Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Ю. Славянов, О понижении полиномиальной степени
ни фуксовой (2×2) -системы, *ТМФ*, 2015, том 182, но-
мер 2, 223–230

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8795>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru под-
разумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.7.115

26 апреля 2023 г., 09:49:33

© 2015 г.

С. Ю. Славянов*

О ПОНИЖЕНИИ ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ СТЕПЕНИ ФУКСОВОЙ (2×2) -СИСТЕМЫ

Фуксова (2×2) -система, генерирующая уравнение Пенлеве P^6 , подвергается полиномиальному преобразованию, имеющему характер вращения, для понижения полиномиальной степени матриц в левой и правой частях системы. Это делает более прозрачными вывод уравнения Пенлеве и изучение симметрий уравнения.

Ключевые слова: фуксовы системы, уравнение Пенлеве.

DOI: 10.4213/tmf8795

Рассматривается следующая фуксова (2×2) -система с тремя фуксовыми сингулярностями в конечных точках z_j , $z_1 = 0$, $z_2 = 1$, $z_3 = t$ и фуксовой сингулярностью на бесконечности:

$$\sigma(z)Y' = \sum_j^3 A^{(j)}\sigma_j(z)Y = AY, \quad (1)$$

где Y – двумерный вектор с компонентами y_1, y_2 , $\sigma = \prod_{j=1}^3 (z - z_j)$, $\sigma_j = \sigma/(z - z_j)$, а $A^{(j)}$ – постоянные матрицы. Известно, что такая система при условии изомономной деформации генерирует уравнение Пенлеве P^6 . Система (1), ее конфлюэнтные случаи и уравнения Пенлеве широко используются в модельных физических задачах. Вывод уравнений Пенлеве приведен, например, в книге [1]. Вывод достаточно громоздкий, отчасти это связано с переопределенностью системы (1). Она содержит 12 параметров (параметр t не включается в их число), которые являются матричными элементами $A^{(j)}$. Линейными преобразованиями системы удастся уменьшить число параметров, также можно наложить условия на связь между ними, тем самым доведя их число до числа параметров в уравнении P^6 . Эти действия подробно рассмотрены в работе [2].

Мы используем другой подход. Мы будем строить полиномиальное матричное преобразование, приводящее систему к наиболее простому виду с нужным числом параметров. Это матричное преобразование зависит от одного параметра – параметра ρ .

* Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия.
E-mail: slav@ss2034.spb.ru

Пусть умножению на z приписывается степень 1, а дифференцированию по z – степень -1 . Тогда в левой и правой частях уравнения (1) стоят полиномы второй степени. Наша задача состоит в том, чтобы свести их к полиномам первой степени.

Для этого выполняется преобразование с матрицей R ,

$$Y = RU,$$

линейно зависящей от параметра ρ , квадратично зависящей от переменной z и имеющей определитель $\det R = \sigma$.

При этом исходное уравнение преобразуется к виду

$$RU' = TU = (S - R')U, \quad \text{где} \quad T = \left[\sum_1^3 \frac{A^{(j)} + I}{z - z_j} \right] R - R', \quad (2)$$

где I – единичная матрица, или

$$U' = R^{-1}(S - R')U = \sigma^{-1}DU. \quad (3)$$

Видно, что преобразование исходного уравнения является суперпозицией преобразования, похожего на вращение и превращающегося в него в случае постоянной матрицы R , диагонального преобразования и преобразования, обращающегося в нуль при постоянном R . Назовем введенное преобразование *полиномиальным вращением*.

Выбор матрицы R неоднозначен, и в соответствии с этим выбором требуется наложить условия на матрицы $A^{(j)}$, чтобы правая часть уравнения (2) была линейна по переменной z .

Положим, например,

$$R = \begin{pmatrix} z^2 - z & \rho(z - 1) \\ z & z - t + \rho \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Дополнительно мы находим

$$R' = \begin{pmatrix} 2z - 1 & \rho \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Легко видеть, что в случае произвольных матриц $A^{(j)}$ правая часть уравнения (2) содержит члены, сингулярные по z , и за счет выбора матричных элементов $A^{(j)}$ прежде всего следует избавиться от таких членов. Пусть

$$A^{(j)} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(j)} & a_{12}^{(j)} \\ a_{21}^{(j)} & a_{22}^{(j)} \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Подчиним эти матрицы требованию $\det A^{(j)} = 0$. Это условие приводит к равенству нулю одного из собственных значений этих матриц и к голоморфности одного из решений в соответствующей особой точке.

