Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Градусов, С. Л. Яковлев, Об операторе Шредингера с суперпозицией короткодействующего и точечного потенциалов, *ТМФ*, 2015, том 183, номер 1, 90–104

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8798>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.64.247

26 апреля 2023 г., 12:01:43

© 2015 г.

В. А. Градусов*, С. Л. Яковлев*

ОБ ОПЕРАТОРЕ ШРЕДИНГЕРА С СУПЕРПОЗИЦИЕЙ КОРОТКОДЕЙСТВУЮЩЕГО И ТОЧЕЧНОГО ПОТЕНЦИАЛОВ

Исследуется класс операторов Шредингера, для которых потенциальный член является суммой короткодействующего $V(\mathbf{r})$ и точечного потенциалов. Внимание уделено случаю, когда короткодействующий потенциал имеет особенность на носителе $r = 0$ точечного взаимодействия. Точечное взаимодействие построено с помощью асимптотики при $\mathbf{r} \rightarrow 0$ функции Грина оператора Шредингера $-\Delta + V(\mathbf{r})$ с короткодействующим потенциалом V . Рассмотрены потенциалы, имеющие в начале координат особенность вида $r^{-\rho}$ с $\rho > 0$. Исследование производится при помощи интегрального уравнения Липпмана–Швингера. Показано, что если особенность потенциала слабее, чем кулоновская, то асимптотика функции Грина имеет стандартное сингулярное поведение. В случае особенности потенциала вида $r^{-\rho}$ с $1 \leq \rho < 3/2$ в асимптотике функции Грина возникает дополнительная сингулярность. В случае $\rho = 1$ дополнительная логарифмическая сингулярность имеет ту же форму, что и в случае кулоновского потенциала. В случае $1 < \rho < 3/2$ дополнительная сингулярность имеет вид полярной особенности $r^{-\rho+1}$.

Ключевые слова: оператор Шредингера, точечное взаимодействие, псевдопотенциал, асимптотика функции Грина.

DOI: 10.4213/tmf8798

1. ВВЕДЕНИЕ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Точечным потенциалом называют взаимодействие, сосредоточенное в точке. В физической литературе такие потенциалы обычно называются потенциалами нулевого радиуса и широко используются для построения моделей межчастичных взаимодействий в квантовой механике [1]. Математически строгое определение точечного взаимодействия впервые было дано в работе Березина и Фаддеева [2]. Метод этой работы основан на теории самосопряженных расширений симметричных операторов. Дальнейшее развитие метода связано в основном с работами авторов монографии [3]. Интерес исследований затем сместился к более сложным, чем точечные,

* Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия.
E-mail: v.gradusov@spbu.ru, s.yakovlev@spbu.ru

контактным взаимодействиям, среди которых отметим точечные взаимодействия с внутренней структурой [4], [5], контактные взаимодействия, сосредоточенные на поверхностях, кривых и графах [6], [7]. Точечные потенциалы используются для описания взаимодействия частиц в гамильтонианах на решетке [8].

В настоящей работе мы рассматриваем случай одноцентрового точечного потенциала, который добавляется в гамильтониан системы двух частиц, взаимодействующих в трехмерном пространстве. Этот невозмущенный гамильтониан имеет вид

$$H = -\Delta + V \quad (1)$$

суммы оператора кинетической энергии $-\Delta$, где Δ – лапласиан, и локального потенциала V . Задача состоит в определении возмущенного точечным взаимодействием гамильтониана $\tilde{H}$ формального вида $-\Delta + V + \langle \lambda \delta \rangle$, где последнее слагаемое символически обозначает точечный потенциал с константой связи λ . Интерес представляет ситуация, в которой потенциал V имеет сингулярность в точке сосредоточения точечного потенциала (без ограничения общности везде далее будем считать, что этой точкой является $r = 0$). Иначе потенциалы могут рассматриваться независимо, и точечный потенциал остается таким же, как в случае полного отсутствия короткодействующего взаимодействия [1].

Задача построения оператора $\tilde{H}$ может быть решена в рамках метода самосопряженных расширений. Упомянем здесь несколько работ, близких по постановке задачи к настоящей работе. Так, в работе [9] рассматривался частный случай центральных потенциалов V с особенностями типа обратных степеней. В силу центральности потенциала задача сводится к изучению обыкновенных дифференциальных операторов, для которых были найдены все самосопряженные расширения и тем самым построены искомые операторы с точечным взаимодействием. В работе [10] сначала рассматривался трехмерный оператор H , суженный на множество функций, исчезающих в окрестности нуля. Было показано, что в согласии с общей теорией любое самосопряженное расширение оператора H является оператором того же вида с областью определения, которая состоит из функций

$$f(\mathbf{r}) = g(\mathbf{r}) + c[G(\mathbf{r}, 0, i) - e^{i\alpha}G(\mathbf{r}, 0, -i)]. \quad (2)$$

Здесь константа $c \in \mathbb{C}$, а g является функцией из области определения оператора $-\Delta$, удовлетворяющей условию $g(0) = 0$. Через $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', z)$ обозначена функция Грина оператора Шредингера с потенциалом V , определяемая как ядро оператора $G(z) = (H - z)^{-1}$, где $z \in \mathbb{C} \setminus \sigma(H)$ и $\sigma(H)$ – спектр гамильтониана H . Это обозначение для функции Грина будет использоваться везде далее. Константа $\alpha \in [0, 2\pi)$ является параметром оператора $\tilde{H}$. По существу условие (2) определяет поведение функций f в точках, в которых потенциал V имеет сингулярность. В рассматриваемом случае оно позволяет установить вид граничного условия при $r = 0$, которому должна удовлетворять собственная функция оператора Шредингера. Поскольку функция g из (2) не дает вклада при $r = 0$, для получения граничного условия нужно исследовать асимптотическое поведение функции Грина $G(\mathbf{r}, 0, z)$ при $r \rightarrow 0$. Одной из целей настоящей работы является исследование этой асимптотики в случае определенного класса потенциалов V с особенностями в нуле. Этот класс введен в начале раздела 2 настоящей работы.

Существует другой подход, который позволяет добавлять точечный потенциал в уравнение Шредингера с гамильтонианом H , основанный на использовании так называемого псевдопотенциала. Псевдопотенциал определяется с помощью функционала, действующего на собственную функцию. Этот подход применялся в работе [11] для определения функции Грина свободного гамильтониана $-\Delta$, возмущенного точечным взаимодействием. В настоящей работе мы показываем, как можно использовать метод псевдопотенциала для получения явного вида гамильтониана $\tilde{H}$. Как и в методе, основанном на самосопряженных расширениях, определяющее значение имеет асимптотика функции Грина $G(\mathbf{r}, 0, z)$ при $\mathbf{r} \rightarrow 0$.

