Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. М. Рахматуллаев, О слабо периодических мерах
Гиббса модели Изинга с внешним полем на дереве Кэли,
ТМФ, 2015, том 183, номер 3, 434–440

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8796>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.67.100

26 апреля 2023 г., 17:16:14

© 2015 г.

М. М. Рахматуллаев*

О СЛАБО ПЕРИОДИЧЕСКИХ МЕРАХ ГИББСА МОДЕЛИ ИЗИНГА С ВНЕШНИМ ПОЛЕМ НА ДЕРЕВЕ КЭЛИ

На дереве Кэли изучается слабо периодическая мера Гиббса для модели Изинга с внешним полем. Для антиферромагнитной модели Изинга с внешним полем при некоторых условиях на параметры доказано существование не менее чем двух слабо периодических мер Гиббса.

Ключевые слова: дерево Кэли, мера Гиббса, модель Изинга с внешним полем, слабо периодические меры.

DOI: 10.4213/tmf8796

1. ВВЕДЕНИЕ

Одна из основных проблем при изучении гамильтониана – это описание всех отвечающих ему предельных мер Гиббса. Для модели Изинга известно, что множество таких мер образует непустое, выпуклое, компактное подмножество в множестве всех вероятностных мер. Задача полного описания элементов этого множества далека от своего завершения. Для модели Изинга с нулевым внешним полем описаны трансляционно-инвариантные (см., например, монографии [1]–[4]), периодические [1], [5] и континуальные множества непериодических [1], [5] мер Гиббса для модели Изинга на дереве Кэли. С анализом трансляционно-инвариантных и периодических мер Гиббса для модели Изинга с внешним полем можно ознакомиться в работах [1], [2], [6], [7].

С целью получения более широкого множества мер Гиббса в работах [8]–[11] введены более общие понятия периодической меры Гиббса, а именно слабо периодические меры Гиббса, и доказано существование таких мер для модели Изинга на дереве Кэли. В работах [8] и [9] на некоторых инвариантных множествах при некоторых условиях на параметры найдены слабо периодические (непериодические) меры Гиббса для модели Изинга на дереве Кэли. Но для модели Изинга с внешним полем слабо периодическая мера Гиббса до сих пор не изучалась.

*Институт математики при Национальном университете Узбекистана, Ташкент, Узбекистан. E-mail: mrahmatullaev@rambler.ru

В настоящей работе рассмотрена модель Изинга с внешним полем и при некоторых условиях на параметры доказано существование слабо периодических (непериодических) мер Гиббса. Структура работы такова: в разделе 2 даются необходимые определения и постановка задачи, раздел 3 посвящен изучению слабо периодических мер Гиббса, соответствующих нормальным делителям индекса два.

2. ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть $\tau^k = (V, L)$, $k \geq 1$, есть дерево Кэли порядка k , т. е. бесконечное дерево, из каждой вершины которого выходит равно $k + 1$ ребер; здесь V – множество вершин, L – множество ребер дерева τ^k . Известно, что τ^k можно представить как G_k – свободное произведение $k + 1$ циклических групп второго порядка. Для произвольной точки $x^0 \in V$ положим

$$W_n = \{x \in V \mid d(x^0, x) = n\}, \quad V_n = \bigcup_{m=0}^n W_m, \quad L_n = \{\langle x, y \rangle \in L \mid x, y \in V_n\},$$

где $d(x, y)$ – расстояние между вершинами x и y на дереве Кэли, т. е. число ребер кратчайшего пути, соединяющего вершины x и y .

Пусть $\Phi = \{-1, 1\}$ и $\sigma \in \Omega = \Phi^V$ – конфигурация, т. е.

$$\sigma = \{\sigma(x) \in \Phi, x \in V\}.$$

Пусть $A \subset V$. Обозначим через Ω_A пространство конфигураций, определенных на множестве A и принимающих значения из $\Phi = \{-1, 1\}$.

Рассмотрим гамильтониан модели Изинга с внешним полем

$$H(\sigma) = -J \sum_{\langle x, y \rangle \in L} \sigma(x)\sigma(y) - \lambda \sum_{x \in V} \sigma(x), \quad (1)$$

где $J, \lambda \in \mathbb{R}$ и $\langle x, y \rangle$ – ближайшие соседи.