Введем матрицы

$$S^{(j)} = \frac{A^{(j)} + I}{z - z_j} R. \quad (7)$$

Произведя необходимые вычисления, получим

$$S^{(1)} = \begin{pmatrix} (a_{11}^{(1)} + 1)(z - 1) + a_{12}^{(1)} & (a_{11}^{(1)} + 1)\frac{\rho(z - 1)}{z} + a_{12}^{(1)}\frac{z - t + \rho}{z} \\ a_{21}^{(1)}(z - 1) + a_{22}^{(1)} + 1 & (a_{21}^{(1)})\frac{\rho(z - 1)}{z} + (a_{22}^{(1)} + 1)\frac{z - t + \rho}{z} \end{pmatrix}.$$

Требование отсутствия сингулярности в $S^{(1)}$ порождает связи между матричными элементами

$$-(a_{11}^{(1)} + 1)\rho + (\rho - t)a_{12}^{(1)} = 0, \quad -a_{21}^{(1)}\rho + (\rho - t)(a_{22}^{(1)} + 1) = 0,$$

которые можно записать в матричном виде как

$$(A^{(1)} + I)R(0) = 0. \quad (8)$$

При выполнении этих связей матрица $S^{(1)}$ принимает вид

$$S^{(1)} = \begin{pmatrix} (a_{11}^{(1)} + 1)\left(z + \frac{t}{\rho - t}\right) & (a_{11}^{(1)} + 1)\frac{\rho(\rho - t + 1)}{\rho - t} \\ a_{21}^{(1)}\left(z + \frac{t}{\rho - t}\right) & a_{21}^{(1)}\frac{\rho(\rho - t + 1)}{\rho - t} \end{pmatrix} \quad (9)$$

с определителем $\det S^{(1)} = 0$. Таким образом, матрица $S^{(1)}$ линейна по переменной z . Одно из собственных значений этой матрицы обращается в нуль.

Рассмотрим теперь матрицу $S^{(2)}$:

$$S^{(2)} = \begin{pmatrix} (a_{11}^{(2)} + 1)z + a_{12}^{(2)}\frac{z}{z - 1} & (a_{11}^{(2)} + 1)\rho + a_{12}^{(2)}\frac{z - t + \rho}{z - 1} \\ a_{21}^{(2)}z + (a_{22}^{(2)} + 1)\frac{z}{z - 1} & a_{21}^{(2)}\rho + (a_{22}^{(2)} + 1)\frac{z - t + \rho}{z - 1} \end{pmatrix}.$$

Исключение сингулярных членов приводит к условиям

$$a_{12}^{(2)} = 0, \quad a_{22}^{(2)} + 1 = 0,$$

которые можно записать в матричном виде как

$$(A^{(2)} + I)R(1) = 0. \quad (10)$$

Как следствие, матрица $S^{(2)}$ принимает вид

$$S^{(2)} = \begin{pmatrix} (a_{11}^{(2)} + 1)z & (a_{11}^{(2)} + 1)\rho \\ a_{21}^{(2)}z & a_{21}^{(2)}\rho \end{pmatrix} \quad (11)$$

с определителем $\det S^{(2)} = 0$. Снова мы имеем линейность по z .

В заключение вычислим $S^{(3)}$:

$$S^{(3)} = \begin{pmatrix} (a_{11}^{(3)} + 1)\left(z + t - 1 + \frac{t(t - 1)}{z - t}\right) + a_{12}^{(3)}\left(1 + \frac{t}{z - t}\right) & (a_{11}^{(3)} + 1)\rho\frac{z - 1}{z - t} + a_{12}^{(3)}\frac{z - t + \rho}{z - t} \\ a_{21}^{(3)}\left(z + t - 1 + \frac{t(t - 1)}{z - t}\right) + (a_{22}^{(3)} + 1)\left(1 + \frac{t}{z - t}\right) & a_{21}^{(3)}\rho\frac{z - 1}{z - t} + (a_{22}^{(3)} + 1)\frac{z - t + \rho}{z - t} \end{pmatrix}.$$

Исключение сингулярных членов порождает следующие соотношения между матричными элементами:

$$(a_{11}^{(3)} + 1)(t - 1) + a_{12}^{(3)} = 0, \quad a_{21}^{(3)}(t - 1) + (a_{22}^{(3)} + 1) = 0$$

или, в матричном виде,

$$(A^{(3)} + I)R(t) = 0. \quad (12)$$

В результате матрица $S^{(3)}$ становится линейной по z и принимает вид

$$S^{(3)} = \begin{pmatrix} (a_{11}^{(3)} + 1)z & (a_{11}^{(3)} + 1)(\rho - t + 1) \\ a_{21}^{(3)}z & a_{21}^{(3)}(\rho - t + 1) \end{pmatrix}, \quad (13)$$

опять с нулевым определителем $\det S^{(3)} = 0$.

