Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Е. Конштейн, И. В. Тютин, Деформации антискобки
с грассманоэзначными параметрами деформации, *ТМФ*,
2015, том 183, номер 1, 62–77

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8794>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.108.108

26 апреля 2023 г., 02:31:48

© 2015 г.

С. Е. Конштейн^{*†}, И. В. Тютин^{*‡}

ДЕФОРМАЦИИ АНТИСКОБКИ С ГРАССМАНОЗНАЧНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ ДЕФОРМАЦИИ

Рассмотрена супералгебра антискобок, реализованная на пространстве гладких функций на $\mathbb{R}^1$ со значениями в алгебре Грассмана с одной образующей ξ , состоящая из элементов вида $\xi f_0(x) + f_1(x)$, где f_0 имеет компактный носитель. Пространство вторых когомологий с коэффициентами в присоединенном представлении этой супералгебры содержит три нечетные и бесконечное число четных образующих. Описан большой класс деформаций этой супералгебры с грассманозначными параметрами деформации, в частности найдены все деформации этой супералгебры, число нечетных параметров которых равно трем.

Ключевые слова: антискобка, деформация, когомология, супералгебра Пуассона.

DOI: 10.4213/tmf8794

1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть $\mathbb{G}^n$ – алгебра Грассмана с n образующими ($n < \infty$). В работе [1] мы описали деформации супералгебры антискобок, реализованной на пространстве $\mathbf{D}_n$ гладких $\mathbb{G}^n$ -значных функций с компактным носителем на $\mathbb{R}^n$, и показали, что при $n \geq 1$ пространство деформаций представляет собой супермногообразие с особенностью, а именно, крест с одним четным параметром по одному направлению и с одним нечетным параметром по другому. Для доказательства этого утверждения мы нашли (см. также работу [2]¹⁾) пространство $H^2(\mathbf{D}_n, \mathbf{E}_n)$, содержащее пространство инфинитезимальных деформаций $H^2(\mathbf{D}_n, \mathbf{D}_n)$ и совпадающее с ним при $n > 1$; здесь $\mathbf{E}_n$ есть пространство гладких $\mathbb{G}^n$ -значных функций на $\mathbb{R}^n$. Помимо этого,

¹⁾В работе [1] найдены все когомологии пространства $H^2(\mathbf{D}_1, \mathbf{E}_1)$, в том числе пропущенные в статье [2].

^{*}Отделение теоретической физики им. И. Е. Тамма, Физический институт им. П. Н. Лебедева РАН, Москва, Россия. E-mail: konsteyn@lpi.ru, tyutin@lpi.ru

[†]Научно-исследовательский институт экспериментальной и теоретической физики, КазНУ им. Аль-Фараби, Алматы, Казахстан

[‡]Томский государственный педагогический университет, Томск, Россия

мы доказали, что $\dim H^2(\mathbf{D}_n, \mathbf{E}_n) = 1|1$, если $n \geq 2$, а $\dim H^2(\mathbf{D}_1, \mathbf{E}_1) = 3|3$. При этом $\dim H^2(\mathbf{D}_n, \mathbf{D}_n) = 1|1$ при $n \geq 1$.

Пусть $\mathbf{DE}$ есть пространство $\mathbb{G}^1$ -значных функций на $\mathbb{R}$ вида

$$f(x, \xi) = \xi f_0(x) + f_1(x), \quad f_0 \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \quad f_1 \in C^\infty(\mathbb{R}),$$

где $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ – пространство гладких функций на $\mathbb{R}$ с компактным носителем, а ξ есть единственная образующая алгебры $\mathbb{G}^1$. Очевидно, $\mathbf{D}_1 \subset \mathbf{DE} \subset \mathbf{E}_1$.

В настоящей работе из того факта, что

$$H^2(\mathbf{D}_1, \mathbf{E}_1) = H^2(\mathbf{D}_1, \mathbf{DE}) \subset H^2(\mathbf{DE}, \mathbf{DE}), \quad (1.1)$$

мы выводим, что супералгебра антискобок, реализованная на пространстве $\mathbf{DE}$, может иметь деформации с грассмановыми параметрами деформации, которые могут быть как четными, так и нечетными. При этом некоторые деформации зависят одновременно и от четных, и от нечетных параметров деформации.

Статья организована следующим образом. Основные определения и обозначения приведены в разделах 2 и 4. В разделе 3 найдено пространство $H^2(\mathbf{DE}, \mathbf{DE})$. Это пространство шире, чем $H^2(\mathbf{D}_1, \mathbf{E}_1)$ (см. (1.1)), а дополнительные коциклы параметризованы элементами факторпространства $\mathcal{D}'/(C^\infty)'$, которое естественно называть *пространством асимптотик обобщенных функций*. В разделе 6 сформулированы основные теоремы 6.1 и 6.2, описывающие деформации. Доказательство теоремы 6.2, громоздкое и не представляющее особого интереса, содержится в работе [3].

2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ И ОБОЗНАЧЕНИЯ

Пусть $\mathbb{K}$ есть либо $\mathbb{R}$, либо $\mathbb{C}$. Пространство гладких $\mathbb{K}$ -значных функций с компактным носителем на $\mathbb{R}^n$ обозначается как $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Это пространство снабжено стандартной топологией (см. статью [4]). Положим

$$\mathbf{D}_n = \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \otimes \mathbb{G}^n, \quad \mathbf{E}_n = C^\infty(\mathbb{R}^n) \otimes \mathbb{G}^n.$$

Образующие алгебры Грассмана обозначаются как ξ^α , где $\alpha = 1, \dots, n$, а координаты пространства $\mathbb{R}^n$ обозначаются как x^i , где $i = 1, \dots, n$. Используются также коллективные переменные z^A , равные x^A при $A = 1, \dots, n$ и равные ξ^{A-n} при $A = n+1, \dots, 2n$.

На пространствах $\mathbf{D}_n$ и $\mathbf{E}_n$ есть естественная четность, которая определяется четностью алгебры Грассмана; четность элемента f этих пространств обозначается через $\varepsilon(f)$. Пусть ϵ – четность, противоположная ε -четности: $\epsilon = \varepsilon + 1$. Мы полагаем $\varepsilon_A = \varepsilon(z^A) = 0$, $\epsilon_A = \epsilon(z^A) = 1$ при $A = 1, \dots, n$ и $\varepsilon_A = \varepsilon(z^A) = 1$, $\epsilon_A = \epsilon(z^A) = 0$ при $A = n+1, \dots, 2n$.

Хорошо известно, что антискобка

$$[f, g](z) = \sum_{i=1}^n \left(f(z) \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial \xi^i} g(z) - f(z) \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial \xi^i} \frac{\partial}{\partial x^i} g(z) \right) \quad (2.1)$$

задает структуру супералгебры Ли на суперпространствах $\mathbf{D}_n$ и $\mathbf{E}_n$ с ϵ -четностью. Мы называем эти супералгебры Ли *супералгебрами антискобок*²⁾.

²⁾Мы будем также использовать ассоциативное и суперкоммутативное с четностью ε умножение функций, на пространстве которых определена антискобка.

Интеграл³⁾ на $\mathbf{D}_n$ определен соотношением

$$\int dz f(z) = \int_{\mathbb{R}^n} dx \int d\xi f(z),$$

где интеграл на алгебре Грассмана нормирован условием $\int d\xi \xi^1 \dots \xi^n = 1$. Мы отождествляем $\mathbb{G}^n$ с дуальным ему пространством $(\mathbb{G}^n)'$, полагая $f(g) = \int d\xi f(\xi)g(\xi)$, где $f, g \in \mathbb{G}^n$. Соответственно, пространство $\mathbf{D}'_n$ непрерывных линейных функционалов на $\mathbf{D}_n$ отождествляется с пространством $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) \otimes \mathbb{G}^n$ и $\mathbf{E}'_n$ отождествляется с $(C^\infty(\mathbb{R}^n))' \otimes \mathbb{G}^n$.