Рассматриваемые гамильтонианы имеют ряд физических приложений. Среди недавних примеров использования точечного взаимодействия отметим применение к задаче рассеяния позитрона на атоме водорода, где для описания взаимодействия между позитроном и атомом использовался модельный гамильтониан с точечным потенциалом с мнимой константой связи λ . Последнее необходимо для описания процесса аннигиляции позитрона и электрона в рамках нерелятивистской квантовой механики [12], [13]. При этом кулоновское взаимодействие актуально лишь для малых расстояний, тогда как асимптотически при больших расстояниях между электроном и атомом взаимодействие становится короткодействующим. Отметим, что постановка задачи о поиске самосопряженного расширения оператора H имеет смысл только в случае вещественной константы связи λ . В отличие от метода самосопряженных расширений в подходе с псевдопотенциалом принадлежность константы связи λ полю вещественных чисел не требуется. В частности и по этой причине, в настоящей работе реализован подход, допускающий комплексные значения константы связи точечного потенциала, примененный ранее в работе авторов [14] для суперпозиции кулоновского и точечного потенциалов.

Работа организована следующим образом. В разделе 2 исследуется функция Грина оператора Шредингера с потенциалом, имеющим степенную особенность. В разделе 3 проведено построение псевдопотенциала. Вычисленная в разделе 2 асимптотика функции Грина используется для определения вида псевдопотенциала. Раздел 4 содержит заключение.

Условимся о некоторых обозначениях, применяющихся на протяжении работы. Жирными буквами обозначаются векторы из $\mathbb{R}^3$, скалярное произведение векторов записывается в виде $\mathbf{r} \cdot \mathbf{q}$, обычным шрифтом обозначаются скалярные величины и, в частности, модули векторов, например $r = |\mathbf{r}|$, при этом единичные векторы обозначаются как $\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r}/r$.

2. ОСОБЕННОСТИ ФУНКЦИИ ГРИНА ОПЕРАТОРА ШРЕДИНГЕРА С ПОТЕНЦИАЛОМ, ИМЕЮЩИМ СТЕПЕННУЮ ОСОБЕННОСТЬ

Прежде всего введем класс локальных потенциалов $V(\mathbf{r})$, для которых будут получены результаты настоящей работы. Предположим, что потенциал $V(\mathbf{r})$ является вещественнозначной гладкой функцией при всех $r = |\mathbf{r}| > 0$, удовлетворяющей следующему условию: для всех $\mathbf{r}$, кроме малой окрестности точки $\mathbf{r} = 0$, существует

константа $M > 0$ такая, что выполнено неравенство

$$|V(\mathbf{r})| \leq M(1+r)^{-1-\delta}, \quad \delta > 1. \quad (3)$$

Существенным для нашего рассмотрения является сингулярное поведение потенциала V в окрестности точки $\mathbf{r} = 0$. А именно, предполагается, что при $r \rightarrow 0$ потенциал может быть представлен в виде

$$V(\mathbf{r}) = r^{-\rho} Q(\mathbf{r}), \quad (4)$$

где функция $Q(\mathbf{r})$ является непрерывной вместе со своими производными до второго порядка и, соответственно, имеет конечный предел

$$\lim_{r \rightarrow 0} Q(\mathbf{r}) = V_0.$$

В настоящей работе для показателя ρ будет использоваться ограничение $\rho < 3/2$. Описанный класс потенциалов будем обозначать как $\mathfrak{V}(\rho, \delta)$.

Функция Грина оператора Шредингера H является решением неоднородного уравнения

$$[-\Delta + V(\mathbf{r}) - z]G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', z) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (5)$$

и также удовлетворяет интегральному уравнению Липпмана–Швингера

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', z) = G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}', z) - \int d\mathbf{q} G_0(\mathbf{r}, \mathbf{q}, z) V(\mathbf{q}) G(\mathbf{q}, \mathbf{r}', z). \quad (6)$$

Здесь G_0 – функция Грина оператора $-\Delta$ свободного движения в координатном представлении, которая имеет вид

$$G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}', z) = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{i\sqrt{z}|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad (7)$$

где $\text{Im} \sqrt{z} \geq 0$. В дальнейшем нам потребуется асимптотическое поведение при $r \rightarrow 0$ функции $G(\mathbf{r}, 0, z)$. Обозначив $g(\mathbf{r}, z) = G(\mathbf{r}, 0, z)$ и положив $\mathbf{r}' = 0$ в (6), придем к уравнению

$$g(\mathbf{r}, z) = G_0(\mathbf{r}, 0, z) - \int d\mathbf{q} G_0(\mathbf{r}, \mathbf{q}, z) V(\mathbf{q}) g(\mathbf{q}, z), \quad (8)$$

которое, как и в работе [15], является нашим основным средством исследования. В этом разделе мы покажем, что уравнение (8) в случае потенциалов $V \in \mathfrak{V}(\rho, \delta)$ имеет единственное решение, и опишем особенности этого решения.

Введем множество $\mathfrak{C}(\beta)$ непрерывных функций $f(\mathbf{r})$, удовлетворяющих условию, что для любой $f(\mathbf{r}) \in \mathfrak{C}(\beta)$ существует константа C_f такая, что

$$|f(\mathbf{r})| \leq C_f(1+r)^{-\beta}. \quad (9)$$

Хорошо известно, что множество $\mathfrak{C}(\beta)$ превращается в банахово пространство после введения нормы

$$\sup (1+r)^\beta |f(\mathbf{r})| = \|f\|_\beta.$$

Покажем, что интегральный оператор с ядром

$$G_0(\mathbf{r}, \mathbf{q}, z)V(\mathbf{q}) \quad (10)$$

из правой части уравнения (8) является компактным в $\mathfrak{C}(\beta)$ при $0 \leq \beta < 1$. Для этого рассмотрим интеграл

$$\Phi(\mathbf{r}) = \int d\mathbf{q} \frac{e^{i\sqrt{z}|\mathbf{r}-\mathbf{q}|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{q}|} V(\mathbf{q})f(\mathbf{q}), \quad (11)$$

в котором $V \in \mathfrak{V}(\rho, \delta)$, $f \in \mathfrak{C}(\beta)$ и $\text{Im } \sqrt{z} \geq 0$. Покажем, что функция $\Phi \in \mathfrak{C}(\beta')$ с $\beta' > \beta$. Отсюда стандартным образом будет следовать, что ядро (10) определяет в $\mathfrak{C}(\beta)$ компактный оператор.