Выполнение условий (8), (10), (12) означает, что выражение

$$S(z) = \left[\sum_{j=1}^3 \frac{A^{(j)} + I}{z - z_j} \right] R(z) = \sum_{j=1}^3 S^{(j)} \quad (14)$$

не имеет особенностей в особых точках уравнения (1). Также число параметров уравнения (2) сокращается до шести плюс еще один параметр ρ . Равенство нулю определителей означает, что в каждой из конечных сингулярностей одно решение голоморфно. Вспомнив, что должно выполняться тождество Фукса для характеристических показателей

$$\sum_{m=1}^2 \left(\sum_{j=1}^3 \chi_{mj} \right) + \chi_{m\infty} = 3, \quad (15)$$

видим, что число параметров сокращается до пяти.

Вычисление матричных элементов матрицы S дает

$$\begin{aligned} S_{11} &= \sum (a_{11}^{(j)} + 1)z + (a_{11}^{(1)} + 1) \frac{t}{\rho - t}, \\ S_{12} &= \sum (a_{11}^{(j)} + 1)\rho + (a_{11}^{(1)} + 1) \frac{\rho}{\rho - t} + (a_{11}^{(3)} + 1)(-t + 1), \\ S_{21} &= \sum a_{21}^{(j)}z + a_{21}^{(1)} \frac{t}{\rho - t}, \\ S_{22} &= \sum a_{21}^{(j)}\rho + a_{21}^{(1)} \frac{\rho}{\rho - t} + a_{21}^{(3)}(-t + 1). \end{aligned}$$

Обратная к R матрица равна

$$R^{-1} = \sigma^{-1} \begin{pmatrix} z - t + \rho & -z \\ -\rho(z - 1) & z(z - 1) \end{pmatrix}. \quad (16)$$

Видно, что она квадратична по z , если не принимать во внимание множитель $\sigma^{-1}(z)$.

Положим

$$B = \sigma(z)R^{-1}S. \quad (17)$$

Учитывая полиномиальную зависимость матричных элементов S_{lm} и R_{lm}^{-1} от z , нетрудно видеть, что наивысшую степень, а именно третью, будет содержать поддиагональный матричный элемент B_{21} . От старшей степени можно избавиться, положив

$$\sum a_{21}^{(j)} = 0. \quad (18)$$

Интерпретировать это условие можно следующим образом. Введем матрицу $A_\infty = \lim_{z \rightarrow \infty} zA$. Тогда

$$A_\infty = \begin{pmatrix} \sum a_{11}^{(j)} & \sum a_{12}^{(j)} \\ 0 & \sum a_{22}^{(j)} \end{pmatrix}. \quad (19)$$

Как следствие, диагональные матричные элементы равны характеристическим показателям решений на бесконечности. С учетом тождества Фукса это приводит к сокращению числа параметров в $B(z)$, включая ρ , до пяти.

Введем для упрощения записи новые параметры $\kappa, e_1, e_2, e_3, \beta$:

$$\begin{aligned} \kappa &= \sum (a_{11}^{(j)} + 1), & e_1 &= (a_{11}^{(1)} + 1) \frac{\rho}{\rho - t} + 1, \\ e_2 &= \kappa \rho + \frac{\rho}{\rho - t} (a_{11}^{(1)} + 1) + (a_{11}^{(3)} + 1)(1 - t), \\ e_3 &= a_{21}^{(1)} \frac{t}{\rho - t}, & \beta &= 1 + \frac{\rho}{\rho - t} a_{21}^{(1)} + a_{21}^{(3)}(1 - t). \end{aligned}$$

В терминах этих параметров при выполнении условия (18) матрица S перепишется в виде

$$S = \begin{pmatrix} \kappa z + e_1 + 1 & e_2 \\ e_3 & \beta - 1 \end{pmatrix}. \quad (20)$$

Это представление имеет сходство с соответствующей формулой в работе [3]. Выбор последней формулы был сделан подбором, путем проб и ошибок.

