Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Арсеньев, О связи между полюсом матрицы рассеяния и коэффициентами прохождения и отражения при рассеянии в квантовом волноводе, *ТМФ*, 2004, том 140, номер 2, 303–309

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf88>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.206.68

26 апреля 2023 г., 14:13:51

© 2004 г.

А. А. Арсеньев*

О СВЯЗИ МЕЖДУ ПОЛЮСОМ МАТРИЦЫ РАССЕЯНИЯ И КОЭФФИЦИЕНТАМИ ПРОХОЖДЕНИЯ И ОТРАЖЕНИЯ ПРИ РАССЕЯНИИ В КВАНТОВОМ ВОЛНОВОДЕ

На примере рассмотрено влияние полюса с малой мнимой частью на коэффициенты отражения и прохождения при рассеянии в квантовом волноводе.

Ключевые слова: матрица рассеяния, резонансы, квантовый бильярд.

1. ВВЕДЕНИЕ

Рассматриваемая нами задача рассеяния связана с описанием баллистической проводимости в полупроводниковых гетероструктурах.

Предназначенные для детального сравнения с экспериментом расчеты свойств полупроводниковых гетероструктур основаны на кинетических моделях и очень сложны. В том случае, если длина свободного пробега носителя заряда много больше характерных размеров системы, возможен упрощенный подход, при котором проводимость трактуется как перенос заряда в поле заданного потенциала и вычисляется по формуле Ландауэра через матрицу рассеяния. Эта модель называется моделью баллистической проводимости (см. обзор [1]).

Практика показывает, что в пределах своей применимости модель баллистической проводимости в общих чертах правильно описывает основные свойства проводимости как функции напряжения. Модель баллистической проводимости проста и легко позволяет делать выводы качественного характера, что сделало ее и связанные с ней понятия квантового волновода, квантовых проволок, квантовых точек, бильярдных и т. д. популярными темами исследований, особенно в работах по физике квантовых компьютеров. Эта же модель стимулировала постановку новых задач в теории рассеяния. Основным методом исследования модели баллистической проводимости является численный эксперимент. Если численный эксперимент показывает, что проводимость как функция напряжения имеет четко выраженный резонанс, то возникает обращенный к теории

*Московский государственный университет, Москва, Россия.
E-mail: arsenyev@afrodita.phys.msu.ru, arsenyev@math356.phys.msu.ru

рассеяния вопрос: чем этот резонанс обусловлен? В теории рассеяния резонанс обычно связывается с полюсом аналитического продолжения матрицы рассеяния, рассматриваемым как возмущение погруженного в непрерывный спектр собственного значения гамильтониана. На примере мы покажем, что в квантовом волноводе влияние полюса матрицы рассеяния на коэффициенты прохождения и отражения может противоречить наивной физической интуиции. Это кажется нам интересным, поскольку модель квантового волновода часто используется в эвристических рассуждениях. Основной результат работы сформулирован в теореме. В связи с этим интересно сопоставить наш результат с рассуждениями, приведенными в работе [2] (абзац после формулы (2.1)). Мы будем опираться на предложенную в работе [3] модель образования резонансов. Данную работу можно рассматривать как иллюстрацию доказанной в работе [3] теоремы 2.

2. ОПИСАНИЕ МОДЕЛИ

Пусть положительные числа h, h_1, d, d_1, l, l_1 удовлетворяют условиям $0 \leq h \leq h_1$, $0 < d < d_1$, $0 < l < l_1$, и пусть $0 \leq \epsilon < l_1 - l$. Будем обозначать символом $\{A, B, C, \dots\}$ ломаную, состоящую из отрезков $AB, BC, \dots$. В пространстве $\mathbb{R}^2$ рассмотрим открытую область $D(\epsilon, h)$, симметричную относительно оси $x = 0$, граница которой в правой полуплоскости состоит из трех ломаных:

$$\begin{aligned} &\{(0, h), (l, h), (l, h_1), (\infty, h_1)\}, \\ &\{(0, 0), (l_1 - \epsilon, 0), (l_1 - \epsilon, -d), (0, -d)\}, \\ &\{(0, -d_1), (l_1, -d_1), (l_1, 0), (\infty, 0)\}. \end{aligned}$$

Область $D(\epsilon, h)$ есть *волновод* (полоса $\{x, y; -\infty < x < \infty, 0 < y < h_1\}$), в который вставлена *перегородка* — прямоугольник с границей

$$\{(-l, h_1), (l, h_1), (l, h), (-l, h), (-l, h_1)\},$$

и добавлен *резонатор* — прямоугольник с границей

$$\{(-l_1, -d), (l_1, -d), (l_1, -d_1), (-l_1, -d_1), (-l_1, -d)\},$$

соединенный с волноводом *каналами связи* (*leads*): прямоугольником с границей

$$\{(l_1 - \epsilon, 0), (l_1, 0), (l_1, -d), (l_1 - \epsilon, -d), (l_1 - \epsilon, 0)\}$$

и симметричным ему прямоугольником.