Пусть $h_x \in \mathbb{R}$, $x \in V$. Для каждого n определим меру μ_n на Ω_{V_n} , полагая

$$\mu_n(\sigma_n) = Z_n^{-1} \exp \left\{ -\beta H(\sigma_n) + \sum_{x \in W_n} h_x \sigma(x) \right\}, \quad (2)$$

где $\beta = 1/T$ (T – температура, $T > 0$), $\sigma_n = \{\sigma(x), x \in V_n\} \in \Omega_{V_n}$, Z_n^{-1} – нормировочный множитель и

$$H(\sigma_n) = -J \sum_{\langle x, y \rangle \in L_n} \sigma(x)\sigma(y) - \lambda \sum_{x \in V_n} \sigma(x).$$

Условие согласованности для мер $\mu_n(\sigma_n)$, $n \geq 1$, задается равенством

$$\sum_{\sigma^{(n)}} \mu_n(\sigma_{n-1}, \sigma^{(n)}) = \mu_{n-1}(\sigma_{n-1}), \quad (3)$$

где $\sigma^{(n)} = \{\sigma(x), x \in W_n\}$.

Пусть μ_n , $n \geq 1$, – последовательность мер на множествах Ω_{V_n} , обладающая свойством согласованности (3). Тогда в силу теоремы Колмогорова существует, и притом единственная, предельная мера μ на $\Omega_V = \Omega$ (которая называется предельной мерой Гиббса) такая, что $\mu(\sigma_n) = \mu_n(\sigma_n)$ для каждого $n = 1, 2, \dots$. Известно, что меры (2) удовлетворяют условию (3) тогда и только тогда, когда совокупность величин $h = \{h_x, x \in G_k\}$ удовлетворяет условию

$$h_x = \lambda\beta + \sum_{y \in S(x)} f(h_y, \theta), \quad (4)$$

где $S(x)$ – множество прямых потомков точки $x \in V$ (см. монографию [1]). Здесь

$$f(x, \theta) = \operatorname{arcth}(\theta \operatorname{th} x), \quad \theta = \operatorname{th}(J\beta).$$

Пусть $G_k/\hat{G}_k = \{H_1, \dots, H_r\}$ – фактор-группа, где $\hat{G}_k$ – нормальный делитель индекса $r \geq 1$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Совокупность величин $h = \{h_x, x \in G_k\}$ называется $\hat{G}_k$ -*периодической*, если $h_{xy} = h_x$ для любых $x \in G_k$, $y \in \hat{G}_k$. G_k -периодическая мера называется *трансляционно-инвариантной*.

Для $x \in G_k$ введем обозначение $x_{\downarrow} = \{y \in G_k \mid \langle x, y \rangle\} \setminus S(x)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Совокупность величин $h = \{h_x, x \in G_k\}$ назовем $\hat{G}_k$ -*слабо периодической*, если $h_x = h_{ij}$, при $x \in H_i$, $x_{\downarrow} \in H_j$ для любого $x \in G_k$.

Заметим, что слабо периодическая совокупность h совпадает с обычной периодической (см. определение 1), если значение h_x не зависит от $x_{\downarrow}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Меру μ назовем $\hat{G}_k$ -*(слабо) периодической*, если она соответствует $\hat{G}_k$ -*(слабо) периодической* совокупности величин h .

В настоящей работе мы изучаем слабо периодические меры Гиббса и проверяем существование таких мер для модели Изинга с внешним полем.

3. СЛАБО ПЕРИОДИЧЕСКИЕ МЕРЫ

Трудность задачи описания слабо периодических мер Гиббса зависит от структуры и индекса нормального делителя, относительно которого требуется периодичность. В работе [12] доказано, что в группе G_k не существует нормального делителя нечетного (отличного от единицы) индекса. Поэтому мы рассмотрим нормальные делители четного индекса. В настоящей работе мы ограничимся случаем индекса 2.

Опишем $\bar{G}_k$ -слабо периодические меры Гиббса для любого нормального делителя $\bar{G}_k$ индекса 2. Заметим, что любой нормальный делитель индекса 2 группы G_k имеет вид

$$H_A = \left\{ x \in G_k \mid \sum_{i \in A} w_x(a_i) - \text{четное число} \right\},$$

где $\emptyset \neq A \subseteq N_k = \{1, 2, \dots, k+1\}$ и $w_x(a_i)$ – число букв a_i в слове $x \in G_k$ [1].