Чтобы разделить вклады подынтегрального выражения (11) в начале координат и на бесконечности, разобьем область интегрирования на две части $\Omega_j \subset \mathbb{R}^3$, $j = 1, 2$, заданные как

$$\Omega_1 = \{\mathbf{q}: q < r_0\}, \quad \Omega_2 = \{\mathbf{q}: q > r_0\}. \quad (12)$$

Радиус $r_0 < 1$ выбирается настолько малым, чтобы в области Ω_1 можно было использовать представление (4) для $V(\mathbf{r})$. Тогда интеграл (11) представляется в виде суммы интегралов, $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$, где

$$\Phi_j(\mathbf{r}) = \int_{\Omega_j} d\mathbf{q} \frac{e^{i\sqrt{z}|\mathbf{r}-\mathbf{q}|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{q}|} V(\mathbf{q})f(\mathbf{q}), \quad j = 1, 2.$$

Оценим сначала интеграл Φ_1 по абсолютной величине. В силу того что $\text{Im } \sqrt{z} \geq 0$, имеем $|e^{i\sqrt{z}|\mathbf{r}-\mathbf{q}|}| = e^{-\text{Im } \sqrt{z}|\mathbf{r}-\mathbf{q}|} \leq 1$ и, следовательно,

$$|\Phi_1(\mathbf{r})| \leq \int_{\Omega_1} d\mathbf{q} \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{q}|} |Q(\mathbf{q})| \frac{C_f}{q^\rho(1+q)^\beta},$$

где также было использовано представление (4) для потенциала V и условие (9) для f . Покажем, что правая часть последнего выражения ограничена. Действительно, в силу ограниченности Q в области интегрирования найдется константа C_Q такая, что $|Q| \leq C_Q$, и, следовательно,

$$\int_{\Omega_1} d\mathbf{q} \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{q}|} |Q(\mathbf{q})| \frac{1}{q^\rho(1+q)^\beta} \leq C_Q \int_{\Omega_1} d\mathbf{q} \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{q}|} q^{-\rho}. \quad (13)$$

Вычисление последнего интеграла легко выполняется при помощи формулы

$$\frac{1}{|\mathbf{q}-\mathbf{q}'|} = \frac{1}{q_{>}} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{q_{<}^\ell}{q_{>}^\ell} P_\ell(\hat{\mathbf{q}} \cdot \hat{\mathbf{q}}'),$$

где P_ℓ – полином Лежандра и, как обычно, $q_{>} = \max\{q, q'\}$, $q_{<} = \min\{q, q'\}$. Используя ортогональность полиномов Лежандра, мы без труда убеждаемся в справедливости формулы

$$\int d\hat{\mathbf{q}} \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{q}|} = \frac{2\pi}{rq} (r+q-|\mathbf{r}-\mathbf{q}|). \quad (14)$$

Подставляя это равенство в правую часть формулы (13), при $r \leq r_0$ мы приходим к результату

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_1} dq \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{q}|} q^{-\rho} &= \frac{4\pi}{r} \int_0^r dq q^{2-\rho} + 4\pi \int_r^{r_0} dq q^{1-\rho} = \\ &= \frac{4\pi r_0^{2-\rho}}{2-\rho} - \frac{4\pi r^{2-\rho}}{(3-\rho)(2-\rho)}. \end{aligned} \quad (15)$$

Последнее выражение и, следовательно, интеграл Φ_1 ограничены при $r \leq r_0$.

В случае $r > r_0$ имеем

$$\int_{\Omega_1} dq \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{q}|} q^{-\rho} = \frac{4\pi}{r} \int_0^{r_0} dq q^{2-\rho} = \frac{4\pi}{r} \frac{r_0^{3-\rho}}{3-\rho}$$

и тогда приходим к оценке

$$|\Phi_1(\mathbf{r})| \leq C_f C_Q \frac{4\pi}{r} \frac{r_0^{3-\rho}}{3-\rho}.$$

Собирая полученные результаты, приходим к заключению, что существует константа C_1 такая, что для любых значений r имеет место оценка

$$|\Phi_1(\mathbf{r})| \leq C_1 \frac{1}{1+r}. \quad (16)$$

Перейдем к изучению интеграла Φ_2 . Оценим этот интеграл по абсолютному значению. Имеем с учетом (3) и (9)

$$|\Phi_2(\mathbf{r})| \leq C_f M \int_{r_0}^{+\infty} dq q^2 \frac{1}{(1+q)^{1+\beta+\delta}} \int d\hat{\mathbf{q}} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{q}|}. \quad (17)$$

Рассмотрим сначала случай ограниченных $r \leq r_0$. В этом случае в силу формулы (14)

$$|\Phi_2(\mathbf{r})| \leq 4\pi C_f M \int_{r_0}^{+\infty} dq \frac{q}{(1+q)^{1+\beta+\delta}}.$$

Поскольку последний интеграл сходится и не зависит от r , интеграл Φ_2 ограничен при $r \leq r_0$.

Рассмотрим теперь случай неограниченных сверху $r > r_0$. Для таких r , используя равенство (14) для интеграла по угловой части переменной $\mathbf{q}$, получаем в (17)

$$|\Phi_2(r)| \leq \frac{2\pi C_f M}{r} \int_{r_0}^{+\infty} dq \frac{q(r+q-|r-q|)}{(1+q)^{1+\beta+\delta}}. \quad (18)$$

Замена переменной $q = r\tau$ в интеграле правой части (18) позволяет получить неравенство

$$\begin{aligned} \frac{2\pi C_f M}{r^{\beta+\delta-1}} \int_{r_0/r}^{+\infty} d\tau \frac{\tau}{(1/r+\tau)^{1+\beta+\delta}} (1+\tau-|1-\tau|) &\leq \\ &\leq \frac{2\pi C_f M}{r^{\beta+\delta-1}} \int_0^{+\infty} d\tau \frac{1}{\tau^{\beta+\delta}} (1+\tau-|1-\tau|). \end{aligned} \quad (19)$$

Чтобы показать, что последний интеграл сходится, разобьем область интегрирования по переменной τ на два интервала $\tau \geq 1$ и $0 \leq \tau < 1$. На этих интервалах выражение $1 + \tau - |1 - \tau|$ равняется соответственно 2 и 2τ , следовательно, для интеграла из правой части (19) мы получаем

$$\int_0^{+\infty} d\tau \frac{1}{\tau^{1+\beta+\delta}} (1 + \tau - |1 - \tau|) = 2 \int_0^1 d\tau \tau^{1-\beta-\delta} + 2 \int_1^{+\infty} d\tau \frac{1}{\tau^{\beta+\delta}}.$$

Поскольку $0 \leq \beta < 1$, а показатель $\delta > 1$ можно считать сколь угодно близким к единице, оба интеграла в правой части последнего равенства сходятся. В результате приведенного анализа правой части (19) при $r > r_0$ можно написать оценку

$$|\Phi_2(\mathbf{r})| \leq \frac{C_\Phi}{r^{\beta+\delta-1}}$$

с некоторой константой C_Φ .