Матрица T равна

$$T = \begin{pmatrix} (\kappa + 2)z + e_1 & \rho + e_2 \\ e_3 + 1 & \beta \end{pmatrix}. \quad (21)$$

Обратимся к матрице

$$D = B - \sigma R^{-1} R' = \sigma R^{-1} T. \quad (22)$$

Сначала вычислим $\sigma R^{-1} R'$:

$$\sigma R^{-1} R' = \begin{pmatrix} 2z(z-1) + (\rho-t)(2z-1) & (\rho-1)z + \rho(\rho-t) \\ (z-1)[z(1-2\rho) + \rho] & (z-1)(z-\rho^2) \end{pmatrix}. \quad (23)$$

Матричные элементы матрицы B в тех же терминах имеют вид

$$\begin{aligned} B_{11} &= \kappa z^2 + [e_1 + 1 - e_3 + \kappa(\rho - t)]z + (e_1 + 1)(\rho - t), \\ B_{12} &= (e_2 - \beta + 1)z + (\rho - t)e_2, \\ B_{21} &= (z-1)[(e_3 - \rho\kappa)z - \rho e_1], \\ B_{22} &= (z-1)[(\beta - 1)z - \rho e_2]. \end{aligned} \quad (24)$$

В заключение приведем матричные элементы матрицы $D(z)$:

$$\begin{aligned} D_{11} &= [(\kappa + 2)(z + \rho - t) + (e_1 - e_3 - 1)]z + e_1(\rho - t), \\ D_{12} &= (\rho + e_2)(z + \rho - t) - \beta z, \\ D_{21} &= (z - 1)[(e_3 - \rho(\kappa + 2) + 1)z - \rho e_1], \\ D_{22} &= (z - 1)[\beta z - \rho(\rho + e_2)]. \end{aligned} \quad (25)$$

Заметим, что детерминанты вычетов $\sigma^{-1}D$ в сингулярностях $z = z_j$, а именно $\det D(0)$, $\det D(1)$, $\det D(t)$, равны нулю. Таким образом, ненулевые характеристические показатели в этих точках равны следам матрицы D в этих точках, что дает

$$\begin{aligned} \chi_0 &= \operatorname{tr} D(0) = e_1(\rho - t) + \rho(\rho + e_2), \\ \chi_1 &= \operatorname{tr} D(1) = (\kappa + 2)(\rho - t + 1) + e_1(\rho - t + 1) - (e_3 + 1), \\ \chi_t &= \operatorname{tr} D(t) = e_1\rho + [(\kappa + 2)\rho - e_3 - 1]t + (t - 1)[\beta t - \rho(\rho + e_2)]. \end{aligned} \quad (26)$$

Принимая во внимание значения характеристических экспонент на бесконечности

$$\chi_{1\infty} = -(\kappa + 2), \quad \chi_{2\infty} = -\beta t, \quad (27)$$

подчиним их тождеству Фукса

$$e_1(3\rho - 2t + 1) + (t - 2)(\beta t - \rho(\rho + e_2)) + (\kappa + 2)(\rho t + \rho - t) - (e_3 + 1)(t + 1) = 3, \quad (28)$$

откуда можно выразить, например, параметр e_3 через другие параметры.

Таким образом, можно сформулировать следующее

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. *Фуксову (2×2) -систему с тремя конечными особенностями и особой точкой на бесконечности (1), причем такую, что детерминанты вычетов матрицы A в особых точках равны нулю и выполняется условие на бесконечности (18), можно полиномиальным вращением преобразовать в фуксову систему*

$$RU' = (S - R')U = TU,$$

полиномиальная степень которой на единицу ниже, чем полиномиальная степень системы (1).

Подчеркнем, что оба внедиагональных матричных элемента матрицы D имеют по одному нулю (помимо точки $z_2 = 1$), которые, вообще говоря, отвечают двум ложным особым точкам в соответствующих уравнениях второго порядка: одного уравнения для $u_1(z)$ и второго уравнения для $u_2(z)$. Эти уравнения в работе [3] названы Непн1. Они могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned} \sigma(z) \left(w'' - \frac{w'}{z - q} \right) + \left(\sum_{j=1}^3 \theta_j \sigma_j(z) \right) w' + \alpha \beta z w - \\ - \left[\sigma(q) \left(\mu^2 - \frac{\mu}{z - q} \right) + \left(\sum_{j=1}^3 \theta_j \sigma_j(q) \right) \mu + \alpha \beta q \right] w = 0, \end{aligned} \quad (29)$$

где величина q принимает два значения q_1 и q_2 , которые соответствуют положению нулей внедиагональных матричных элементов D . Подробнее такие выкладки прослежены в работе [3].

