Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. В. Тютин, Ш. С. Шахвердиев, Пространственно-временная локальность в $Sp(2)$ -симметричном лагранжевом формализме, *ТМФ*, 1998, том 115, номер 3, 373–388

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf880>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.157.27.8

26 апреля 2023 г., 02:51:09

© 1998 г.

И. В. Тютин*, Ш. С. Шахвердиев†

ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННАЯ ЛОКАЛЬНОСТЬ В $Sp(2)$ -СИММЕТРИЧНОМ ЛАГРАНЖЕВОМ ФОРМАЛИЗМЕ

В рамках теории возмущений и при стандартных предположениях о регулярности действия показывается, что $Sp(2)$ -мастер-уравнение для эффективного действия калибровочной теории поля имеет локальные решения. Описан произвол в решении при условии, что решения собственные. Показано также, что эффективное действие можно выбрать $Sp(2)$ -инвариантом и (при дополнительном предположении о том, что генераторы калибровочных преобразований являются лоренцевскими тензорами) лоренцевским инвариантом.

1. ВВЕДЕНИЕ

Как известно, методы квантования калибровочных теорий в рамках лагранжева формализма Баталина–Вилкововского (БВ) и гамильтонова формализма Баталина–Вилкововского–Фрадкина могут быть обобщены таким образом, что гостовские и антигостовские поля вводятся в теорию симметричным образом [1–10]. Соответственно в теории появляются два нильпотентных (БРСТ и анти-БРСТ) заряда. Переменные теории разбиваются на $Sp(2)$ -мультиплеты, причем госты и антигосты, БРСТ- и анти-БРСТ-заряды и пара уравнений для эффективного действия образуют $Sp(2)$ -дублеты. Систему классических уравнений для эффективного действия мы будем называть $Sp(2)$ -мастер-уравнением. Формальное доказательство существования решения $Sp(2)$ -мастер-уравнения и описание произвола в решении были даны в [2–7]. В этих работах, однако, тот факт, что эффективное действие должно быть локальным функционалом, принимался в качестве гипотезы. В [11] с помощью перехода от гамильтонова формализма к лагранжеву было показано, что в случае систем конечного числа степеней свободы локальное (по времени) решение $Sp(2)$ -мастер-уравнения существует (показано также, что лагранжево и гамильтоново $Sp(2)$ -симметричные квантования эквивалентны).

*Физический институт им. П. Н. Лебедева РАН, Москва, Россия

†Московский государственный университет, Москва, Россия

В настоящей работе изучается вопрос о существовании локальных решений $Sp(2)$ -мастер-уравнения в лагранжевом формализме в теории поля. Круг вопросов, связанный со стандартным мастер-уравнением в формализме БВ (существование локального решения, структура перенормировки, аномалии и др.), подробно обсуждался в печати (см. [12–14] и цитированную в них литературу). В основе подхода к рассмотрению проблемы локальных решений лежит переход от уравнения для действия к уравнению для подынтегральной функции в пространстве, координатами которого служат поля и их производные в фиксированной пространственно-временной точке (джет-пространства [15]). Мы применим эту схему к случаю $Sp(2)$ -мастер-уравнения. В разделе 2 описываются постановка задачи и предположения, в рамках которых будет проводиться рассмотрение. В разделе 3 доказано существование локального решения $Sp(2)$ -мастер-уравнения. В разделе 4 обсуждается произвол в решении и показывается, что при некоторых ограничениях на структуру решения в первом приближении разложения по гостовским полям и полям, вводящим калибровку, произвол описывается преобразованиями специального вида (названными калибровочными преобразованиями), которые не меняют физического содержания теории. Показано также, что существует решение, сохраняющее $Sp(2)$ -симметрию и (при дополнительном предположении о том, что генераторы калибровочных преобразований являются лоренцевскими тензорами) лоренцевскую инвариантность.