Объединяя полученные оценки, приходим к заключению, что для всех r доказана справедливость неравенства

$$|\Phi_2(\mathbf{r})| \leq C_2 \frac{1}{(1+r)^{\beta+\delta-1}}. \quad (20)$$

Теперь можно объединить результаты (16) и (20) в окончательную оценку абсолютного значения интеграла Φ :

$$|\Phi(\mathbf{r})| \leq |\Phi_1(\mathbf{r})| + |\Phi_2(\mathbf{r})| \leq C \frac{1}{(1+r)^{\beta'}}, \quad (21)$$

где $\beta' = \min(1, \beta + \delta - 1)$ и C – некоторая константа. Поскольку $\beta + \delta - 1 > \beta$, из оценки (21) следует утверждение, сформулированное в начале данного раздела, а именно, при $0 \leq \beta < 1$ ядро (10) интегрального уравнения (8) действительно определяет оператор, компактный в пространстве $\mathfrak{C}(\beta)$ (можно взять, например, $\beta = 1/2$).

Свободный член уравнения (8) как функция переменной $\mathbf{r}$ не принадлежит классу $\mathfrak{C}(\beta)$, поскольку имеет сингулярность при $r \rightarrow 0$. Действительно, асимптотическое поведение при $r \rightarrow 0$ свободного члена уравнения (8) следует из явного вида (7) функции Грина:

$$G_0(\mathbf{r}, 0, z) = \frac{1}{4\pi r} + \frac{i\sqrt{z}}{4\pi} + O(r).$$

Чтобы избавиться от сингулярности в уравнении (8) при $r \rightarrow 0$, итерируем это уравнение один раз, что приводит к выражению

$$\begin{aligned} g(\mathbf{r}, z) &= G_0(\mathbf{r}, 0, z) - \int d\mathbf{q} G_0(\mathbf{r}, \mathbf{q}, z) V(\mathbf{q}) G_0(\mathbf{q}, 0, z) + \\ &+ \int d\mathbf{q} G_0(\mathbf{r}, \mathbf{q}, z) V(\mathbf{q}) \int d\mathbf{q}' G_0(\mathbf{q}, \mathbf{q}', z) V(\mathbf{q}') g(\mathbf{q}', z). \end{aligned}$$

Исследуем асимптотическое поведение второго слагаемого в правой части последнего равенства. Рассмотрим функцию

$$g^{(1)}(\mathbf{r}, z) = \int d\mathbf{q} G_0(\mathbf{r}, \mathbf{q}, z) V(\mathbf{q}) G_0(\mathbf{q}, 0, z). \quad (22)$$

Вновь разобьем область интегрирования на две части $\Omega_{1,2}$, определенные в (12) при оценке интеграла Φ , с теми же предположениями относительно радиуса r_0 . Снова интеграл в правой части (22) записывается в виде суммы интегралов $I_{1,2}$, определенных формулами

$$I_j(\mathbf{r}) = \int_{\Omega_j} d\mathbf{q} G_0(\mathbf{r}, \mathbf{q}, z) V(\mathbf{q}) G_0(\mathbf{q}, 0, z). \quad (23)$$

Рассмотрим интеграл $I_1(\mathbf{r})$ при $r \leq r_0$. Выясним поведение данного интеграла при $r \rightarrow 0$. Выделим в подынтегральных сомножителях, входящих в интеграл I_1 , их главные особенности, т. е. воспользуемся представлениями

$$G_0(\mathbf{r}, \mathbf{q}, z) = \frac{1}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{q}|} + \frac{e^{i\sqrt{z}|\mathbf{r} - \mathbf{q}|} - 1}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{q}|}, \quad (24)$$

$$V(\mathbf{q}) = q^{-\rho} Q(\mathbf{q}) = q^{-\rho} V_0 + q^{-\rho} [Q(\mathbf{q}) - V_0], \quad (25)$$

$$G_0(\mathbf{q}, 0, z) = \frac{1}{4\pi q} + \frac{e^{i\sqrt{z}q} - 1}{4\pi q}. \quad (26)$$

С учетом свойств функции Q второе слагаемое в (25) можно записать в виде

$$q^{-\rho} [Q(\mathbf{q}) - V_0] = q^{-\rho+1} Q_1(\mathbf{q}), \quad (27)$$

где Q_1 является гладкой ограниченной функцией своих аргументов. Тогда наиболее сингулярный член $I_1(\mathbf{r})$ при $r \rightarrow 0$ будет даваться выражением, которое получается подстановкой в формулу (23) для $j = 1$ главных членов разложений подынтегральных сомножителей, определенных в (24)–(27). Обозначим этот член через I_1^s , его явный вид дается интегралом

$$I_1^s(r) = \frac{V_0}{(4\pi)^2} \int_{\Omega_1} d\mathbf{q} |\mathbf{r} - \mathbf{q}|^{-1} q^{-\rho-1}. \quad (28)$$

Вычисление интеграла по угловым переменным легко выполняется при помощи формулы (14) и приводит к результату

$$I_1^s(r) = \frac{V_0}{4\pi} \left(\frac{1}{r} \int_0^r dq q^{1-\rho} + \int_r^{r_0} dq q^{-\rho} \right).$$

Далее в зависимости от величины ρ получаем два случая: если $\rho \neq 1$, то

$$I_1^s(r) = \frac{V_0}{4\pi(2-\rho)(\rho-1)} r^{-\rho+1} + \frac{V_0}{4\pi(1-\rho)} r_0^{-\rho+1}, \quad (29)$$

если же $\rho = 1$, то

$$I_1^s(r) = -\frac{V_0}{4\pi} \ln r + \frac{V_0}{4\pi} (1 + \ln r_0). \quad (30)$$

Из формулы (29) видно, что если $1 < \rho < 3/2$, то I_1^s имеет полярную сингулярность вида $r^{-\rho+1}$; если же $\rho < 1$, то первое слагаемое в (29) исчезает при $r \rightarrow 0$, в этом случае интеграл I_1^s регулярен и имеет конечный предел.