Значение $m(f)$ функционала $m \in \mathbf{D}'_n$ на функциях $f \in \mathbf{D}_n$ часто будет записываться в интегральной форме: $m(f) = \int dz m(z)f(z)$.

Введем супералгебру Ли антискобок, реализованную на пространстве

$$\mathbf{DE}_n = \left\{ f \in \mathbf{E}_n \left| f - \int d\xi \xi^1 \dots \xi^n f \in \mathbf{D}_n \right. \right\}. \quad (2.2)$$

Ясно, что $\mathbf{D}_n \subset \mathbf{DE}_n \subset \mathbf{E}_n$, а если $f \in \mathbf{DE}_n$ и $g \in \mathbf{DE}_n$, то $[f, g] \in \mathbf{D}_n$.

Ниже мы рассматриваем только случай $n = 1$. Для простоты положим

$$D := \mathcal{D}(\mathbb{R}), \quad E := C^\infty(\mathbb{R}), \quad \mathbf{DE} := \mathbf{DE}_1, \quad \mathbf{D} := \mathbf{D}_1, \quad \mathbf{E} := \mathbf{E}_1.$$

Из (2.2) следует, что $\mathbf{DE} = \{f \mid f = \xi f_0(x) + f_1(x), \text{ где } f_0 \in D, f_1 \in E\}$.

3. КОГОМОЛОГИИ АНТИСКОБКИ

Пусть $\mathbf{U}$ есть либо $\mathbf{D}$, либо $\mathbf{DE}$. Пусть $\mathbf{U}$ действует в $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -градуированном пространстве V (действие элемента $f \in \mathbf{U}$ на $v \in V$ будет обозначаться как $f \cdot v$). Пространство p -коцепей $\mathcal{C}^p(\mathbf{U}, V)$ состоит из всех полилинейных суперкососимметричных отображений из $\mathbf{U}^{\times p}$ в V . Суперкососимметрия (см. книгу [5], с. 40) означает, что

$$M_p(\dots, f_i, f_{i+1}, \dots) = -(-1)^{\epsilon(f_i)\epsilon(f_{i+1})} M_p(\dots, f_{i+1}, f_i, \dots).$$

Пространство $\mathcal{C}^p(\mathbf{U}, V)$ обладает естественной $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -четностью: по определению форма $M_p \in \mathcal{C}^p(\mathbf{U}, V)$ имеет определенную четность $\epsilon(M_p)$, если

$$\epsilon(M_p(f_1, \dots, f_p)) = \epsilon(M_p) + \epsilon(f_1) + \dots + \epsilon(f_p)$$

для любых $f_j \in \mathbf{U}$ с ϵ -четностью $\epsilon(f_j)$. Иногда мы будем использовать грассманову ε -четность коцепей: $\varepsilon_{M_p} = \epsilon(M_p) + p + 1$.

Дифференциал d_p^V определен как линейный оператор, действующий из $\mathcal{C}^p(\mathbf{U}, V)$ в $\mathcal{C}^{p+1}(\mathbf{U}, V)$ так, что

$$\begin{aligned} d_p^V M_p(f_1, \dots, f_{p+1}) = & - \sum_{j=1}^{p+1} (-1)^{j+\epsilon(f_j)} |\epsilon(f)|_{1,j-1+\epsilon(f_j)\epsilon(M_p)} f_j \cdot M_p(f_1, \dots, \check{f}_j, \dots, f_{p+1}) - \\ & - \sum_{i < j} (-1)^{j+\epsilon(f_j)} |\epsilon(f)|_{i+1,j-1} M_p(f_1, \dots, f_{i-1}, [f_i, f_j], f_{i+1}, \dots, \check{f}_j, \dots, f_{p+1}) \end{aligned} \quad (3.1)$$

³⁾Математически точное определение интеграла на суперпространствах см. в книге [5]. См. также предисловие к [6] и саму книгу. Для наших целей, однако, достаточно сказанного в этом абзаце.

для любых $M_p \in \mathcal{C}^p(\mathbf{U}, V)$ и $f_1, \dots, f_{p+1} \in \mathbf{U}$, имеющих определенную ϵ -четность. Здесь символ $\sim$ означает, что аргумент под ним опущен, и использовано обозначение

$$|\epsilon(f)|_{i,j} = \sum_{l=i}^j \epsilon(f_l).$$

Дифференциал d^V , действующий на пространстве $\mathcal{C}(\mathbf{U}, V) := \bigoplus_p \mathcal{C}^p(\mathbf{U}, V)$, нильпотентен (см. работу [7]), а именно $(d^V)^2 = 0$ и, что эквивалентно, $d_{p+1}^V d_p^V = 0$ для любого $p = 0, 1, \dots$. Пространство p -когомологий обозначается через H_p^V . Пространство вторых когомологий H_{ad}^2 с коэффициентами в присоединенном представлении тесно связано с проблемой поиска формальных деформаций скобки Ли $[\cdot, \cdot]$ вида

$$[f, g]_* = [f, g] + \hbar[f, g]_1 + \dots$$

с точностью до преобразований подобия $[f, g]_T = T^{-1}[Tf, Tg]$, где непрерывный линейный оператор T из $V[[\hbar]]$ в $V[[\hbar]]$ имеет вид $T = \text{id} + \hbar T_1$. Условие, что $[\cdot, \cdot]_1$ есть 2-коцикл, эквивалентно тождеству Якоби для $[\cdot, \cdot]_*$ по модулю членов порядка $\hbar^2$. Подробнее определение деформаций дано в разделе 4.

В настоящей работе, как и в [4], мы предполагаем, что коцепи суть раздельно непрерывные полилинейные отображения.

Нам понадобятся когомологии супералгебры антискобок на $\mathbf{DE}$ в присоединенном представлении $V = \mathbf{DE}$, где $f \cdot g = [f, g]$ для произвольных $f, g \in \mathbf{DE}$. Пространство $\mathcal{C}^p(\mathbf{DE}, \mathbf{DE})$ состоит из раздельно непрерывных суперкососимметричных полилинейных отображений из $(\mathbf{DE})^{\times p}$ в $\mathbf{DE}$. Фактически мы интересуемся здесь только случаем $p = 2$.

Коциклы $M_p^1, \dots, M_p^k$ мы будем называть *независимыми*, если они лежат в линейно независимых классах эквивалентности в H^p . Полилинейную форму M_p , принимающую значения в $\mathbf{D}$, $\mathbf{E}$ или $\mathbf{DE}$, мы будем обозначать как $M_p(z|f_1, \dots, f_p)$ вместо более громоздкого $M_p(f_1, \dots, f_p)(z)$.

В работах [2] и [1] доказаны следующие две теоремы, описывающие когомологии антискобки в случае $p = 2$.