Пусть $L(\epsilon, h)$ — отвечающее граничным условиям Дирихле на $\partial D(\epsilon, h)$ самосопряженное в $L^2(D(\epsilon, h))$ расширение оператора Лапласа $(-\Delta)$. Мы рассмотрим два случая:

- а) перегородки нет, т.е. $h = h_1$,
- б) перегородка полностью перекрывает волновод, т.е. $h = 0$.

В каждом из этих случаев спектр оператора $L(0, h)$ состоит из непрерывного спектра, заполняющего полуось $[(\pi/h_1)^2, \infty)$, и собственных значений $\{\omega_j\}$ – упорядоченного в порядке возрастания множества чисел вида

$$\{\omega_j\} = \left\{ \left(\frac{\pi}{d_1 - d} \right)^2 p^2 + \left(\frac{\pi}{2l_1} \right)^2 q^2, \quad p, q \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Пусть $\omega_{\text{res}} \in \{\omega_j\}$ – простое собственное значение и

$$\left(\frac{\pi}{h_1} \right)^2 < \omega_{\text{res}} < 4 \left(\frac{\pi}{h_1} \right)^2. \quad (1)$$

В силу условия (1) число ω_{res} есть погруженное в непрерывный спектр простое собственное значение оператора $L(0, h)$. Мы изучим поведение матрицы рассеяния для пары операторов $L(\epsilon, h)$, $L(0, h_1)$ в окрестности спектрального параметра $\lambda = \omega_{\text{res}}$ при малых ϵ и $h = h_1$, $h = 0$. Наше основное предположение состоит в том, что при всех $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$, $h = 0$, $h = h_1$ у оператора $L(\epsilon, h)$ в малой окрестности точки ω_{res} нет собственных значений, т.е. в том, что при присоединении резонатора к волноводу отвечающее собственному значению ω_{res} собственное колебание резонатора превращается в резонанс, а не в захваченную моду. При этом условии мы докажем, что при $\epsilon > 0$ в окрестности точки ω_{res} существуют такие значения спектрального параметра λ , для которых у оператора $L(\epsilon, h_1)$ коэффициент прохождения почти равен нулю, а у оператора $L(\epsilon, 0)$ при λ из той же окрестности точки ω_{res} коэффициент прохождения почти равен единице.

Это наш основной результат, и он сформулирован в теореме.

Напомним определение коэффициентов отражения и прохождения в нашей задаче. Пусть

$$\nu_m = \left(\frac{\pi m}{h_1} \right)^2, \quad m = 1, 2, \dots$$

Положим

$$e(\pm, m, \lambda, x, y) = \exp(\pm i x \sqrt{\lambda - \nu_m}) \left(\left(\frac{2}{h_1} \right)^{1/2} \sin \frac{\pi m y}{h_1} \right) \theta(\lambda - \nu_m), \quad (2)$$

где

$$\theta(\lambda) = \begin{cases} 1, & \lambda > 0, \\ 0, & \lambda \leq 0. \end{cases}$$

Решением стационарной задачи рассеяния для оператора L будем называть функцию $u(\pm, m, \lambda, x, y)$, которая удовлетворяет следующему уравнению и граничным условиям:

$$L_{x,y} u(\cdot, x, y) = \lambda u(\cdot, x, y), \quad (x, y) \in D(\epsilon, h), \quad u(\cdot, x, y) = 0, \quad (x, y) \in \partial D(\epsilon, h), \quad (3)$$

и представима в виде

$$u(\pm, m, \lambda, x, y) = e(\pm, m, \lambda, x, y) + w(\pm, m, \lambda, x, y). \quad (4)$$

Здесь функция w удовлетворяет асимптотическим соотношениям

$$w(+, m, \lambda, x, y) = \sum_p [t(+, p, m, \lambda) - \delta_{pm}] e(+, p, \lambda, x, y) + O(\dots), \quad x > 0, \quad (5a)$$

$$w(+, m, \lambda, x, y) = \sum_p r(+, p, m, \lambda) e(-, p, \lambda, x, y) + O(\dots), \quad x < 0, \quad (5b)$$

$$w(-, m, \lambda, x, y) = \sum_p r(-, p, m, \lambda) e(+, p, \lambda, x, y) + O(\dots), \quad x > 0, \quad (5b)$$

$$w(-, m, \lambda, x, y) = \sum_p [t(-, p, m, \lambda) - \delta_{pm}] e(-, p, \lambda, x, y) + O(\dots), \quad x < 0, \quad (5г)$$

$$O(\dots) = O(e^{-\delta|x|}), \quad |x| \rightarrow \infty.$$

Суммирование в этих формулах ведется по значениям индекса p , удовлетворяющим условию $\nu_p < \lambda$. Коэффициенты $t(\pm, p, m, \lambda)$, $r(\pm, p, m, \lambda)$ называются *коэффициентами прохождения* и *отражения*. Их физический смысл обсуждается в работе [1].