Из приведенного анализа интеграла (28) ясно, что учет менее сингулярных членов разложений подынтегральных функций в $I_1(\mathbf{r})$ дает несингулярные вклады при $r \rightarrow 0$. Действительно, покажем, что абсолютная величина остатка $I_1(\mathbf{r}) - I_1^s(r)$ ограничена по r при $r \leq r_0$. Воспользуемся элементарной формулой

$$(A + a)(B + b)(C + c) - abc = ABC + aB(C + c) + A(B + b)c + (A + a)bC,$$

где A, B, C, a, b, c – комплексные числа. Применяя ее к произведению подынтегральных сомножителей в интеграле I_1 , записанных в форме (24)–(27), получим

$$I_1(\mathbf{r}) - I_1^s(r) = I_1^{(1)}(\mathbf{r}) + I_1^{(2)}(\mathbf{r}) + I_1^{(3)}(\mathbf{r}) + I_1^{(4)}(\mathbf{r}),$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned} I_1^{(1)}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{(4\pi)^2} \int_{\Omega_1} d\mathbf{q} q^{-\rho} \frac{(e^{i\sqrt{z}|\mathbf{r}-\mathbf{q}|} - 1)(e^{i\sqrt{z}q} - 1)}{|\mathbf{r} - \mathbf{q}|} Q_1(\mathbf{q}), \\ I_1^{(2)}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{(4\pi)^2} \int_{\Omega_1} d\mathbf{q} q^{-\rho} \frac{e^{i\sqrt{z}q}}{|\mathbf{r} - \mathbf{q}|} Q_1(\mathbf{q}), \\ I_1^{(3)}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{(4\pi)^2} \int_{\Omega_1} d\mathbf{q} q^{-\rho-1} \frac{(e^{i\sqrt{z}|\mathbf{r}-\mathbf{q}|} - 1)}{|\mathbf{r} - \mathbf{q}|} Q(\mathbf{q}), \\ I_1^{(4)}(\mathbf{r}) &= \frac{V_0}{(4\pi)^2} \int_{\Omega_1} d\mathbf{q} q^{-\rho-1} \frac{e^{i\sqrt{z}|\mathbf{r}-\mathbf{q}|}(e^{i\sqrt{z}q} - 1)}{|\mathbf{r} - \mathbf{q}|}. \end{aligned}$$

Воспользуемся следующей легко проверяемой оценкой (см. монографию [16], формула 12.6):

$$|\sin(kx)| \leq De^{|k'|x} \frac{|k|x}{1 + |k|x},$$

где $k' \equiv \text{Im } k$ и D – константа. Это оценка справедлива для всех значений k и для всех действительных $x \geq 0$. Теперь можно написать

$$|e^{i\sqrt{z}|\mathbf{r}-\mathbf{q}|} - 1| = 2|e^{i\sqrt{z}|\mathbf{r}-\mathbf{q}|/2}| \left| \sin \frac{\sqrt{z}|\mathbf{r}-\mathbf{q}|}{2} \right| \leq De^{|\text{Im } \sqrt{z}||\mathbf{r}-\mathbf{q}|/2} \frac{|\sqrt{z}||\mathbf{r}-\mathbf{q}|}{1 + |\sqrt{z}||\mathbf{r}-\mathbf{q}|/2}.$$

Поскольку $q, r \leq r_0$, имеем $|\mathbf{r} - \mathbf{q}| \leq 2r_0$, следовательно, на рассматриваемом промежутке интегрирования

$$|e^{i\sqrt{z}|\mathbf{r}-\mathbf{q}|} - 1| \leq D|\sqrt{z}|e^{2r_0|\text{Im } \sqrt{z}|}|\mathbf{r} - \mathbf{q}| \equiv D'|\mathbf{r} - \mathbf{q}| \quad (31)$$

при $r \leq r_0$, в том числе при $r = 0$. С учетом оценки $|Q_1| \leq C'$ и неравенства (31) получаем

$$|I_1^{(1)}(\mathbf{r})| \leq \frac{C'D'^2}{4\pi} \int_0^{r_0} dq q^{3-\rho} = \frac{C'D'^2 r_0^{4-\rho}}{4\pi(4-\rho)}.$$

Отсюда следует, что интеграл $I_1^{(1)}$ ограничен при $r \leq r_0$.

В случае интеграла $I_1^{(2)}$ имеем

$$|I_1^{(2)}(\mathbf{r})| \leq \frac{C'D'}{(4\pi)^2} \int_{\Omega_1} d\mathbf{q} \frac{q^{-\rho}}{|\mathbf{r} - \mathbf{q}|} = \frac{C'D'}{(4\pi)^2} \left(\frac{4\pi r_0^{2-\rho}}{2-\rho} - \frac{4\pi r^{2-\rho}}{(3-\rho)(2-\rho)} \right), \quad (32)$$

где мы воспользовались формулой (15). Из (32) также следует ограниченность интеграла при $r \leq r_0$.

Ограниченность при $r \leq r_0$ интегралов $I_1^{(3)}(\mathbf{r})$ и $I_1^{(4)}(\mathbf{r})$ доказывается аналогично. Отсюда следует утверждение, сделанное выше, об ограниченности при $r \leq r_0$ абсолютной величины остатка $I_1(\mathbf{r}) - I_1^s(\mathbf{r})$.

Продолжим исследование интеграла $I_1(\mathbf{r})$. Покажем, что при $r > r_0$ интеграл $I_1(\mathbf{r})$ допускает оценку типа (9) с $\beta = 1$. Действительно, оценивая его по абсолютной величине и выполняя интегрирование по угловой части переменной $\mathbf{q}$ при помощи формулы (14), с учетом $|Q| \leq C_Q$ приходим к оценке

$$|I_1(\mathbf{r})| \leq \frac{4\pi C_Q}{r} \int_0^{r_0} dq q^{1-\rho},$$

где последний интеграл сходится.