Пусть множество $A \subset \{1, 2, \dots, k+1\}$ и H_A – соответствующий ему нормальный делитель индекса 2. Заметим, что в случае $|A| = k+1$ (где $|A|$ обозначает число элементов множества A), т.е. в случае $A = N_k$, понятие слабой периодичности совпадает с обычной периодичностью. Поэтому рассмотрим множество $A \subset N_k$ такое, что $A \neq N_k$. Тогда в силу (4) G_k -слабо периодическая совокупность h имеет вид

$$h_x = \begin{cases} h_1, & x \in H_A, & x_{\downarrow} \in H_A, \\ h_2, & x \in H_A, & x_{\downarrow} \in G_k \setminus H_A, \\ h_3, & x \in G_k \setminus H_A, & x_{\downarrow} \in H_A, \\ h_4, & x \in G_k \setminus H_A, & x_{\downarrow} \in G_k \setminus H_A, \end{cases} \quad (5)$$

где h_i , $i = \overline{1, 4}$, удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{aligned} h_1 &= \lambda\beta + |A|f(h_3, \theta) + (k - |A|)f(h_1, \theta), \\ h_2 &= \lambda\beta + (|A| - 1)f(h_3, \theta) + (k + 1 - |A|)f(h_1, \theta), \\ h_3 &= \lambda\beta + (|A| - 1)f(h_2, \theta) + (k + 1 - |A|)f(h_4, \theta), \\ h_4 &= \lambda\beta + |A|f(h_2, \theta) + (k - |A|)f(h_4, \theta). \end{aligned} \quad (6)$$

Рассмотрим отображение $W: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$, заданное системой (6) так, что (6) есть уравнение $h = W(h)$. Отображение W имеет инвариантные множества

$$I_1 = \{h \in \mathbb{R}^4: h_1 = h_2 = h_3 = h_4\}, \quad I_2 = \{h \in \mathbb{R}^4: h_1 = h_4, h_2 = h_3\}. \quad (7)$$

ТЕОРЕМА 1. *Имеют место следующие утверждения:*

- 1) для модели Изинга с внешними полями все H_A -слабо периодические меры Гиббса на множествах I_1, I_2 являются трансляционно-инвариантными;
- 2) при $|A| = k$ и $\theta > 0$ все H_A -слабо периодические меры Гиббса являются трансляционно-инвариантными.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Достаточно показать, что система уравнений (6) имеет решение только вида $h_1 = h_2 = h_3 = h_4$. Для инвариантного множества I_1 доказательство теоремы очевидно. Докажем теорему для инвариантного множества I_2 .

Используя формулу

$$f(h, \theta) = \operatorname{arcth}(\theta \operatorname{th} h) = \frac{1}{2} \ln \frac{(1 + \theta)e^{2h} + (1 - \theta)}{(1 - \theta)e^{2h} + (1 + \theta)}$$

и вводя обозначения $\alpha = (1 - \theta)/(1 + \theta)$ и $z_i = e^{2h_i}$, $i = \overline{1, 4}$, вместо (6) получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} z_1 &= e^{2\lambda\beta} \left(\frac{z_3 + \alpha}{\alpha z_3 + 1} \right)^{|A|} \left(\frac{z_1 + \alpha}{\alpha z_1 + 1} \right)^{(k - |A|)}, \\ z_2 &= e^{2\lambda\beta} \left(\frac{z_3 + \alpha}{\alpha z_3 + 1} \right)^{|A| - 1} \left(\frac{z_1 + \alpha}{\alpha z_1 + 1} \right)^{(k + 1 - |A|)}, \\ z_3 &= e^{2\lambda\beta} \left(\frac{z_2 + \alpha}{\alpha z_2 + 1} \right)^{|A| - 1} \left(\frac{z_4 + \alpha}{\alpha z_4 + 1} \right)^{(k + 1 - |A|)}, \\ z_4 &= e^{2\lambda\beta} \left(\frac{z_2 + \alpha}{\alpha z_2 + 1} \right)^{|A|} \left(\frac{z_4 + \alpha}{\alpha z_4 + 1} \right)^{(k - |A|)}. \end{aligned} \quad (8)$$

Нетрудный, но достаточно громоздкий анализ показывает, что эту систему можно привести к виду

$$\begin{aligned} z_1 - z_2 &= A_1(z_3 - z_1), \\ z_1 - z_3 &= A_2(z_1 - z_4) + B_2(z_3 - z_4) + C_2(z_3 - z_2), \\ z_1 - z_4 &= A_3(z_1 - z_4) + B_3(z_3 - z_2), \\ z_2 - z_3 &= A_4(z_3 - z_2) + B_4(z_1 - z_4), \\ z_2 - z_4 &= A_5(z_3 - z_2) + B_5(z_1 - z_2) + C_5(z_1 - z_4), \\ z_3 - z_4 &= A_6(z_4 - z_2), \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} A_i &= (1 - \alpha^2) \tilde{A}_i(z_1, z_2, z_3, z_4), \\ B_i &= (1 - \alpha^2) \tilde{B}_i(z_1, z_2, z_3, z_4), \\ C_i &= (1 - \alpha^2) \tilde{C}_i(z_1, z_2, z_3, z_4) \end{aligned}$$

и $\tilde{A}_i, \tilde{B}_i, \tilde{C}_i$ положительны для всех $i = \overline{1, 6}$.

