frac{x_4}{2} D_4 \right), \\ \delta_3 &= x_1 D_1 - D_3, & \delta_4 &= (u^1 - iu^2)^2 x_4 D_4. \end{aligned}$$

Первый и третий из них совпадают с операторами первого порядка, найденными в примере 2 с помощью теории инвариантных операторов. Как и дифференциальные инварианты, полученные операторы не зависят от h .

Резюмируя, опишем пошагово весь алгоритм вычисления дифференциальных инвариантов и операторов инвариантного дифференцирования, зависящих от производных до порядка s включительно.

1. Вычисляем ранги матриц $\zeta = (\zeta_j^a)$ и $\hat{\zeta} = (\zeta_j^a, \theta_j^\alpha)$, построенных по генераторам группы преобразований, действующей на $Z \times U$.
2. Если $\text{rank } \zeta$ меньше $\dim Z$, ограничиваем действие до $M \times U$, исключая инвариантные независимые переменные.
3. Если $\text{rank } \zeta = \text{rank } \hat{\zeta}$, то в качестве базиса инвариантов нулевого порядка берем $\dim U$ независимых решений системы $\hat{\zeta}_j v^\alpha = 0$.
4. Находим базис правоинвариантных полей на группе G .
5. Если $\text{rank } \zeta = \dim G$, правоинвариантные поля образуют полный набор операторов инвариантного дифференцирования, а симметризованные комбинации $(\eta_{a_1} \dots \eta_{a_k}) v^\alpha$ для всех $k \leq s$ — искомый базис инвариантов.
6. В противном случае восстанавливаем по генераторам ζ_j вид левоинвариантных полей ξ_j и находим инварианты расширенного действия как решения системы $\hat{\xi}_j v^\alpha = 0$.
7. Выписываем систему (33) до слагаемых, содержащих v_s и, решая ее, находим базис инвариантов порядка не выше s .
8. Выписываем систему (34), находим $\dim M$ ее независимых решений и по формуле (35) строим базис операторов инвариантного дифференцирования.
9. Выражаем найденные инварианты и операторы инвариантного дифференцирования через исходные переменные z, u . При этом они не должны зависеть от координат h^μ в подгруппе изотропии, что может служить вспомогательным критерием правильности вычислений.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если известно число κ , определяемое условиями (5), то в системе (33) достаточно учесть слагаемые, содержащие производные не выше порядка

$\kappa + 1$, а в системе (34) – не выше порядка κ . Все инварианты более высокого порядка могут затем быть получены с помощью инвариантного дифференцирования.

Благодарности. Работа частично поддержана РФФИ (грант № 14-07-00272_а).

Список литературы

- [1] Л. В. Овсянников, *Групповой анализ дифференциальных уравнений*, Наука, М., 1978.
- [2] П. Олвер, *Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям*, Мир, М., 1989.
- [3] Н. Ибрагимов, *Группы преобразований в математической физике*, Наука, М., 1983.
- [4] A. Tresse, *Acta Math.*, **18**:1 (1894), 1–88.
- [5] Р. Е. Попович, В. Н. Бойко, *Вестн. СамГУ*, **4**:18 (2000), 49–56.
- [6] A. P. Churakhin, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, **9**:1 (2004), 25–33.
- [7] А. М. Виноградов, М. Марван, В. А. Юмагузин, *Докл. РАН*, **405**:3 (2005), 299–301.
- [8] Н. В. Любашевская, А. П. Чупахин, *Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки*, 2009, № 2, 52–62.
- [9] V. A. Yumaguzhin, *Acta Appl. Math.*, **109**:1 (2010), 283–313.
- [10] P. J. Olver, *J. Math. Anal. Appl.*, **333**:1 (2007), 450–471.
- [11] P. J. Olver, “Differential invariant algebras”, *Symmetries and Related Topics in Differential and Difference Equations*, Contemporary Mathematics, **549**, eds. D. Blázquez-Sanz, J. J. Morales-Ruiz, J. R. Lombardero, AMS, Providence, RI, 2011, 95–121.
- [12] J. Cheh, P. J. Olver, J. Pohjanpelto, *Found. Comput. Math.*, **8**:4 (2008), 501–532.
- [13] P. J. Olver, “Recent advances in the theory and application of Lie pseudo-groups”, *XVIII International Fall Workshop on Geometry and Physics*, AIP Conference Proceedings, **1260**, eds. M. Asorey, J. Clemente-Gallardo, E. Martinez, J. F. Carinena, AIP, Melville, NY, 2010, 35–63.
- [14] E. M. Dos Santos Cardoso-Bihlo, “Differential invariants for the Korteweg–de Vries equation”, *Group Analysis of Differential Equations and Integrable Systems* (Protaras, Cyprus, June 17–21, 2012), University of Cyprus, Nicosia, 2013, 71–79, [arXiv: 1307.4452](#).
- [15] И. В. Широков, *Сиб. матем. журн.*, **48**:6 (2007), 1405–1421.
- [16] Ф. Р. Гантмахер, *Теория матриц*, М., Наука, 1988.
- [17] И. В. Широков, *Известия вузов. Физика*, **6** (1997), 25–32.
- [18] A. A. Magazev, V. V. Mikheyev, I. V. Shirokov, *Evaluation of composition function along with invariant vector fields on Lie group using structural constants of corresponding Lie algebra*, [arXiv: 1312.0362](#).
- [19] И. В. Широков, *ТМФ*, **126**:3 (2001), 393–408.
- [20] И. В. Широков, *К-орбиты, гармонический анализ на однородных пространствах и интегрирование дифференциальных уравнений*, ОмГУ, Омск, 1998.
- [21] Д. В. Гальцов, *Частицы и поля в окрестности черных дыр*, Изд-во МГУ, М., 1986.
- [22] С. П. Барановский, И. В. Широков, *ТМФ*, **135**:1 (2003), 70–81.

Поступила в редакцию 13.09.2014