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть билинейные отображения $m_{2|i}$, $i = 1, \dots, 6$, из $\mathbf{D} \times \mathbf{D}$ в $\mathbf{E}$ определены выражениями

$$m_{2|1}(z|f, g) = \int du \partial_\eta g(u) \partial_y^3 f(u), \quad \epsilon(m_{2|1}) = 1, \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} m_{2|2}(z|f, g) = & \int du \theta(x - y) (\partial_\eta g(u) \partial_y^3 f(u) - \partial_\eta f(u) \partial_y^3 g(u)) + \\ & + x (\partial_\xi \partial_x^2 f(z) \partial_\xi \partial_x g(z) - \partial_\xi \partial_x f(z) \partial_\xi \partial_x^2 g(z)), \quad \epsilon(m_{2|2}) = 1, \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$m_{2|3}(z|f, g) = (-1)^{\epsilon(f)} \{ (1 - N_\xi) f(z) \} (1 - N_\xi) g(z), \quad \epsilon(m_{2|3}) = 1, \quad (3.4)$$

$$m_{2|4}(z|f, g) = (-1)^{\epsilon(f)} \Delta f(z) \mathcal{E}_z g(z) + \mathcal{E}_z f(z) \Delta g(z), \quad \epsilon(m_{2|4}) = 0, \quad (3.5)$$

$$m_{2|5}(z|f, g) = \int du (-1)^{\epsilon(f)} \partial_y f(u) \partial_y g(u), \quad \epsilon(m_{2|5}) = 0, \quad (3.6)$$

$$m_{2|6}(z|f, g) = \int du \theta(x - y) (-1)^{\epsilon(f)} \partial_y f(u) \partial_y g(u), \quad \epsilon(m_{2|6}) = 0, \quad (3.7)$$

$\partial_e z = (x, \xi)$, $u = (y, \eta)$, $N_\xi := \xi \partial_\xi u$

$$\Delta := \partial_x \partial_\xi, \quad N_z := x \partial_x + \xi \partial_\xi, \quad \mathcal{E}_z := 1 - \frac{1}{2} N_z. \quad (3.8)$$

Тогда $\dim H^2(\mathbf{D}, \mathbf{E}) = 3|3$ и коциклы $m_{2|i}(z|f, g)$, $i = 1, \dots, 6$, являются независимыми нетривиальными коциклами.

Нетрудно видеть, что все формы $m_{2|i}$, $i = 1, \dots, 6$, принимают значения в $\mathbf{DE}$ и могут быть продолжены до отображений из $\mathbf{DE} \otimes \mathbf{DE}$ в $\mathbf{DE}$. Заметим, что если 1-форма $m_1 \in \mathcal{C}^1(\mathbf{D}, \mathbf{E})$ такова, что $d_1 m_1 \in \mathcal{C}^2(\mathbf{D}, \mathbf{DE})$, то $m_1 \in \mathcal{C}^1(\mathbf{D}, \mathbf{DE})$. Отсюда следует, что

$$H^2(\mathbf{D}, \mathbf{E}) = H^2(\mathbf{D}, \mathbf{DE}) \subset H^2(\mathbf{DE}, \mathbf{DE}).$$

Чтобы найти $H^2(\mathbf{DE}, \mathbf{DE})$, мы должны выяснить, существуют ли 2-коциклы, отличные от $m_{2|i}$, $i = 1, \dots, 6$, у супералгебры антискобок на $\mathbf{DE}$. На этот вопрос дает ответ следующая теорема.

ТЕОРЕМА 3.2. *Имеют место следующие утверждения.*

1. Пусть $Q \in D'$, $Q \notin E'$ и пусть $Q(f_0) = \int dx \mu(x) f_0(x)$ с некоторой обобщенной функцией μ . Пусть 1-форма $\mathcal{Q} \in \mathcal{C}^1(\mathbf{DE}, \mathbf{DE})$ определена соотношением

$$\mathcal{Q}(f) := Q\left(\int d\xi \xi f\right) \quad \text{для любого } f \in \mathbf{DE}. \quad (3.9)$$

Тогда билинейная форма $m_{2|7, Q}$,

$$m_{2|7, Q}(z|f, g) := \int dz \xi \mu(x) [f, g]$$

или, эквивалентно,

$$m_{2|7, Q}(z|f, g) = \mathcal{Q}([f, g]), \quad \epsilon(m_{2|7, Q}) = 0,$$

является представителем нетривиального элемента из $H^2(\mathbf{DE}, \mathbf{DE})$.

2. Каждый элемент из $H^2(\mathbf{DE}, \mathbf{DE})$ имеет с точностью до точной формы вид

$$m_2 = \sum_{i=1}^6 c_i m_{2|i} + m_{2|7, Q},$$

где $m_{2|i}$ перечислены в (3.2)–(3.7) и $Q \in D'/E'$.

Отметим, что если $Q \in E'$, то $m_{2|7, Q} = d_1 \mathcal{Q}$.

Приведем краткое доказательство теоремы 3.2. Пусть m_2 – нетривиальный коцикл из $\mathcal{C}^2(\mathbf{DE}, \mathbf{DE})$, другими словами, $d_2 m_2 = 0$, и не существует такой формы $m_1 \in \mathcal{C}^1(\mathbf{DE}, \mathbf{DE})$, что $m_2 = d_1 m_1$. Рассмотрим сужение $m_{2|\mathbf{D} \otimes \mathbf{D}}$ формы m_2 на $\mathbf{D} \otimes \mathbf{D}$. Так как это сужение является коциклом из $\mathcal{C}^2(\mathbf{D}, \mathbf{DE})$, оно имеет вид

$$m_{2|\mathbf{D} \otimes \mathbf{D}} = \sum_{i=1}^6 c_i m_{2|i} + d_1 m_1$$

с некоторой 1-формой $m_1 \in \mathcal{C}^1(\mathbf{D}, \mathbf{DE})$. Пусть $n_2 := (m_2 - \sum_{i=1}^6 c_i m_{2|i})$, тогда

$$n_2|_{\mathbf{D} \otimes \mathbf{D}} = d_1 m_1.$$

Отметим, что, хотя $m_1 \in \mathcal{C}^1(\mathbf{D}, \mathbf{DE})$, форма $d_1 m_1$ может быть продолжена до формы из $\mathcal{C}^2(\mathbf{DE}, \mathbf{DE})$, в то время как m_1 не может быть продолжена до формы из $\mathcal{C}^1(\mathbf{DE}, \mathbf{DE})$. Прямое вычисление дает $m_1(f) = Q(\int d\xi \xi f)$, где $Q \in D'$, $Q \notin E'$. Действительно, $d_1 m_1(f, g) = Q(\int d\xi \xi[f, g]) \in \mathcal{C}^2(\mathbf{DE}, \mathbf{DE})$, поскольку $[f, g] \in \mathbf{D}$, если $f, g \in \mathbf{DE}$.

4. ДЕФОРМАЦИИ С ГРАССМАНОЗНАЧНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

4.1. Деформации супералгебры Ли. В этом пункте мы напомним некоторые понятия, связанные с формальными деформациями алгебр (см., например, работы [8]), применительно к случаю топологических супералгебр Ли.

Пусть L – топологическая супералгебра Ли над $\mathbb{K}$ (где $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$) с суперскобкой Ли $[\cdot, \cdot]$ и $\mathbb{K}[[\hbar]]$ – кольцо формальных степенных рядов по $\hbar$ над $\mathbb{K}$. Обозначим $\mathbb{K}[[\hbar]]$ -модуль формальных степенных рядов по $\hbar$ с коэффициентами в L через $L[[\hbar]]$ и снабдим $\mathbb{K}[[\hbar]]$ и $L[[\hbar]]$ топологией прямого произведения. Градуировка ϵ в L естественно определяет градуировку в $L[[\hbar]]$: элемент $f = f_0 + \hbar f_1 + \dots$ имеет определенную четность $\epsilon(f)$, если $\epsilon(f) = \epsilon(f_j)$ для всех $j = 0, 1, \dots$. Всякое p -линейное раздельно непрерывное отображение из $L^{\times p}$ в L (в частности, скобка $[\cdot, \cdot]$) единственным образом продолжается вследствие $\mathbb{K}[[\hbar]]$ -линейности до p -линейного раздельно непрерывного отображения над $\mathbb{K}[[\hbar]]$ из $L[[\hbar]]^{\times p}$ в $L[[\hbar]]$.