На инвариантном множестве I_2 мы имеем $h_2 = h_3$, откуда при $\alpha < 1$ из равенства $z_1 - z_2 = A_1(z_3 - z_1)$ следует, что $z_1 = z_2$.

В антиферромагнитном случае, т. е. при $\alpha \in (1, +\infty)$ получаем $A_i, B_i, C_i < 0$ для всех i . Тогда на инвариантном множестве I_2 выполняется $h_2 = h_3$, т. е. $z_2 = z_3$, отсюда с учетом $z_2 - z_4 = A_3(z_1 - z_4)$ следует, что $z_1 = z_4$. Следовательно, при всех $\alpha \in (0, +\infty)$ имеем $z_1 = z_2$, откуда $z_1 = z_2 = z_3 = z_4$ на множестве I_2 .

2. В случае $|A| = k$ из (6) получим

$$\begin{aligned} h_2 &= \lambda\beta + (k - 1)f(h_3, \theta) + f(\lambda\beta + kf(h_3, \theta), \theta), \\ h_3 &= \lambda\beta + (k - 1)f(h_2, \theta) + f(\lambda\beta + kf(h_2, \theta), \theta). \end{aligned} \quad (10)$$

Теперь докажем, что эта система имеет только решения вида $h_2 = h_3$. Пусть $h_2 > h_3$, тогда из (10) имеем

$$h_2 - h_3 = (k - 1)(f(h_3, \theta) - f(h_2, \theta)) + f(\lambda\beta + kf(h_3, \theta), \theta) - f(\lambda\beta + kf(h_2, \theta), \theta). \quad (11)$$

Легко проверить, что функция f при $\theta > 0$ строго возрастает. Следовательно, равенство (11) не может быть верным, так как его левая часть положительная, а правая отрицательная. В случае $h_2 < h_3$ равенство (11) также не выполняется, следовательно, $h_2 = h_3$, что дает трансляционно-инвариантные решения системы (6). Теорема доказана.

Теперь рассмотрим антиферромагнитную модель Изинга с внешним полем, т. е. случай $\alpha > 1$ ($\theta < 0$). Введем следующие обозначения:

$$a = e^{2\lambda\beta}, \quad \varphi(x) = \frac{x + \alpha}{\alpha x + 1}.$$

Известно [1], [6], [7], что в этом случае существует единственная трансляционно-инвариантная мера Гиббса, которая соответствует единственному решению уравнения

$$z = a\varphi^k(z),$$

это решение обозначим через z_* .

Предположим, что $|A| = k$, тогда система уравнений (8) записывается как

$$\begin{aligned} z_1 &= a\varphi^k(z_3), & z_2 &= a\varphi^{k-1}(z_3)\varphi(z_1), \\ z_3 &= a\varphi^{k-1}(z_2)\varphi(z_4), & z_4 &= a\varphi^k(z_2). \end{aligned} \quad (12)$$

Решение системы уравнений (12) сводится к анализу следующей системы уравнений:

$$\begin{aligned} z_2 &= a\varphi^{k-1}(z_3)\varphi(a(\varphi^k(z_3))), \\ z_3 &= a\varphi^{k-1}(z_2)\varphi(a(\varphi^k(z_2))). \end{aligned} \quad (13)$$

Если ввести обозначение

$$\psi(z) = a\varphi^{k-1}(z)\varphi(a(\varphi^k(z))), \quad (14)$$

то система уравнений (13) приобретает вид

$$z_2 = \psi(z_3), \quad z_3 = \psi(z_2). \quad (15)$$

Эта система имеет столько решений, сколько имеет решений уравнение $\psi(\psi(z)) = z$.

ЛЕММА 1. Пусть $\gamma: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ есть непрерывная функция с неподвижной точкой $\xi \in (0, 1)$. Предположим, что функция γ дифференцируема в точке ξ и $\gamma'(\xi) < -1$. Тогда существуют значения x_0, x_1 такие, что выполнены неравенства $0 \leq x_0 < \xi < x_1 \leq 1$ и $\gamma(x_0) = x_1, \gamma(x_1) = x_0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО этой леммы можно найти в монографии [13].