Рассмотрим наконец интеграл $I_2(\mathbf{r})$. Так как в области Ω_2 функция $G_0(\mathbf{q}, 0, z)$ допускает оценку типа (9) с $\beta = 1$, интеграл $I_2(\mathbf{r})$ также допускает эту оценку, что следует из анализа интеграла Φ_2 . Из проведенных рассмотрений вытекает окончательное утверждение относительно поведения первой итерации $g^{(1)}(\mathbf{r}, z)$, которое нам понадобится в дальнейшем: при $r \leq r_0$ функция $g^{(1)}$ имеет сингулярное поведение, которое описывается формулами (29), (30), при этом существует такая константа B , что

$$|g^{(1)}(\mathbf{r}, z)| \leq B g_s^{(1)}(r, z), \quad (33)$$

где сингулярная функция $g_s^{(1)}$ в соответствии с формулами (29), (30) имеет вид

$$g_s^{(1)}(r, z) = \begin{cases} 1 & \text{при } \rho < 1, \\ -\ln r & \text{при } \rho = 1, \\ r^{-\rho+1} & \text{при } 1 < \rho < 3/2. \end{cases} \quad (34)$$

При $r > r_0$ первая итерация $g^{(1)}(\mathbf{r}, z)$ допускает оценку типа (9) с $\beta = 1$.

Итак, первая итерация уравнения (8) имеет сингулярность при $r \rightarrow 0$ и не принадлежит классу $\mathfrak{C}(\beta)$. Покажем, что следующая итерация

$$g^{(2)}(\mathbf{r}, z) \equiv \int d\mathbf{q} G_0(\mathbf{r}, \mathbf{q}, z) V(\mathbf{q}) \int d\mathbf{q}' G_0(\mathbf{q}, \mathbf{q}', z) V(\mathbf{q}') G_0(\mathbf{q}', 0, z) \quad (35)$$

принадлежит классу $\mathfrak{C}(\beta)$. Внутренний интеграл по $\mathbf{q}'$ представляет собой функцию $g^{(1)}(\mathbf{q}, z)$, исследованную выше. Как функция от $\mathbf{q}$ он может иметь сингулярность не сильнее чем $q^{-\rho+1}$ (или $\ln q$ в случае $\rho = 1$) при $q \leq r_0$ и допускает оценку типа (9) с $\beta = 1$ при $q > r_0$. Вновь разобьем внешний интеграл по $\mathbf{q}$ на интегралы по областям Ω_1 и Ω_2 . Полученные таким образом интегралы имеют вид

$$J_j(\mathbf{r}) = \int_{\Omega_j} d\mathbf{q} G_0(\mathbf{r}, \mathbf{q}, z) V(\mathbf{q}) g^{(1)}(\mathbf{q}, z).$$

Оценим интеграл J_1 по абсолютной величине. При этом будем различать случаи $\rho < 1$, $\rho = 1$ и $1 < \rho < 3/2$. Рассмотрим вначале случай ограниченных $r \leq r_0$. В соответствии с формулами (33) и (34) в случае $1 < \rho < 3/2$ будем иметь

$$\begin{aligned} |J_1(\mathbf{r})| &\leq \frac{BC_Q}{4\pi} \int_{\Omega_1} d\mathbf{q} \frac{q^{1-2\rho}}{|\mathbf{r} - \mathbf{q}|} = BC_Q \left(\frac{1}{r} \int_0^r dq q^{3-2\rho} + \int_r^{r_0} dq q^{2-2\rho} \right) = \\ &= BC_Q \left(-\frac{1}{2(2-\rho)(3-2\rho)} r^{3-2\rho} + \frac{1}{3-2\rho} r_0^{3-2\rho} \right). \end{aligned}$$

Таким образом, с учетом того, что $\rho < 3/2$, сингулярность при $r \rightarrow 0$ не возникает, и интеграл J_1 ограничен по абсолютной величине. Это утверждение является верным также и для случаев $\rho = 1$ и $\rho < 1$, которые рассматриваются аналогично.

Рассмотрим теперь случай неограниченных сверху $r > r_0$. При $1 < \rho < 3/2$ получаем

$$|J_1(\mathbf{r})| \leq \frac{BC_Q}{4\pi} \int_{\Omega_1} d\mathbf{q} \frac{q^{1-2\rho}}{|\mathbf{r} - \mathbf{q}|} = \frac{BC_Q}{r} \int_0^{r_0} dq q^{3-2\rho} = \frac{BC_Q r_0^{4-2\rho}}{(4-2\rho)r}.$$

Аналогично можно показать, что такой же характер убывания на бесконечности имеет абсолютное значение интеграла $J_1(\mathbf{r})$ и при $\rho \leq 1$.

Интеграл J_2 по области Ω_2 рассматривается совершенно аналогично интегралу I_2 .

Итак, мы получаем, что вторая итерация $g^{(2)}$, определенная в (35), принадлежит классу $\mathfrak{C}(\beta)$.

Если теперь ввести вместо $g(\mathbf{r}, z)$ функцию $\gamma(\mathbf{r}, z)$ по формуле

$$\gamma(\mathbf{r}, z) = g(\mathbf{r}, z) - G_0(\mathbf{r}, 0, z) + g^{(1)}(\mathbf{r}, z),$$

то эта функция будет удовлетворять интегральному уравнению

$$\gamma(\mathbf{r}, z) = g^{(2)}(\mathbf{r}, z) - \int d\mathbf{q} G_0(\mathbf{r}, \mathbf{q}, z) V(\mathbf{q}) \gamma(\mathbf{q}, z). \quad (36)$$

Выше было показано, что свободный член $g^{(2)}$ принадлежит пространству $\mathfrak{C}(\beta)$, а ядро $G_0(\mathbf{r}, \mathbf{q}, z) V(\mathbf{q})$ определяет компактный в $\mathfrak{C}(\beta)$ оператор. Используя методику работы [17], нетрудно показать, что однородное уравнение (36) может иметь нетривиальное решение только для дискретного набора вещественных значений параметра z . Эти значения определяют дискретный спектр $\sigma_d(H)$ оператора H . На основании альтернативы Фредгольма приходим тогда к заключению, что решение уравнения (36) существует и единственно при всех $z \notin \sigma_d(H)$ и является функцией из класса $\mathfrak{C}(\beta)$.