(Непрерывная) *формальная деформация* супералгебры Ли L – это по определению $\mathbb{K}[[\hbar]]$ -билинейная непрерывная по каждому аргументу в отдельности суперскобка Ли $C(\cdot, \cdot)$ на $L[[\hbar]]$, такая, что $C(f, g) = [f, g] \bmod \hbar$ для любых $f, g \in L[[\hbar]]$. Очевидно, всякая формальная деформация C представима в виде

$$C(f, g) = [f, g] + \hbar C_1(f, g) + \hbar^2 C_2(f, g) + \dots \quad \text{для любых } f, g \in L,$$

где каждая форма C_j – раздельно непрерывное суперкососимметричное билинейное отображение из $L \times L$ в L , т.е. 2-коцель с коэффициентами в присоединенном представлении супералгебры L .

Формальные деформации C^1 и C^2 называются *эквивалентными*, если существует непрерывный $\mathbb{K}[[\hbar]]$ -линейный оператор $T = \text{id} + \hbar T_1 + \hbar^2 T_2 + \dots$ из $L[[\hbar]]$ в $L[[\hbar]]$ такой, что $TC^1(f, g) = C^2(Tf, Tg)$ для $f, g \in L[[\hbar]]$.

4.2. Деформации с грассманозначными параметрами. Если у супералгебры Ли L существуют нечетные вторые коциклы в присоединенном представлении (например, коциклы (3.2)–(3.4) для супералгебры $\mathbf{DE}$), то естественно рассмотреть ассоциированные с этими нечетными коциклами деформации с нечетными параметрами [9]. Для этого вложим $\mathcal{C}(L, L)$ в некоторый $\mathcal{A}[[\hbar]]$ -модуль с суперкоммутативной ассоциативной супералгеброй $\mathcal{A}[[\hbar]]$ следующим образом.

Пусть $\mathbb{K} \subseteq \mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{A}_2 \subseteq \dots$ – ассоциативные суперкоммутативные супералгебры над $\mathbb{K}$, на которых имеется четность ε . Определим ассоциативную суперкоммутативную алгебру $\mathcal{A}[[\hbar]]$ формальных степенных рядов:

$$\mathcal{A}[[\hbar]] := \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \hbar^k a_k \mid a_k \in \mathcal{A}_{s_k} \right\}, \quad \text{где } s_0 \leq s_1 \leq s_2 \leq \dots.$$

Ясно, что на $\mathcal{A}[[\hbar]]$ также имеется четность ε .

В теореме 6.2 рассмотрен случай $\mathcal{A}_k = \mathbb{G}^{t_k}$, где $t_0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots$, а $\mathbb{G}^s$ – алгебра Грассмана над $\mathbb{K}$ с образующими $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_s$ и четностью ε .

Рассмотрим пространства $\mathcal{A}[[\hbar]]$ -линейных p -форм:

$$\mathcal{C}_A^p(L, L) := \mathcal{A}[[\hbar]] \otimes \mathcal{C}^p(L, L),$$

на которых имеется $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ градуировка (ε, ϵ) : градуировка элемента $a \otimes m$ равна $(\varepsilon(a), \epsilon(m))$. Определим на $\mathcal{C}_A^p(L, L)$ четность⁴⁾

$$\epsilon(a \otimes m_p) := \varepsilon(a) + \epsilon(m_p), \quad \text{где } a \in \mathcal{A}[[\hbar]], \quad m_p \in \mathcal{C}^p(L, L).$$

Поскольку всякая p -форма $M_p \in \mathcal{A}[[\hbar]] \otimes \mathcal{C}^p(L, L)$ отображает $L^{\times p}$ в $\mathcal{A}[[\hbar]] \otimes L$, нам понадобятся $\mathcal{A}[[\hbar]]$ -линейные p -формы на $(\mathcal{A}[[\hbar]] \otimes L)^{\times p}$.

Пусть $M_p \in \mathcal{A}[[\hbar]] \otimes \mathcal{C}^p(L, L)$. Тогда

$$\begin{aligned} M_p(a_1 \otimes f_1, a_2 \otimes f_2, \dots, a_p \otimes f_p) &:= (-1)^\sigma a_1 \dots a_p M_p(f_1, f_2, \dots, f_p), \\ \sigma &:= \varepsilon(a_1)\epsilon(M_p) + \varepsilon(a_2)(|\epsilon(f)|_{1,1} + \epsilon(m_p)) + \dots + \varepsilon(a_p)(|\epsilon(f)|_{1,p-1} + \epsilon(M_p)). \end{aligned} \quad (4.1)$$

Формы, определенные таким образом, суперкососимметричны:

$$\begin{aligned} (M_p)(a_1 \otimes f_1, \dots, a_i \otimes f_i, a_{i+1} \otimes f_{i+1}, \dots, a_p \otimes f_p) &= \\ &= -(-1)^{\epsilon(a_i \otimes f_i)\epsilon(a_{i+1} \otimes f_{i+1})} M_p(a_1 \otimes f_1, \dots, a_{i+1} \otimes f_{i+1}, a_i \otimes f_i, \dots, a_p \otimes f_p). \end{aligned}$$

Заметим, что супералгебра Ли L вкладывается в супералгебру Ли $L^A := \mathcal{A}[[\hbar]] \otimes L$ с четностью $\epsilon(a \otimes f) = \varepsilon(a) + \epsilon(f)$ и скобкой

$$[a_1 \otimes f_1, a_2 \otimes f_2] := (-1)^{\varepsilon(a_2)\epsilon(f_1)}(a_1 a_2) \otimes [f_1, f_2]. \quad (4.2)$$

Из этих определений следует, что L^A – действительно супералгебра Ли,

$$\begin{aligned} [a_1 \otimes f_1, a_2 \otimes f_2] &= -(-1)^{\epsilon(a_1 \otimes f_1)\epsilon(a_2 \otimes f_2)}[a_2 \otimes f_2, a_1 \otimes f_1], \\ (-1)^{\epsilon(a_1 \otimes f_1)\epsilon(a_3 \otimes f_3)}[[a_1 \otimes f_1, a_2 \otimes f_2], a_3 \otimes f_3] &+ \text{cycle}(1, 2, 3) = 0, \end{aligned}$$

и что на $\mathcal{C}_A(L, L) := \oplus_p \mathcal{C}_A^p(L, L)$ определен дифференциал

$$d(a \otimes m) = a \otimes dm \quad (4.3)$$

при любых $a \in \mathcal{A}[[\hbar]]$ и $m \in \mathcal{C}(L, L)$. Соотношение (4.3) следует из определения (3.1) и формул (4.1), (4.2).

⁴⁾См. также работу [10] и обсуждение теорем Неклюдовой и Шойнерта в [5] и [11].

Деформацией супералгебры L с грассманоэзначными параметрами деформации мы будем называть четную 2-форму $C_2 \in \mathcal{C}_A^2(L, L)$ со следующими свойствами:

$$C_2(f, g)|_{\hbar=0} = [f, g],$$

$$(-1)^{\varepsilon(f)\varepsilon(h)}C_2(C_2(f, g), h) + (-1)^{\varepsilon(g)\varepsilon(f)}C_2(C_2(g, h), f) + (-1)^{\varepsilon(h)\varepsilon(g)}C_2(C_2(h, f), g) = 0$$

для любых $f, g, h \in L$. Две деформации C_2^1 и C_2^2 эквивалентны, если существует такая 1-форма $T \in \mathcal{C}_A^1$, что

$$\begin{aligned} T(f)|_{\hbar=0} &= f \quad \text{для любого элемента } f \in L, \\ T(C_2^1(f, g)) &= C_2^2(T(f), T(g)). \end{aligned}$$

Далее мы опишем деформации супералгебры **DE** с грассманоэзначными параметрами деформации.

Поскольку нечетная часть пространства вторых нечетных когомологий **DE** с коэффициентами в присоединенном представлении имеет размерность 3, естественно рассмотреть случай $\mathcal{A}[[\hbar]] = \mathbb{G}^3[[\hbar]]$. Для этого случая все деформации найдены в теореме 6.2 и перечислены в разделе 6.