Легко видеть, что для функции (14) верны следующие утверждения: она определена на $\mathbb{R}_+$, является ограниченной, дифференцируемой и $\psi(z_*) = z_*$. Тогда по лемме 1 при $\psi'(z_*) < -1$ система уравнений (15) имеет три решения вида (z_*, z_*) , (z_0, z_1) , (z_1, z_0) , где $\psi(z_0) = z_1$, $\psi(z_1) = z_0$. Неравенство $\psi'(z_*) < -1$ эквивалентно следующему неравенству:

$$k \frac{(1 - \alpha^2)^2 z_*^{2(k-1)/k}}{(\alpha z_* + 1)^4} + b(k-1) \frac{(1 - \alpha^2) z_*^{(k-1)/k}}{(\alpha z_* + 1)^2} + b^2 < 0, \quad (16)$$

где $b = \sqrt[k]{a}$. Следовательно, $(b - b_1)(b - b_2) < 0$, где

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{(k-1 - \sqrt{k^2 - 6k + 1})(\alpha^2 - 1) z_*^{(k-1)/k}}{2(\alpha z_* + 1)^2}, \\ b_2 &= \frac{(k-1 + \sqrt{k^2 - 6k + 1})(\alpha^2 - 1) z_*^{(k-1)/k}}{2(\alpha z_* + 1)^2}. \end{aligned} \quad (17)$$

В результате доказана следующая

ТЕОРЕМА 2. При $|A| \geq 6$ и $\lambda \in (\lambda_1, \lambda_2)$, где $\lambda_{1,2} = (k/2\beta) \ln b_{1,2}$ и величины $b_{1,2}$ определены в (17), для антиферромагнитной модели Изинга с внешним полем существует не менее двух H_A -слабо периодических (непериодических) мер Гиббса.

Для модели Изинга в работе [14] доказано существование не менее чем двух слабо периодических (непериодических) мер Гиббса, и теорема 2 обобщает этот результат на случай модели Изинга с внешним полем. Действительно, если рассмотреть модель Изинга с нулевым внешним полем, т. е. при $a = 1$, неравенство (16) принимает следующий вид:

$$k \frac{(1 - \alpha)^2}{(1 + \alpha)^2} + (k + 1) \frac{(1 - \alpha)}{(1 + \alpha)} + 1 < 0.$$

Отсюда получим $\alpha \in (\alpha_1, \alpha_2)$, где $\alpha_{1,2} = (k - 1 \pm \sqrt{k^2 - 6k + 1})/2$, т. е. мы имеем результат работы [14].

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Полученные H_A -слабо периодические меры в теореме 2 являются новыми и дают возможность описать континуум непериодических мер Гиббса, отличных от ранее известных.

Благодарности. Автор выражает свою глубокую признательность профессору У. А. Розикову за постановку задачи и полезные советы по работе.

Список литературы

- [1] U. A. Rozikov, *Gibbs Measures on Cayley Trees*, World Sci., Singapore, 2013.
- [2] П. М. Блехер, Н. Н. Ганиходжаев, *ТВП*, **35**:2 (1990), 220–230.
- [3] F. Spitzer, *Ann. Probab.*, **3** (1975), 387–398.
- [4] S. Zachary, *Ann. Probab.*, **11**:4 (1983), 894–903.
- [5] У. А. Розиков, *ТМФ*, **118**:1 (1999), 95–104.
- [6] Х.-О. Георги, *Гиббсовские меры и фазовые переходы*, Мир, М., 1992.
- [7] C. Preston, *Gibbs States on Countable Sets*, Cambridge Univ. Press, London, 1974.
- [8] У. А. Розиков, М. М. Рахматуллаев, *ТМФ*, **156**:2 (2008), 292–302.
- [9] У. А. Розиков, М. М. Рахматуллаев, *ТМФ*, **160**:3 (2009), 507–516.
- [10] У. А. Розиков, М. М. Рахматуллаев, *Докл. АН РУз*, **4** (2008), 12–15.
- [11] М. М. Рахматуллаев, *Узб. матем. журн.*, **2** (2009), 144–152.
- [12] Э. П. Норматов, У. А. Розиков, *Матем. заметки*, **79**:3 (2006), 434–443.
- [13] H. Kesten, *Adv. Appl. Probab.*, **2** (1970), 1–82.
- [14] M. Rahmatullaev, *On new weakly periodic Gibbs measures of Ising model on a Cayley tree*, arXiv: 1409.4553.

Поступила в редакцию 17.09.2014