Объединяя результаты, полученные в данном разделе, сформулируем окончательное утверждение о поведении функции $G(\mathbf{r}, 0, z)$ при $r \rightarrow 0$: в случае $1 < \rho < 3/2$ имеет место представление

$$G(\mathbf{r}, 0, z) = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{r} + \frac{A_0}{r^{\rho-1}} \right) + B_1 + o(1), \quad (37)$$

в случае $\rho = 1$ справедливо равенство

$$G(\mathbf{r}, 0, z) = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{r} + V_0 \ln r \right) + B_2 + o(1), \quad (38)$$

а в случае $\rho < 1$ поведение функции Грина имеет стандартный характер:

$$G(\mathbf{r}, 0, z) = \frac{1}{4\pi r} + B_3 + o(1). \quad (39)$$

Здесь константа A_0 дается выражением

$$A_0 = \frac{V_0}{(2 - \rho)(1 - \rho)},$$

и все конечные вклады от соответствующих выражений из полученных выше формул обозначены как B_j , $j = 1, 2, 3$. Следует отметить, что асимптотическое поведение функции Грина (38) при $\rho = 1$ идентично соответствующей асимптотике кулоновской функции Грина [14].

3. МЕТОД ПСЕВДОПОТЕНЦИАЛА

В этом разделе мы опишем метод добавления точечного потенциала в уравнение Шредингера с гамильтонианом H вида (1), основанный на использовании псевдопотенциала. Этот метод применялся, в частности, в работе [11] для определения функции Грина свободного гамильтониана, возмущенного точечным взаимодействием.

Рассмотрим уравнение Шредингера, в котором к невозмущенному гамильтониану H добавлен член с псевдопотенциалом:

$$[-\Delta + V(\mathbf{r}) - k^2]\psi(\mathbf{r}, \mathbf{k}) + \lambda W(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r}, \mathbf{k}) = 0. \quad (40)$$

Псевдопотенциал W определяется равенством

$$W(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r}, \mathbf{k}) = \delta(\mathbf{r})\beta, \quad (41)$$

где константа β является значением некоторого линейного функционала от решения ψ . Определение вида этого функционала и составляет основную задачу данного раздела.

С учетом предыдущего равенства перепишем уравнение (40) в виде

$$[-\Delta + V(\mathbf{r}) - k^2]\psi(\mathbf{r}, \mathbf{k}) + \lambda\delta(\mathbf{r})\beta = 0.$$

Предположим, что $k^2 \notin \sigma_d(H)$, тогда, обращая оператор в левой части предыдущего равенства, перейдем к интегральному уравнению Липпмана–Швингера

$$\psi(\mathbf{r}, \mathbf{k}) = \psi_0(\mathbf{r}, \mathbf{k}) - \lambda \int d\mathbf{r}' G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', k^2 + i0)\delta(\mathbf{r}')\beta. \quad (42)$$

Функция ψ_0 соответствует состоянию рассеяния и является решением уравнения

$$[-\Delta + V(\mathbf{r}) - k^2]\psi_0(\mathbf{r}, \mathbf{k}) = 0,$$

удовлетворяя при этом асимптотическому граничному условию

$$\psi_0(\mathbf{r}, \mathbf{k}) \sim e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} + A r^{-1} e^{ikr}$$

при $r \rightarrow \infty$. Выполняя интегрирование в (42) при помощи дельта-функции, приходим к представлению

$$\psi(\mathbf{r}, \mathbf{k}) = \psi_0(\mathbf{r}, \mathbf{k}) - \lambda G(\mathbf{r}, 0, k^2 + i0)\beta. \quad (43)$$

Теперь можно выразить асимптотику при $r \rightarrow 0$ функции ψ , являющейся решением уравнения Шредингера (40) с псевдопотенциалом λW , определенным формулой (41), через константу β . Как будет показано ниже, предел функции ψ_0 при $r \rightarrow 0$ конечен в случае $V \in \mathfrak{V}(\rho, \delta)$, и тем самым нетривиальная часть асимптотики функции ψ в нуле полностью определяется членом, содержащим функцию Грина в (43). В результате мы убедимся, что асимптотика функции Грина $G(\mathbf{r}, 0, z)$ при $r \rightarrow 0$ имеет определяющее значение при построении формализма точечного потенциала.

Поскольку асимптотическое поведение функции Грина $G(\mathbf{r}, 0, z)$ при $r \rightarrow 0$ было подробно исследовано в предыдущем разделе, нам остается исследовать поведение функции ψ_0 в нуле. Это можно сделать на основе следующего интегрального уравнения Липпмана–Швингера:

$$\psi_0(\mathbf{r}, \mathbf{k}) = e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} - \int d\mathbf{q} G_0(\mathbf{r}, \mathbf{q}, k^2 + i0)V(\mathbf{q})\psi_0(\mathbf{q}, \mathbf{k}).$$

Хорошо известно [17], [15], что решение этого уравнения существует, выражается в терминах функции Грина формулой

$$\psi_0(\mathbf{r}, \mathbf{k}) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(-i\epsilon \int d\mathbf{q} G(\mathbf{r}, \mathbf{q}, k^2 + i\epsilon) e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{k}} \right)$$

и является ограниченной функцией своего первого аргумента. В последнем легко убедиться в нашем случае потенциалов из класса $\mathfrak{V}(\rho, \delta)$, фактически повторяя рассуждения предыдущего раздела при $\beta = 0$. В результате можем заключить, что для потенциалов из класса $\mathfrak{V}(\rho, \delta)$ асимптотика функции $\psi_0(\mathbf{r}, \mathbf{k})$ регулярна при $r \rightarrow 0$ и эта функция имеет конечный предел в начале координат.

Сингулярное поведение полного решения ψ тем самым полностью определяется сингулярностями функции Грина. В соответствии с формулами (37)–(39) мы имеем три случая для асимптотики волновой функции в зависимости от значения параметра потенциала ρ : в случае наиболее сильной сингулярности потенциала при $1 < \rho < 3/2$ асимптотика функции ψ имеет вид

$$\psi(\mathbf{r}, \mathbf{k}) = \frac{\alpha_1}{4\pi} \left(\frac{1}{r} + \frac{A_0}{r^{\rho-1}} \right) + \beta_1 + o(1), \quad (44)$$

в случае $\rho = 1$ она дается выражением

$$\psi(\mathbf{r}, \mathbf{k}) = \frac{\alpha_2}{4\pi} \left(\frac{1}{r} + V_0 \ln r \right) + \beta_2 + o(1), \quad (45)$$

а в случае $\rho < 1$ верно равенство

$$\psi(\mathbf{r}, \mathbf{k}) = \frac{\alpha_3}{4\pi r} + \beta_3 + o(1). \quad (46)$$

Присутствующие в последних формулах константы определяются как

$$A_0 = \frac{V_0}{(2-\rho)(1-\rho)}, \quad \alpha_j = -\lambda\beta_j, \quad \beta_j = \psi_0(0, \mathbf{k}) - \lambda B_j \beta_j, \quad j = 1, 2, 3.$$

Заметим, что константы α_j и β_j не являются независимыми. Единственным независимым параметром, определяющим вид точечного потенциала, является константа связи $\lambda = -\alpha_j/\beta_j$.