Для упрощения записи мы далее опускаем значок $\otimes$ при обозначении элементов из $\mathcal{C}_A$ и $\mathbf{DE}^A$, обозначаем $\mathbf{DE}^A$ символом **DE** и называем деформации с грассманоэзначными параметрами деформации просто деформациями.

5. АЛГЕБРА ЯКОБИАТОРОВ

Прежде чем формулировать (и доказывать) основную теорему настоящей работы, которая описывает деформации антисковки на **DE**, мы должны вычислить все якобиаторы $J_{i;j} = J(m_{2|i}, m_{2|j})$ для $i, j = 1, \dots, 6, (7, Q)$.

Пусть m и n – билинейные формы. Тогда

$$\begin{aligned} J(m, n)(f, g, h) &:= (-1)^{\varepsilon(f)\varepsilon(h)}(m(n(f, g), h) + (-1)^{\varepsilon(m)\varepsilon(n)}n(m(f, g), h)) + \\ &\quad + \text{cycle}(f, g, h), \quad \text{если } m \neq n, \\ J(m)(f, g, h) &:= \frac{1}{2}J(m, m)(f, g, h). \end{aligned}$$

Отметим, что $J(m)(f, g, h) = 0$, если $\varepsilon(m) = 1$.

Якобиатор связан с дифференциалом соотношением

$$d_2 m(f, g, h) = -(-1)^{\varepsilon(f)\varepsilon(h)}J(m_{2|0}, m)(f, g, h), \quad (5.1)$$

где $m_{2|0}(f, g) = [f, g]$.

5.1. Якобиаторы $J_{i;j}$ для $i, j = 1, \dots, 6, (7, Q)$. В этом пункте приведены выражения для якобиаторов $J_{i;j} = J(m_{2|i}, m_{2|j})$ для каждой пары коциклов с $i, j = 1, \dots, 6, (7, Q)$.

Далее в табл. 1, 2 и 3 звездочкой обозначены все пары i, j , для которых $J_{i;j} \neq 0$ и не имеет вида $J(m_{2|0}, n_2)$ с некоторой 2-формой n_2 . Знак $\times$ обозначает пару i, j , для которой соответствующий якобиатор $J_{i;j}$ не используется при выводе деформации **DE**. Выражения для необходимых $J_{i;j}$ и для форм $m_{2|8,Q}$, $m_{2|9}$, $m_{2|10,Q}$ перечислены ниже.

ТАБЛИЦА 1

$i \backslash j$	1	2	3	4	5	6	7, Q
1	0	0	*	*	0	0	0
2	0	0	*	*	0	$J(m_{2 0}, m_{2 9})$	$J(m_{2 0}, m_{2 10,Q})$
3	*	*	0	*	*	*	*
4	*	*	*	$\times$	*	*	*
5	0	0	*	*	0	0	0
6	0	$J(m_{2 0}, m_{2 9})$	*	*	0	0	$J(m_{2 0}, m_{2 8,Q})$
7, Q	0	$J(m_{2 0}, m_{2 10,Q})$	*	*	0	$J(m_{2 0}, m_{2 8,Q})$	0

Вычислять $J_{4;4}$ нет необходимости, так как мы знаем из работ [2] и [9], что $m_{2|4}$ генерирует деформации

$$[f, g]_* = [f, g] + (-1)^{\varepsilon(f)} \left\{ \frac{c_4}{1 + c_4 N_z/2} \Delta f \right\} \mathcal{E}_z g + \mathcal{E}_z f \left\{ \frac{c_4}{1 + c_4 N_z/2} \Delta g \right\},$$

где $c_4 \in \mathcal{A}[[\hbar]]$, $\varepsilon(c_4) = 0$ с граничным условием $c_4|_{\hbar=0} = 0$, и что $J_{4;4} = J(m_{2|0}, Y_2)$ с некоторой 2-формой Y_2 .

Мы имеем

$$\begin{aligned} J_{4;5}(f, g, h) &= \partial_x g_0(x) \int dy \partial_y h_0 \partial_y f_1 - \partial_x h_0(x) \int dy \partial_y g_0 \partial_y f_1 + \\ &+ \int dy f_1 (\partial_y g_0 \partial_y^2 h_0 - \partial_y h_0 \partial_y^2 g_0) + \frac{1}{2} \int dy f_1 (\partial_y^3 g_0 (1 - y \partial_y) h_0 - \partial_y^3 h_0 (1 - y \partial_y) g_0) + \\ &+ \text{cycles}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_{4;6}(f, g, h) &= -\frac{1}{2} \int du \theta(x - y) \eta y (-\{\partial_y^2 \Delta g(u)\} \Delta f(u) + \{\partial_y^2 \Delta f(u)\} \Delta g(u)) h + \\ &+ \frac{1}{2} x (-\{\partial_x \Delta g(z)\} \Delta f(z) + \{\partial_x \Delta f(z)\} \Delta g(z)) (1 - \xi \partial_\xi) h(z) - \\ &- \Delta f(z) \int du \theta(x - y) \eta \{\partial_\eta \partial_y^2 g(u)\} h(u) + \Delta g(z) \int du \theta(x - y) \eta h(u) \partial_\eta \partial_y^2 f(u) + \\ &+ \text{cycles}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_{4;7,Q}(f, g, h) &= \int du \eta \mu(y) \left((\Delta f \partial_\eta g - \{\partial_\eta f\} \Delta g) \left(-\partial_y + \frac{1}{2} y \partial_y^2 \right) h + \right. \\ &+ (\partial_\eta f \partial_y \Delta g - \partial_y \Delta f \partial_\eta g) \left(1 - \frac{1}{2} y \partial_y \right) h \left. \right) + \Delta f(z) \int du \eta \mu(y) (\partial_\eta g \partial_y h - \partial_\gamma g \partial_\eta h) + \\ &+ \text{cycles}. \end{aligned}$$

Далее, $J_{6;7,Q} = J(m_{2|0}, m_{2|8,Q})$, где

$$m_{2|8,Q}(z|f, g) = \int du \tilde{\mu}(y) (-1)^{\epsilon(f)} \partial_y f(u) \partial_y g(u), \quad \tilde{\mu}(x) = \int dy \mu(y) (\theta(y-x) - \tilde{\theta}(y)),$$

и

$$J_{1;3}(f, g, h) = -(1 - N_\xi) h(z) \int du \partial_\eta f(u) \partial_y^3 g(u) + \text{cycles},$$

$$J_{2;3}(f, g, h) = (1 - N_\xi) h(z) \int du \theta(x - y) (\partial_\eta g(u) \partial_y^3 f(u) - \partial_\eta f(u) \partial_y^3 g(u)) + \\ + (1 - N_\xi) h(z) (x \partial_\xi \partial_x^2 f(z) \partial_\xi \partial_x g(z) - x \partial_\xi \partial_x f(z) \partial_\xi \partial_x^2 g(z)) + \text{cycles},$$

$$J_{1;4}(f, g, h) = \Delta h(z) \int du \eta \partial_\eta g(u) \partial_y^3 \partial_\eta f(u) + \text{cycles},$$

$$J_{2;4}(f, g, h) = 2\Delta h(z) \int du \eta \theta(x - y) \partial_\eta g(u) \partial_y^3 \partial_\eta f(u) + \text{loc} + \text{cycles},$$

где loc означает некоторую локальную 2-форму⁵⁾, конкретный вид которой несуществен для нахождения деформации.