Видно, что в выражениях (25) фигурируют параметры $\kappa, \beta, e_1, e_2, e_3$, из них в силу тождества Фукса только четыре являются независимыми, а также параметр ρ . Таким образом, полученная система зависит от пяти параметров.

Однако можно уменьшить это число до четырех, получив специальный случай. Параметр ρ в нашем распоряжении. Выберем его из условия

$$e_3 - \rho(\kappa + 2) + 1 = 0 \quad (30)$$

или, что удобнее, положим $e_3 = \rho(\kappa + 2) - 1$. В результате матричный элемент D_{12} будет иметь один нуль, а матричный элемент D_{21} не будет иметь нулей вне особой точки $z = 1$.

Тем самым при выборе ρ согласно (30) матричные элементы D упрощаются:

$$\begin{aligned} D_{11} &= (\kappa + 2)(z - t)z + e_1z + e_1(\rho - t), \\ D_{12} &= (\rho + e_2)(z + \rho - t) - \beta z, \\ D_{21} &= -\rho e_1(z - 1), \\ D_{22} &= (z - 1)[\beta z - \rho(\rho + e_2)]. \end{aligned} \quad (31)$$

Видно, что $\det D(0) = \det D(1) = \det D(t) = 0$. Вновь одна из характеристических экспонент решений в особых точках системы (2) равна нулю, а другая экспонента равна следу матрицы D в этих точках, т. е.

$$\begin{aligned} \chi_0 &= \text{tr } D(0) = e_1(\rho - t) + \rho(\rho + e_2), \\ \chi_1 &= \text{tr } D(1) = (\kappa + 2)(1 - t) + e_1(\rho - t + 1), \\ \chi_t &= \text{tr } D(t) = e_1\rho + (t - 1)(\beta t - \rho(\rho + e_2)). \end{aligned} \quad (32)$$

Тождество Фукса трансформируется в нашем случае к следующему виду:

$$(2 - t)\rho(\rho + e_2) + e_1(3\rho - 2t + 1) - (\kappa + 2)t + \beta t(t - 2) = 3. \quad (33)$$

Это уравнение можно рассматривать как квадратное уравнение относительно ρ . Произвольными параметрами остаются e_1, e_2, κ, β .

Осталось вернуться к недиагональному матричному элементу D_{12} . Его нуль достигается в точке

$$q = \frac{(\rho + e_2)(\rho - t)}{\beta - \rho - e_2}. \quad (34)$$

Эта точка является единственной ложной особой точкой дифференциального уравнения второго порядка для u_1 , генерируемого рассматриваемой системой. Уравнение для u_2 будет уравнением Гойна.

Таким образом, справедливо

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. *Существуют (в общем случае два) значения параметра ρ , при которых полиномиальное вращение с матрицей R порождает новую систему, эквивалентную уравнению второго порядка лишь с одной ложной особой точкой и другому уравнению без ложной особой точки.*

Утверждения 1 и 2 являются основными результатами публикации. Как уже было указано в начале статьи, вид матрицы R может варьироваться. Например, можно взять

$$R = \begin{pmatrix} z - t + \rho & z - 1 \\ \rho z & z(z - 1) \end{pmatrix}.$$

Расчетные формулы изменятся, но утверждения 1 и 2 сохранятся. Возможно ли перенесение результатов на случай большего числа особых точек, остается открытым вопросом.

Благодарности. Автор благодарит А. Я. Казакова, указавшего на ошибку в начальном тексте статьи, М. В. Бабича и О. Ю. Штакельберг за постоянную поддержку.

Список литературы

- [1] А. А. Болибрух, *Обратные задачи монодромии в аналитической теории дифференциальных уравнений*, МЦМНС, М., 2009.
- [2] М. В. Бабич, *УМН*, **64**:1(385) (2009), 51–134.
- [3] А. Я. Казаков, С. Ю. Славянов, *ТМФ*, **155**:2 (2008), 252–264.

Поступила в редакцию 16.09.2014