Пусть $\epsilon_n \rightarrow +0$, $n \rightarrow \infty$. Будем отмечать индексом n величины, которые по описанным выше построениям соответствуют области $D(\epsilon_n, h)$. В дальнейшем мы будем считать, что спектральный параметр λ удовлетворяет условию

$$\left(\frac{\pi}{h_1}\right)^2 < \lambda < 4\left(\frac{\pi}{h_1}\right)^2. \quad (6)$$

В силу условия (6) в правых частях уравнений (5) будет только по одному слагаемому, и мы положим

$$t_n(\pm, \lambda, h) = t(\pm, 1, 1, \lambda), \\ r_n(\pm, \lambda, h) = r(\pm, 1, 1, \lambda),$$

если правые части (5) вычисляются для области $D(\epsilon_n, h)$.

ЛЕММА 1. *Справедливы равенства*

$$t_n(+, \lambda, h) = t_n(-, \lambda, h), \quad (7)$$

$$|r_n(\pm, \lambda, h)|^2 + |t_n(\pm, \lambda, h)|^2 = 1. \quad (8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проинтегрируем равенство

$$u(+, \dots) L_{x,y}(\epsilon_n, h) u(-, \dots) - u(-, \dots) L_{x,y}(\epsilon_n, h) u(+, \dots) = 0$$

по области $x < R$, используем формулу Грина, граничные условия, асимптотику (5) и перейдем к пределу $R \rightarrow \infty$. В результате получим равенство (7). Равенство (8) есть следствие унитарности матрицы рассеяния и формул, связывающих матрицу рассеяния с коэффициентами отражения и прохождения. Лемма 1 доказана.

Положим по определению

$$t_n(\lambda, h) = t_n(\pm, \lambda, h).$$

3. ПОВЕДЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ ОТРАЖЕНИЯ И ПРОХОЖДЕНИЯ В ОКРЕСТНОСТИ РЕЗОНАНСА

Наша задача состоит в изучении поведения коэффициентов $t_n(\lambda, h)$, $r_n(\pm, \lambda, h)$ в окрестности точки $\lambda = \omega_{\text{res}}$ при $n \rightarrow \infty$. Покажем, что эта задача может быть рассмотрена в рамках предложенной в работе [3] модели. Для этого нужно сделать следующее.

1. В качестве пространства H из работы [3] взять пространство $H = L^2(D(\epsilon_1, h))$.
2. В качестве пространств $H_{\pm}$ из работы [3] взять пространства

$$H_{\pm} = L^2(D(\epsilon_1, h), e^{\mp|x|} dx dy).$$

3. В качестве пространства Ω из работы [3] (пространства, параметризующего амплитуду рассеяния) нужно взять декартово произведение двухточечного множества $\pm$ на множество целых чисел. Это ясно из формул (5).

4. В качестве оператора A_0 из работы [3] нужно взять оператор $A_0 = -e^{-tL(0, h_1)}$, а в качестве операторов A_n – операторы

$$A_n = -e^{-tL(\epsilon_n, h)}. \quad (9)$$

Выбор параметра $t > 0$ пояснен в работе [4]. Годится любое $t > 0$ за исключением, быть может, некоторого конечного множества.

5. В качестве отображения U из работы [3] нужно взять отображение, которое диагонализует оператор $-e^{-tL(0, h_1)}$. Оно строится тривиально методом разделения переменных.

6. В качестве отображений l, p из работы [3] нужно взять следующие пары:

$$l_1(\psi(x, y)) = \overline{\psi(x, y)}, \quad p_1(\pm, n) = (\mp, n), \quad (10)$$

$$l_2(\psi(x, y)) = \overline{\psi(-x, y)}, \quad p_2(\pm, n) = (\pm, n). \quad (11)$$

В работе [4] показано, что при таком выборе выполнены все условия работы [3]. Заметим, что сделанные в работе [3] предположения о гладкости границы можно приспособить к рассматриваемому случаю с помощью хорошо известной техники винеровской аппроксимации, и мы не будем задерживать на этом внимание.

Пусть λ_n – числа, определяемые формулами (9) и (24) из работы [3]. Положим

$$\mu_n(h) = -\ln\left(-\frac{\lambda_n}{t}\right), \quad (12)$$

если правая часть (12) вычисляется для области $D(\epsilon_n, h)$.

ЛЕММА 2. 1) Число μ_n есть полюс аналитического продолжения интегрально-го ядра резольвенты оператора $L(\epsilon_n, h)$.