Приведем некоторые обозначения и соглашения: ∂_μ означает полную производную по x^μ , $\partial_{\mu_1 \dots \mu_k} \equiv \partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_k}$, $D_{\mu_1 \dots \mu_k} \equiv D_{\mu_1} \dots D_{\mu_k}$. Под локальным дифференциальным оператором конечного порядка (ЛДОКП) понимается оператор

$$M = \sum_{k=0}^n g^{\mu_1 \dots \mu_k} \partial_{\mu_1 \dots \mu_k},$$

где $g^{\mu_1 \dots \mu_k}$ — функции x^μ , полевых переменных и их производных конечного порядка, n — некоторое конечное число. ЛДОКП M^T , т.е. транспонированный оператор M , определяется соотношениями

$$\begin{aligned} (M^{Tij} \varphi_j) \psi_i - \varphi_i M^{ij} \psi_j &= \partial_\mu j^\mu, & (M^{-1})^T &= (M^T)^{-1}, \\ (M^T)^T &= (-1)^{\varepsilon_i + \varepsilon_j} M^{ij}, \\ \varepsilon(\varphi^i) &= \varepsilon_i, & \varepsilon(M^{ij}) &= \varepsilon_i + \varepsilon_j, \end{aligned}$$

справедливыми для произвольных функций φ_i , ψ_i и некоторых локальных функций j^μ (аргументов x^μ , полевых переменных, функций φ_i , ψ_i и их производных конечного порядка).

Все рассуждения проводятся в рамках теории возмущений, т.е. в терминах формальных рядов по полевым переменным и их производным. Там, где это специально не оговорено (в приложении 2), предполагается, что все встречающиеся функции могут явно зависеть от x^μ .

2. ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ

Здесь формулируются задача и предположения, при которых она будет решаться. Полный набор переменных теории Γ^Σ разбивается на группы $\Phi^A, \Phi_{Aa}^*, \bar{\Phi}_A$, $a, b, c = 1, 2$, каждая из переменных является функцией координат x^μ . Переменные Φ^A , в свою очередь, разбиты на группы $\Phi^A = (\varphi^i, C^{\alpha b}, B^\alpha)$, где φ^i – переменные классической теории, $C^{\alpha b}$ – поля гостов и антигостов, B^α – поля, вводящие калибровку. Всем полям приписывается грассманова четность $\varepsilon(\Phi^A) = \varepsilon(\bar{\Phi}_A) = \varepsilon_A$, $\varepsilon(\Phi_{Aa}^*) = \varepsilon_A + 1$, $\varepsilon(B^\alpha) = \varepsilon_\alpha$, $\varepsilon(C^{\alpha b}) = \varepsilon_\alpha + 1$ и новое гостовское число ngh : $\text{ngh}(\varphi) = 0$, $\text{ngh}(C^b) = 1$, $\text{ngh}(B) = 2$, $\text{ngh}(\bar{\Phi}) = -2 - \text{ngh}(\Phi)$, $\text{ngh}(\Phi_a^*) = -1 - \text{ngh}(\Phi)$, $\text{ngh}(FM) = \text{ngh}(F) + \text{ngh}(M)$. Кроме того, поля φ^i , B^α , $\bar{\varphi}_i$, $\bar{B}_\alpha$ образуют $Sp(2)$ -синглеты, $C^{\alpha b}$ – $Sp(2)$ -дублеты, φ_{ia}^* , $B_{\alpha a}^*$, $\bar{C}_{\alpha a}$ – $Sp(2)$ -антидублеты, $C_{\alpha b|a}^*$ преобразуются как произведение $Sp(2)$ -антидублетов. В $Sp(2)$ -формализме эффективное действие $S(\Phi, \Phi_a^*, \bar{\Phi})$ удовлетворяет $Sp(2)$ -мастер-уравнению

$$\frac{1}{2}(S, S)^a + \int dx \varepsilon^{ab} \Phi_{Ab}^* \frac{\delta}{\delta \bar{\Phi}_A} S = 0, \quad \varepsilon^{ab} = -\varepsilon^{ba}, \quad \varepsilon_{ab} \varepsilon^{bc} = \delta_a^c, \quad (1)$$

$$\varepsilon_{12} = \varepsilon^{21} = 1,$$

и начальному условию

$$S|_{\Phi_a^* = \bar{\Phi} = 0} = \mathcal{S}(\varphi).$$

$(,)^a$ в (1) означает дублет антискобок

$$(F, G)^a \equiv \int dx \left(F \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta \Phi^A} \frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta \Phi_{Aa}^*} G - F \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta \Phi_{Aa}^*} \frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta \Phi^A} G \right),$$