Теперь, следуя методу, описанному в работе [13], можно вычислить вид псевдопотенциала (41) из асимптотических выражений (44)–(46). Для всех трех случаев псевдопотенциал может быть записан в виде

$$\lambda W_j(\mathbf{r}) = \lambda \delta(\mathbf{r}) \frac{d}{d\omega_j} \omega_j = \lambda \delta(\mathbf{r}) \left(1 + \omega_j \frac{d}{d\omega_j} \right),$$

где переменные ω_j определены формулами

$$\frac{1}{\omega_1} = r^{-1} + A_0 r^{-\rho+1}, \quad \frac{1}{\omega_2} = r^{-1} + V_0 \ln r, \quad \frac{1}{\omega_3} = r^{-1}.$$

Действительно, в новых переменных ω_j асимптотические выражения (44)–(46) переписываются в виде

$$\psi(\mathbf{r}, \mathbf{k}) = \frac{\alpha_j}{4\pi\omega_j} + \beta_j + o(1),$$

и, следовательно,

$$\lambda \delta(\mathbf{r}) \frac{d}{d\omega_j} (\omega_j \psi(\mathbf{r}, \mathbf{k})) = \lambda \beta_j \delta(\mathbf{r}),$$

что согласуется с определением псевдопотенциала (41) если положить $\beta = \beta_j$. Из последнего равенства получаем

$$\beta_j = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{d}{d\omega_j} (\omega_j \psi(\mathbf{r}, \mathbf{k})).$$

Вновь подчеркнем, что в случае $\rho = 1$ построенный псевдопотенциал совпадает с псевдопотенциалом для чисто кулоновского случая [14]. Это завершает построение псевдопотенциала и тем самым оператора $\tilde{H}$ в случае потенциалов $V \in \mathfrak{V}(\rho, \delta)$.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В предложенной работе построены гамильтонианы с суперпозицией короткодействующего и точечного потенциалов. Рассмотрен случай, когда особенность короткодействующего потенциала попадает на носитель точечного взаимодействия. В результате этого точечное взаимодействие модифицируется. Основным техническим средством для нахождения этой модификации является интегральное уравнение для функции Грина.

В работе показано, что функция Грина $G(\mathbf{r}, 0, z)$ оператора Шредингера с потенциалом, имеющим в нуле сингулярность вида $O(r^{-\rho})$, помимо стандартной особенности $1/4\pi r$, обладает дополнительной сингулярностью вида $O(r^{-\rho+1})$, за исключением случая $\rho = 1$, в котором возникает логарифмическая сингулярность. Такие сингулярности и приводят к модифицированным потенциалам нулевого радиуса.

Мы рассмотрели класс короткодействующих потенциалов $\mathfrak{V}(\rho, \delta)$ с параметрами $\rho < 3/2$ и $\delta > 1$. Такой выбор параметров не является исчерпывающим, прежде всего, это касается δ . С небольшими изменениями техники результаты работы можно обобщить на случай более слабого условия $\delta > 0$, для чего необходимо использовать более тонкие оценки интегралов типа I_2 , оперируя с неабсолютно сходящимися интегралами. Условие на параметр ρ тоже может быть ослаблено до $\rho < 2$, что приведет к появлению дополнительных сингулярностей у функции Грина. Мы не приводим здесь анализа этих случаев во избежание чрезмерного увеличения объема статьи и планируем сделать это в будущих работах.

Благодарности. Работа поддержана СПбГУ (грант № 11.38.263.2014) и РФФИ (грант № 14-02-00326).

Список литературы

- [1] Ю. Н. Демков, В. Н. Островский, *Метод потенциалов нулевого радиуса в атомной физике*, Изд-во ЛГУ, Л., 1975.
- [2] Ф. А. Березин, Л. Д. Фаддеев, *Докл. АН СССР*, **137**:5 (1961), 1011–1014.
- [3] С. Альбеверио, Ф. Гестези, Р. Хёгг-Крон, Х. Хольден, *Решаемые модели в квантовой механике*, Мир, М., 1991.
- [4] Б. С. Павлов, *ТМФ*, **59**:3 (1984), 345–353.
- [5] Ю. А. Куперин, К. А. Макаров, Ю. Б. Мельников, *ТМФ*, **74**:1 (1988), 103–111.
- [6] J. F. Brasche, P. Exner, Yu. A. Kuperin, P. Šeba, *J. Math. Anal. Appl.*, **184**:1 (1994), 112–139.
- [7] J. Brüning, V. Geyler, K. Pankrashkin, *J. Math. Phys.*, **46**:11 (2005), 113508, 16 pp., arXiv: math-ph/0411078.
- [8] S. Lakaev, M. Darus, Sh. Kurbanov, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **46**:20 (2013), 205304, 15 pp.
- [9] W. Bulla, F. Gesztesy, *J. Math. Phys.*, **26**:10 (1985), 2520–2528.
- [10] J. Zorbas, *J. Math. Phys.*, **21**:4 (1980), 840–847.
- [11] A. Grossmann, T. T. Wu, *J. Math. Phys.*, **25**:6 (1984), 1742–1745.
- [12] I. A. Ivanov, J. Mitroy, *J. Phys. B*, **33**:21 (2000), L831–L837.
- [13] S. L. Yakovlev, C.-Y. Hu, D. Caballero, *J. Phys. B*, **40**:10 (2007), 1675–1693.
- [14] S. L. Yakovlev, V. A. Gradusov, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **46**:3 (2013), 035307, 15 pp.
- [15] А. Я. Повзнер, *Матем. сб.*, **32(74)**:1 (1953), 109–156.
- [16] Р. Ньютон, *Теория рассеяния волн и частиц*, Мир, М., 1969.
- [17] Т. Ikebe, *Arch. Rational Mech. Anal.*, **5**:1 (1960), 1–34.

Поступила в редакцию 25.09.2014