2) Справедливы соотношения

$$\text{Im } \mu_n(h) < 0, \quad \mu_n(h) \rightarrow \omega_{\text{res}}, \quad n \rightarrow \infty. \quad (13)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое утверждение следует из формулы (12) и определения числа λ_n как полюса резольвенты оператора A_n . Второе утверждение вытекает из рассуждений, приведенных в работе [3] после формулы (24), и нашего предположения о том, что у операторов $L(\epsilon_n, h)$ нет собственных значений вблизи точки ω_{res} . Лемма 2 доказана.

Из леммы 2 следует, что число $\mu_n(h)$ есть резонансный полюс для оператора $L(\epsilon_n, h)$ в принятом в теории дифференциальных уравнений смысле [5].

Положим по определению

$$\text{v. p. } t_\infty(\omega_{\text{res}}, h) = \lim_{|\lambda - \omega_{\text{res}}| \rightarrow +0} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} t_n(\lambda, h) \right), \quad (14a)$$

$$\text{v. p. } r_\infty(\pm, \omega_{\text{res}}, h) = \lim_{|\lambda - \omega_{\text{res}}| \rightarrow +0} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} r_n(\pm, \lambda, h) \right). \quad (14b)$$

Обратим внимание на то, что важен порядок предельных переходов в (14). Существование пределов доказано в работе [4].

ЛЕММА 3. *Справедливы соотношения*

$$\text{v. p. } t_\infty(\omega_{\text{res}}, h_1) = 1, \quad \text{v. p. } r_\infty(\pm, \omega_{\text{res}}, h_1) = 0, \quad (15)$$

$$\text{v. p. } t_\infty(\omega_{\text{res}}, 0) = 0, \quad |\text{v. p. } r_\infty(\pm, \omega_{\text{res}}, 0)| = 1. \quad (16)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если резонатор закрыт (т.е. $n = \infty$), то очевидно, что при $\lambda \neq \omega_{\text{res}}$ справедливы равенства

$$t_\infty(\lambda, h_1) = 1, \quad t_\infty(\lambda, 0) = 0.$$

Отсюда и из равенства (8) следует утверждение леммы 3.

ТЕОРЕМА. *Пусть последовательность действительных чисел $\gamma_n(h)$ удовлетворяет условию*

$$|\omega_{\text{res}} - \gamma_n(h)| = O(|\text{Im } \mu_n(h)|^{1+\delta}), \quad \delta > 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Тогда

$$|t_n(\gamma_n(0), 0)| \rightarrow 1, \quad |t_n(\gamma_n(h_1), h_1)| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В случае $h = h_1$ применим теорему 2 из работы [3] при $l = l_1$, $p = p_1$. Используя равенство (15), получим

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (|r_n(+, \gamma_n(h_1), h_1)| + |r_n(-, \gamma_n(h_1), h_1)|) = 2. \quad (17)$$

Так как

$$|r_n(\pm, \gamma_n(h_1), h_1)| \leq 1,$$

то из (17) следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |r_n(\pm, \gamma_n(h_1), h_1)| = 1,$$

и поэтому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |t_n(\gamma_n(h_1), h_1)| = 1.$$

Во втором случае ($h = 0$) мы воспользуемся симметрией задачи относительно отражений $(x, y) \rightarrow (-x, y)$ и в теореме 2 из работы [3] положим $l = l_2$, $p = p_2$. Далее будем рассуждать аналогично первому случаю. Теорема доказана.

Отметим, что задача о взаимодействии резонатора и волновода в случае иной геометрии рассмотрена в работе [6]. В работе [7] для другой ситуации и другим методом доказано, что коэффициент прохождения обращается в нуль на частоте резонатора.

Благодарности. Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 02-01-00271.

Список литературы

- [1] *P. Mavropoulos, N. Papanikolaou, P. H. Dederichs.* A KKR Green formalism for ballistic transport. cond-mat/0306604.
- [2] *F.-M. Dittes.* Phys. Rep. 2000. V. 339. P. 215–316.
- [3] *А. А. Арсеньев.* ТМФ. 2003. Т. 134. № 3. С. 341–352.
- [4] *А. А. Арсеньев.* Матем. сб. 2003. Т. 194. № 1. С. 3–22.
- [5] *J. Sjöstrand, M. Zworski.* J. Am. Math. Soc. 1991. V. 4. P. 729–769.
- [6] *H.-J. Stöckmann, E. Persson, Y.-H. Kim, M. Barth, U. Kuhl, I. Rotter.* Phys. Rev. E. 2002. V. 65. P. 066211-1–066211-9.
- [7] *W. Porod, Z. Shao, C. S. Lent.* Appl. Phys. Lett. 1992. V. 61. № 11. P. 1350–1352.

Поступила в редакцию 3.X.2003 г.