$\mathcal{S}(\varphi)$ – исходное классическое действие, обладающее калибровочной симметрией: $R_\alpha^i \delta \mathcal{S} / \delta \varphi_i = 0$. Предполагается также, что эффективное действие сохраняет ngh , имеет нулевую грассманову четность: $\text{ngh}(S) = \varepsilon(S) = 0$, и является $Sp(2)$ -синглетом. Уравнение (1) будем решать в рамках теории возмущений по полям $C^{\alpha b}$ и B^α :

$$S = \mathcal{S} + \sum_{k=1} S_k, \quad S_k \sim C^l B^m, \quad l + m = k.$$

Предположим, доказано, что S_k , $k = 1, \dots, n$, существуют, так что уравнение (1) удовлетворяется в порядках $C^l B^{k-l}$, $k \leq n$. В $n + 1$ приближениях получим уравнение для S_{n+1} :

$$W^a S_{n+1} = F_{n+1}^a, \quad F_{n+1}^a = -\frac{1}{2} (S_{[n]}, S_{[n]})_{n+1}^a, \quad S_{[n]} = \mathcal{S} + \sum_{k=1}^n S_k, \quad (2)$$

где (см. следующий раздел)

$$W^a = \int dx \left((-1)^{\varepsilon_i} L_i \frac{\delta}{\delta \varphi_{ia}^*} - (-1)^{\varepsilon_\alpha} R_\alpha^i \varphi_{ib}^* \frac{\delta}{\delta C_{\alpha b|a}^*} + \right. \\ \left. + ((-1)^{\varepsilon_i} R_\alpha^i \bar{\varphi}_i + \varepsilon^{cb} C_{\alpha b|c}^*) \frac{\delta}{\delta B_{\alpha a}^*} - (-1)^{\varepsilon_\alpha} \varepsilon^{ab} B^\alpha \frac{\delta}{\delta C^{\alpha b}} + \varepsilon^{ab} \Phi_{Ab}^* \frac{\delta}{\delta \bar{\Phi}_A} \right), \\ L_i(x) \equiv \frac{\delta \mathcal{S}}{\delta \varphi_i(x)}.$$

Операторы W^a нильпотентны:

$$W^a W^b + W^b W^a = 0.$$

W^a и F_{n+1}^a образуют $Sp(2)$ -дублеты. Используя явный вид F_{n+1}^a или тождество Якоби для дублета антискобок, можно проверить выполнение соотношения

$$W^a F_{n+1}^b + W^b F_{n+1}^a = 0, \quad (3)$$

которое означает, что условие совместности уравнения (2) выполнено. Уравнение (3) имеет очевидное решение

$$F_{n+1}^a = W^a Y_{n+1}. \quad (4)$$

Если это общее решение, т.е. F_{n+1}^a имеет вид (4), то в качестве S_{n+1} можно взять Y_{n+1} . Наша задача состоит в том, чтобы показать, что при некоторых предположениях, сформулированных ниже, общее решение уравнения (3) действительно имеет вид (4). Основные проблемы при исследовании уравнения (4) связаны с тем, что решение следует искать в классе локальных функционалов. Именно, все функционалы S_k должны иметь вид интеграла от функций Γ^Σ и их производных конечного порядка

$$S_k = \int dx s_k(\Gamma^\Sigma, \partial_\mu \Gamma^\Sigma, \dots).$$

При этом функционалы F_{n+1}^a также оказываются локальными¹⁾:

$$F_{n+1}^a = \int dx f_{n+1}^a(\Gamma^\Sigma, \partial_\mu \Gamma^\Sigma, \dots).$$

¹⁾ Функции s_k и f_{n+1}^a определены неоднозначно с точностью до полной дивергенции. Для нас важно лишь, что такие функции существуют.