Наконец,

$$J_{2;6} = J(m_{2|0}, m_{2|9}),$$

где $m_{2|9}(z|f, g) = \partial_x \partial_\xi [f, g]$, и

$$J_{2;7,Q} = J(m_{2|0}, m_{2|10,Q}),$$

где

$$m_{2|10,Q}(z|f, g) = \int dz \xi \mu(x) \left(m_{2|2}(z|f, g) - \tilde{\theta}(x) \int du (\partial_\eta g(u) \partial_y^3 f(u) - \partial_\eta f(u) \partial_y^3 g(u)) \right),$$

здесь мы ввели обозначение $\tilde{\theta}$ для гладких функций, таких что $\tilde{\theta}(x) - \theta(x)$ имеет компактный носитель, где $\theta(x)$ — функция Хевисайда;

$$J_{3;4}(f, g, h) = \left(1 - \frac{1}{2} x \partial_x \right) (\{(1 - N_\xi) f(z)\} (1 - N_\xi) g(z)) \Delta h(z) + \\ + (1 - N_\xi) h \{ -\Delta f(z) (1 - N_\xi) \mathcal{E}_z g - \Delta g(z) (1 - N_\xi) \mathcal{E}_z f(z) \} + \text{cycles},$$

$$J_{3;5}(f, g, h) = (1 - N_\xi) h(z) \int du \partial_y f(u) \partial_y g(u) + \\ + \int du \eta (\{(1 - N_\xi) f\} (1 - N_\xi) g) \partial_\eta \partial_y^2 h + \text{cycles},$$

$$J_{3;6}(f, g, h) = \{(1 - N_\xi) h\} \int du \theta(x - y) \partial_y f(u) \partial_y g(u) - \\ - \int du \theta(x - y) \eta \partial_y (\{(1 - N_\xi) f\} (1 - N_\xi) g) \partial_y \partial_\eta h + \text{cycles},$$

$$J_{3;7,Q}(f, g, h) = - \int du \eta \mu(y) \partial_y (f \cdot g) \partial_\eta h + \\ + \{(1 - N_\xi) h(z)\} \int du \eta \mu(y) (\partial_\eta f \partial_y g + \partial_\eta g \partial_y f) + \text{cycles}.$$

⁵⁾ Форма M называется *локальной*, если $M(f, g) = \sum_{i=1}^k P_i f Q_i g$, где P_i и Q_i — дифференциальные операторы степеней от 0 до K_i по x и по ξ с гладкими коэффициентами.

5.2. Соотношения между константами. Используя найденные выражения для якобиаторов, можно доказать следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 5.1. Пусть

$$V_2 = m_{2|0} + \sum_{i=1}^6 c_i m_{2|i} + m_{2|7,Q},$$

где $c_1, c_2, c_3 \in \mathcal{A}[[\hbar]]$ – нечетные относительно ε константы, а $c_4, c_5, c_6 \in \mathcal{A}[[\hbar]]$ – четные, $Q \in \mathcal{A}[[\hbar]] \otimes (D'/E')$. Уравнение

$$J(m_{2|0}, X_2) = J(V_2, V_2)$$

относительно 2-формы X_2 имеет решение тогда и только тогда, когда

$$c_4 c_i = c_3 c_i = 0 \quad \text{для } i = 1, 2, 5, 6, \quad c_3 c_4 = 0, \quad c_3 Q = 0, \quad c_4 Q = 0.$$

Кроме того, c_1, c_2, c_3 являются нечетными элементами алгебры $\mathcal{A}[[\hbar]]$, следовательно, $c_i c_i = 0$ для $i = 1, 2, 3$.

Из этой теоремы следует, что нет необходимости вычислять якобиаторы, которые имеют в качестве коэффициентов произведения $c_4 c_i$ (при $i \neq 4$) или $c_3 c_i$. Именно, не нужно вычислять $J_{4;8,Q}, J_{4;9}, J_{4;10,Q}, J_{3;8,Q}, J_{3;9}$ и $J_{3;10,Q}$. Аналогично, так как $c_2 c_2 = 0$, нам не нужны явные выражения для якобиаторов $J_{2;9}, J_{2;10,Q}, J_{9;9}, J_{9;10,Q}$ и $J_{10,Q;10,Q}$.

5.3. Якобиаторы $J_{8,Q;i}, J_{9;i}, J_{10,Q;i}$. Якобиаторы $J_{i;j} = J(m_{2|i}, m_{2|j})$ каждой пары 2-форм (при $i = (8, Q), 9, (10, Q)$ и $j = 1, \dots, 6, (7, Q), (8, Q), 9, (10, Q)$) описаны в табл. 2. Явное выражение для a из этой таблицы нам не понадобится, для доказательства теоремы 6.1 используется лишь соотношение

$$J_{8,Q;2} + J_{9;7,Q} + J_{10,Q;6} = 0.$$

Форма $m_{2|11,Q}$ имеет вид

$$m_{2|11,Q}(z|f, g) = - \int du \, \eta \tilde{\mu}(y) (\partial_\eta f(u) \partial_\eta g'''(u) - \partial_\eta f'''(u) \partial_\eta g(u)).$$

ТАБЛИЦА 2

$i \backslash j$	1	2	3	4	5	6	7, Q	8, Q	9	10, Q
8, Q	0	a	$\times$	$\times$	0	0	0	0	$J(m_{2 0}, m_{2 11,Q})$	0
9	0	$\times$	$\times$	$\times$	0	0	$-a$	$J(m_{2 0}, m_{2 11,Q})$	$\times$	$\times$
10, Q	0	$\times$	$\times$	$\times$	0	0	0	0	$\times$	$\times$

5.4. Якобиаторы $J_{i;11,Q}$. Якобиаторы $J_{i;11,Q}$ приведены в табл. 3.

ТАБЛИЦА 3

$i \backslash j$	1	2	3	4	5	6	7, Q	8, Q	9	10, Q	11, Q
11, Q	0	$\times$	$\times$	$\times$	0	0	0	0	$\times$	$\times$	$\times$

6. ДЕФОРМАЦИИ АНТИСКОВКИ. РЕЗУЛЬТАТЫ

ТЕОРЕМА 6.1. Пусть $c_i \in \mathcal{A}[[\hbar]]$, $i = 1, \dots, 6$, и c_1, c_2, c_3 – нечетные параметры, c_4, c_5, c_6 – четные параметры относительно четности ε ; $c_i|_{\hbar=0} = 0$. Пусть элемент $Q \in \mathcal{A}[[\hbar]] \otimes (D'/E')$, μ – ядро интегрального представления некоторого представителя Q , причем Q – четный элемент относительно четности ε , $Q|_{\hbar=0} = 0$. Пусть

$$\tilde{\mu}(x) = \int dy \mu(y) (\theta(y-x) - \tilde{\theta}(y)),$$

где θ – функция Хевисайда, а $\tilde{\theta}$ – такая гладкая функция, что $\theta - \tilde{\theta} \in D$.

Пусть c_i и Q удовлетворяют соотношениям

$$c_4 c_i = c_3 c_i = 0 \quad \text{при} \quad i = 1, 2, 5, 6, \quad c_3 c_4 = 0, \quad c_3 Q = 0, \quad c_4 Q = 0. \quad (6.1)$$

Пусть

$$\mathcal{M}_{c_4}(f, g) = (-1)^{\varepsilon(f)} \left\{ \frac{c_4}{1 + c_4 N_z/2} \Delta f \right\} \mathcal{E}_z g + \mathcal{E}_z f \left\{ \frac{c_4}{1 + c_4 N_z/2} \Delta g \right\}.$$