Действие операторов W^a на произвольный локальный функционал может быть представлено следующим образом:

$$\begin{aligned}
 W^a Z &= \int dx w^a z(\Gamma^\Sigma, \partial_\mu \Gamma^\Sigma, \dots), \\
 w^a &= \sum_{k=0} (-1)^{\varepsilon_i} D_{\mu_1 \dots \mu_k} L_i \frac{\partial}{\partial(\partial_{\mu_1 \dots \mu_k} \varphi_{ia}^*)} - \\
 &\quad - \sum_{k=0} (-1)^{\varepsilon_\alpha} D_{\mu_1 \dots \mu_k} (R_\alpha^i \varphi_{ib}^*) \frac{\partial}{\partial(\partial_{\mu_1 \dots \mu_k} C_{\alpha b|a}^*)} + \\
 &\quad + \sum_{k=0} D_{\mu_1 \dots \mu_k} ((-1)^{\varepsilon_i} R_\alpha^i \bar{\varphi}_i + \varepsilon^{cb} C_{\alpha b|c}^*) \frac{\partial}{\partial(\partial_{\mu_1 \dots \mu_k} B_{\alpha a}^*)} - \\
 &\quad - (-1)^{\varepsilon_\alpha} \varepsilon^{ab} \sum_{k=0} \partial_{\mu_1 \dots \mu_k} B^\alpha \frac{\partial}{\partial(\partial_{\mu_1 \dots \mu_k} C^{\alpha b})} + \varepsilon^{ab} \sum_{k=0} \partial_{\mu_1 \dots \mu_k} \varphi_{ib}^* \frac{\partial}{\partial(\partial_{\mu_1 \dots \mu_k} \bar{\varphi}_i)} + \\
 &\quad + \varepsilon^{ab} \sum_{k=0} \partial_{\mu_1 \dots \mu_k} B_{\alpha b}^* \frac{\partial}{\partial(\partial_{\mu_1 \dots \mu_k} \bar{B}_\alpha)} + \varepsilon^{ab} \sum_{k=0} \partial_{\mu_1 \dots \mu_k} C_{\alpha c|b}^* \frac{\partial}{\partial(\partial_{\mu_1 \dots \mu_k} \bar{C}_{\alpha c})}, \\
 D_\mu &\equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} + \sum_{k=0} \partial_{\mu_1 \dots \mu_k} \Gamma^\Sigma \frac{\partial}{\partial(\partial_{\mu_1 \dots \mu_k} \Gamma^\Sigma)}, \tag{5}
 \end{aligned}$$

все величины в (5) взяты в точке x . Отметим, что операторы w^a и D_μ коммутируют друг с другом:

$$w^a w^b + w^b w^a = [D_\mu, w^a] = [D_\mu, D_\nu] = 0.$$

Поскольку функция, интеграл от которой равен нулю, должна быть дивергенцией некоторого тока, уравнение (3) можно переписать в виде

$$w^a f_{n+1}^b + w^b f_{n+1}^a = D_\mu j_{n+1}^{a b}, \tag{6}$$

где $j_{n+1}^{a b} = j_{n+1}^{a b}(\Gamma^\Sigma, \partial_\mu \Gamma^\Sigma, \dots)$ – набор некоторых функций Γ^Σ и их производных конечного порядка. Для решения уравнений типа (6) оказывается полезным введение операторов γ_a , которые должны содержать производные типа $\partial/\partial L_i$, $\partial/\partial(R_\alpha^i \varphi_{ia}^*)$. Чтобы ввести такие операторы, мы сделаем следующие стандартные предположения о структуре действия $\mathcal{S}$ и генераторов R_α^i , которые будем называть предположениями о регулярности теории.