Пусть

$$m_{2|0}(z|f, g) = [f, g], \quad \epsilon(m_{2|0}) = 0,$$

$$m_{2|1}(z|f, g) = \int du \partial_\eta g(u) \partial_y^3 f(u), \quad \epsilon(m_{2|1}) = 1,$$

$$\begin{aligned} m_{2|2}(z|f, g) = & \int du \theta(x-y) (\partial_\eta g(u) \partial_y^3 f(u) - \partial_\eta f(u) \partial_y^3 g(u)) + \\ & + x (\partial_\xi \partial_x^2 f(z) \partial_\xi \partial_x g(z) - \partial_\xi \partial_x f(z) \partial_\xi \partial_x^2 g(z)), \quad \epsilon(m_{2|2}) = 1, \end{aligned}$$

$$m_{2|3}(z|f, g) = (-1)^{\varepsilon(f)} \{ (1 - N_\xi) f(z) \} (1 - N_\xi) g(z), \quad \epsilon(m_{2|3}) = 1,$$

$$m_{2|5}(z|f, g) = \int du (-1)^{\varepsilon(f)} \partial_y f(u) \partial_y g(u), \quad \epsilon(m_{2|5}) = 0,$$

$$m_{2|6}(z|f, g) = \int du \theta(x-y) (-1)^{\varepsilon(f)} \partial_y f(u) \partial_y g(u), \quad \epsilon(m_{2|6}) = 0,$$

$$m_{2|7,Q}(z|f, g) = \int du \eta \mu(y) [f(u), g(u)], \quad \epsilon(m_{2|7,Q}) = 0,$$

$$m_{2|8,Q}(z|f, g) = \int du \tilde{\mu}(y) (-1)^{\varepsilon(f)} \partial_y f(u) \partial_y g(u), \quad \epsilon(m_{2|8,Q}) = 0,$$

$$m_{2|9}(z|f, g) = \partial_x \partial_\xi [f, g], \quad \epsilon(m_{2|9}) = 1,$$

$$\begin{aligned} m_{2|10,Q}(z|f, g) = & \int dz \xi \mu(x) (m_{2|2}(z|f, g) - \\ & - \tilde{\theta}(x) \int du (\partial_\eta g(u) \partial_y^3 f(u) - \partial_\eta f(u) \partial_y^3 g(u))), \quad \epsilon(m_{2|10,Q}) = 1, \end{aligned}$$

$$m_{2|11,Q}(z|f, g) = \int du \tilde{\mu}(y) (\partial_\eta g(u) \partial_y^3 f(u) - \partial_\eta f(u) \partial_y^3 g(u)), \quad \epsilon(m_{2|11,Q}) = 1.$$

Тогда билинейная форма

$$C = m_{2|0} + \mathcal{M}_{c_4} + \sum_{i=1,2,3,5,6} c_i m_{2|i} + m_{2|7,Q} - c_6 m_{2|8,Q} - c_2 c_6 m_{2|9} - c_2 m_{2|10,Q} - c_2 c_6^2 m_{2|11,Q} \quad (6.2)$$

является деформацией антискобки $m_{2|0}$ на **DE**.

Для доказательства этой теоремы достаточно убедиться, используя предыдущие результаты для якобиаторов, что для C выполняется тождество Якоби, т. е.

$$(-1)^{\epsilon(f)\epsilon(h)} C(C(f, g), h) + (-1)^{\epsilon(g)\epsilon(f)} C(C(g, h), f) + (-1)^{\epsilon(h)\epsilon(g)} C(C(h, f), g) = 0.$$

Обратную теорему мы доказали в следующих частных случаях (см. работу [3]).

ТЕОРЕМА 6.2. Пусть супералгебры $\mathcal{A}_k$, которые входят в определение супералгебры $\mathcal{A}[[\hbar]]$, являются алгебрами Грассмана с конечным числом образующих ζ каждая: $\mathcal{A}_k = \mathbb{G}^{s_k}$. Пусть C является некоторой деформацией антискобки $m_{2|0}$ на **DE**, зависящей от четного параметра $\hbar$ и нечетных параметров $\hbar\zeta_j$, где ζ_j — образующие алгебр Грассмана, т. е. может быть представлена в виде

$$C = \sum_{p=0}^{\infty} \hbar^p C_p(\hbar\zeta_1, \hbar\zeta_2, \dots), \quad C|_{\hbar=0} = m_{2|0}.$$

Тогда справедливы следующие утверждения:

- 1) если $C|_{\zeta=0} \neq m_{2|0}$, то C имеет вид (6.2) и c_i, Q удовлетворяют (6.1);
- 2) если $C|_{\zeta=0} = m_{2|0}$ и $s_k \leq 3$ для всех $k = 1, 2, \dots$, то C имеет вид (6.2) и c_i, Q удовлетворяют (6.1).

Доказательство теоремы 6.2 (несложное, но громоздкое) приведено в работе [3].

СЛЕДСТВИЕ 6.3. Если $s_k \leq 3$ для всех k , то C имеет вид (6.2) и c_i, Q удовлетворяют (6.1).

6.1. Перечень некоторых деформаций. При выполнении условий любого пункта теоремы 6.2 соотношения (6.1) могут быть разрешены в явном виде.

Пункт 1 этой теоремы расщепляется на две возможности:

- а) константа $c_4|_{\zeta=0} \neq 0$, в этом случае $c_1 = c_2 = c_3 = 0$, $c_5 = c_6 = 0$, $Q = 0$ и $C = m_{2|0} + \mathcal{M}_{c_4}$;
- б) по крайней мере одна из величин $c_5|_{\zeta=0}$, $c_6|_{\zeta=0}$, $Q|_{\zeta=0}$ отлична от нуля, в этом случае $c_3 = c_4 = 0$ и

$$C = m_{2|0} + \sum_{i=1,2,5,6} c_i m_{2|i} + m_{2|7,Q} - c_6 m_{2|8,Q} - c_2 c_6 m_{2|9} - c_2 m_{2|10,Q} - c_2 c_6^2 m_{2|11,Q}.$$

Теперь обсудим возможности, которые следуют из п. 2 теоремы 6.2. В этом случае

$$c_4 = c_{4,1}\zeta_2\zeta_3 + c_{4,2}\zeta_3\zeta_1 + c_{4,3}\zeta_1\zeta_2, \quad \text{где } c_{4,k} \in \hbar^2\mathbb{K}[[\hbar]].$$

Ясно, что можно выбрать новые образующие алгебры Грассмана $\mathbb{G}^3$

$$\zeta'_k = \sum_{l=1,2,3} a_{k,l}(\hbar)\zeta_l \quad (6.3)$$

таким образом, что $c_4 = \hbar^2 c'_{4,3}(\hbar) \zeta'_1 \zeta'_2$. Поэтому достаточно рассмотреть коэффициент c_4 вида $c_4 = \hbar^2 \alpha_4 \zeta_1 \zeta_2$, где $\alpha_4 \in K[[\hbar]]$. Такой вид c_4 сохраняется при следующих заменах образующих алгебры $\mathbb{G}^3$:

$$\zeta'_k = \sum_{l=1,2} a_{k,l}(\hbar) \zeta_l, \quad k = 1, 2, \quad \zeta'_3 = \zeta_3.$$

С точностью до преобразований типа (6.3) п. 2 теоремы 6.2 дает две возможности:

а) константы c_i и элемент Q имеют вид

$$\begin{aligned} c_i &= \hbar \sum_{j=1,2} \beta_i^j \zeta_j + \hbar^3 \gamma_i \zeta_1 \zeta_2 \zeta_3, \quad i = 1, 2, \quad c_3 = \hbar^3 \gamma_3 \zeta_1 \zeta_2 \zeta_3, \\ c_4 &= \hbar^2 \alpha_4 \zeta_1 \zeta_2, \quad c_i = \hbar^2 \sum_{k,l,m=1,2,3} \alpha_i^k \varepsilon_{klm} \zeta_l \zeta_m, \quad i = 5, 6, \\ Q &= \hbar^2 \sum_{k,l,m=1,2,3} Q_k \varepsilon_{klm} \zeta_l \zeta_m, \end{aligned}$$

где $\alpha_4, \alpha_i^k, \beta_i^j, \gamma_i \in \mathbb{K}[[\hbar]]$, $Q_k \in (D'/E')[[\hbar]]$; в этом случае

$$C = m_{2|0} + \sum_{i=1}^6 c_i m_{2|i} + m_{2|7,Q} - c_2 c_6 m_{2|9} - c_2 m_{2|10,Q};$$

б) $c_i = \zeta_1 \tilde{c}_i$, $Q = \zeta_1 \tilde{Q}$, в этом случае

$$C = m_{2|0} + \zeta_1 \left(\sum_{i=1}^6 \tilde{c}_i m_{2|i} + m_{2|7,\tilde{Q}} \right).$$

ПРИЛОЖЕНИЕ

Якобиатор коцикла и кограницы

В приложении мы сформулируем и докажем лемму, которая помогает вычислить якобиаторы $J_{i;7,Q}$ в разделе 5. Данная лемма справедлива для произвольной (супер)алгебры Ли A .

Пусть 2-форма $m_{2|0}$ определяет скобку в произвольной (супер)алгебре Ли A : $m_{2|0}(f, g) = [f, g]$. Тогда дифференциал 2-формы F связан с якобиатором $J(m_{2|0}, F)$ соотношением (5.1):

$$d_2 F(f, g, h) = -(-1)^{\epsilon(f)\epsilon(h)} J(m_{2|0}, F)(f, g, h).$$

Здесь и далее $f, g, h \in A$, ϵ – четность на A .

ЛЕММА П.1. Пусть 2-форма m_2 является коциклом, т. е. $J(m_{2|0}, m_2) = 0$, пусть 2-форма n является кограницей, т. е. $n(f, g) = d_1 M_1(f, g)$, $\epsilon(n) = \epsilon(m_1)$. Тогда

$$J(m_2, d_1 M_1) = J(m_{2|0}, U_2),$$

где

$$\begin{aligned} U_2(f, g) &= (-1)^{\epsilon(m_2)\epsilon(m_1)} M_1(m_2(f, g)) - m_2(M_1(f), g) + (-1)^{\epsilon(f)\epsilon(g)} m_2(M_1(g), f), \\ \epsilon(U_2) &= \epsilon(m_2) + \epsilon(m_1). \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим

$$R := J(m_{2|0}, U_2), \quad J := J(m_2, d_1 M_1), \quad \sigma(f, h) := (-1)^{\epsilon(f)\epsilon(h)}.$$

Вычислим разность $J - R$:

$$\begin{aligned} J - R = & \sigma(f, h) \{ m_2([M_1(f), g], h) - \sigma(g, f) m_2([M_1(g), f], h) - \\ & - m_2(M_1([f, g]), h) + (-1)^{\epsilon(m_2)\epsilon(m_1)} [M_1(m_2(f, g)), h] + \\ & + (-1)^{\epsilon(m_1)(\epsilon(f)+\epsilon(g))} [m_2(f, g), M_1(h)] - (-1)^{\epsilon(m_2)\epsilon(m_1)} M_1([m_2(f, g), h]) - \\ & - (-1)^{\epsilon(m_2)\epsilon(m_1)} [M_1(m_2(f, g)), h] + [m_2((M_1(f), g), h)] - \sigma(g, f) [m_2(M_1(g), f), h] - \\ & - (-1)^{\epsilon(m_2)\epsilon(m_1)} M_1(m_2([f, g], h)) + m_2(M_1([f, g]), h) - \\ & - \sigma(f, h) \sigma(g, h) m_2(M_1(h), [f, g]) \} + \text{cycles}(f, g, h). \end{aligned} \quad (\text{П.1})$$

При помощи соотношения $J(m_{2|0}, m_2) = 0$ выражение (П.1) можно привести к виду

$$\begin{aligned} J - R = & \sigma(f, h) \{ m_2([M_1(f), g], h) - \sigma(g, f) m_2([M_1(g), f], h) + \\ & + (-1)^{\epsilon(m_1)(\epsilon(f)+\epsilon(g))} [m_2(f, g), M_1(h)] + [m_2(M_1(f), g), h] - \\ & - \sigma(g, f) [m_2(M_1(g), f), h] - \sigma(f, h) \sigma(g, h) m_2(M_1(h), [f, g]) \} + \text{cycles}. \end{aligned} \quad (\text{П.2})$$

Заметим, что это выражение не меняет своего значения, если в произвольном его слагаемом сделать замены $f \rightarrow g \rightarrow h \rightarrow f$. При помощи таких замен выражение (П.2) можно привести к виду

$$\begin{aligned} J - R = & \sigma(g, h) m_2([M_1(h), f], g) - \sigma(f, g) \sigma(g, h) m_2([M_1(h), g], f) + \\ & + \sigma(f, h) (-1)^{\epsilon(m_1)(\epsilon(f)+\epsilon(g))} [m_2(f, g), M_1(h)] + \sigma(g, h) [m_2(M_1(h), f), g] - \\ & - \sigma(f, g) \sigma(g, h) [m_2(M_1(h), g), f] - \sigma(g, h) m_2(M_1(h), [f, g]) + \text{cycles} \end{aligned}$$

и, наконец, к виду

$$\begin{aligned} J - R = & (-1)^{\epsilon(m_1)\epsilon(g)} \{ \sigma(g, M_1(h)) m_2([M_1(h), f], g) + \sigma(f, g) m_2([M_1(h), g], f) + \\ & + \sigma(f, M_1(h)) [m_2(f, g), M_1(h)] + \sigma(g, M_1(h)) [m_2(M_1(h), f), g] + \\ & + \sigma(f, g) [m_2(g, M_1(h)), f] + \sigma(f, M_1(h)) m_2([f, g], M_1(h)) \} + \text{cycles} = \\ = & (-1)^{\epsilon(m_1)\epsilon(g)} J(m_{2|0}, m_2)(f, g, M_1(h)) + \text{cycles}(f, g, h). \end{aligned} \quad (\text{П.3})$$

Так как m_2 является коциклом, выражение (П.3) равно нулю до циклирования.

Благодарности. Авторы благодарны П. Зусмановичу за полезные обсуждения и критические замечания. Настоящая работа частично поддержана РФФИ (гранты № 14-02-01171 (С. Конштейн) и № 14-01-00489 (И. Тютин)).

Список литературы

- [1] S. E. Konstein, I. V. Tyutin, *The deformations of antibracket with even and odd deformation parameters*, [arXiv: 1011.5807](#).
- [2] S. E. Konstein, I. V. Tyutin, *J. Math. Phys.*, **49:7** (2008), 072103, 41 pp.
- [3] S. E. Konstein, I. V. Tyutin, *The deformations of antibracket with even and odd deformation parameters, defined on the space DE_1* , [arXiv: 1112.1686](#).

- [4] С.Е. Конштейн, А.Г. Смирнов, И.В. Тютин, *ТМФ*, **143**:2 (2005), 163–194, [arXiv: hep-th/0312109](#).
- [5] И.И. Бернштейн, Д.А. Лейтес, В.Н. Шандер, *Семинар по суперсимметриям*, т. 1: *Алгебра и анализ: основные факты*, МЦНМО, М., 2011.
- [6] Ф.А. Березин, *Введение в суперанализ*, МЦНМО, М., 2013.
- [7] M. Scheunert, R. B. Zhang, *J. Math. Phys.*, **39**:9 (1998), 5024–5061, [arXiv: q-alg/9701037](#).
- [8] M. Gerstenhaber, *Ann. Math.* (2), **79**:1 (1964), 59–103; **99**:2 (1974), 257–276.
- [9] Д.А. Лейтес, И.М. Щепочкина, *ТМФ*, **126**:3 (2001), 339–369.
- [10] M. Scheunert, *J. Math. Phys.*, **20**:4 (1979), 712–720.
- [11] T. Covoło, J.-P. Michel, *Determinants over graded-commutative algebras, a categorical viewpoint*, [arXiv: 1403.7474](#).

Поступила в редакцию 15.09.2014