1. Генераторы калибровочных преобразований являются ЛДОКП:

$$R_\alpha^i = r_\alpha^i + r_\alpha^{i\mu} \partial_\mu + \dots + r_\alpha^{i\mu_1 \mu_2 \dots \mu_t} \partial_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_t}, \tag{7}$$

$r_\alpha^{i\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k}$, $k = 0, \dots, t$, – функции классических полей и их производных конечного порядка, $\varepsilon(R_\alpha^i) = \varepsilon(r_\alpha^{i\mu_1 \mu_2 \dots \mu_t}) = \varepsilon_i + \varepsilon_\alpha$.

2. Генераторы образуют неприводимый полный набор в том смысле, что любой набор ЛДОКП Λ^i , удовлетворяющий уравнению

$$\Lambda^i L_i = 0,$$

имеет вид

$$\Lambda^i = m^\alpha R_\alpha^i + \widehat{M}^{ij} L_j, \quad \widehat{M}^{ij} A_j = \sum_{k,l} m^{i\mu_1 \dots \mu_k | j\nu_1 \dots \nu_l} \partial_{\nu_1 \dots \nu_l} A_j \partial_{\mu_1 \dots \mu_k},$$

$$m^{i\mu_1 \dots \mu_k | j\nu_1 \dots \nu_l} = -(-1)^{\varepsilon_i \varepsilon_j} m^{j\nu_1 \dots \nu_l | i\mu_1 \dots \mu_k},$$

где m^α – некоторые ЛДОКП, $m^{i\mu_1 \dots \mu_k | j\nu_1 \dots \nu_l}$ – функции Γ^Σ и их производных конечного порядка, и, кроме того, уравнения $R_\alpha^{Ti} n^\alpha = 0$ имеют единственное решение $n^\alpha = 0$.

3. Рассмотрим линейное пространство $J_l(\varphi)$ (джет-пространство) с координатами $\varphi_l \equiv (\varphi^i, \partial_\mu \varphi^i, \partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_l} \varphi^i)$. Пусть набор функций $L_Q \equiv (L_i, D_\mu L_i, \dots, D_{\mu_1 \dots \mu_{s_l}} L_i)$, $Q = (i, i\nu_1, \dots, i\nu_1 \dots \nu_{s_l})$, таков, что порядок старшей производной полей φ^i в наборе этих функций равен l . Среди функций L_Q имеются связи²⁾

$$R_\alpha^i L_i = 0, \quad D_\mu (R_\alpha^i L_i) = 0, \quad \dots, \quad D_{\mu_1 \dots \mu_{s_l}} (R_\alpha^i L_i) = 0, \quad (8)$$

где s_l выбрано из условия³⁾, чтобы порядок старшей производной полей φ^i равнялся l . Перепишем набор связей в виде

$$\tilde{R}_D^Q L_Q = \tilde{R}_D^I L_I + \tilde{R}_D^{D'} L_{D'} = 0,$$

где $D = (\alpha, \alpha\nu_1, \dots, \alpha\nu_1 \dots \nu_{s_l})$, $\tilde{R}_D^I$ и $\tilde{R}_D^{D'}$ – матрицы, зависящие от φ_l . Мы предполагаем, что при любом l набор функций L_Q можно разбить на наборы независимых функций L_I ($[L_I]$ означает число функций L_I)

$$\text{rank} \left(\frac{\partial L_I}{\partial \varphi_l} \right) \Big|_{L_Q=0} = [L_I]$$

и зависимых функций $L_{D'}$, причем $\tilde{R}_D^{D'}$ – квадратная неособенная матрица.

В разделах 3 и 4 будет показано, что при этих предположениях $Sp(2)$ -мастер-уравнение имеет локальные решения.

3. СУЩЕСТВОВАНИЕ ЛОКАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Прямой подстановкой выражения S_1 в $Sp(2)$ -мастер-уравнение можно проверить, что

$$S_1 = \int dx (C^{\alpha a} R_\alpha^i \varphi_{ia}^* + \varepsilon^{ab} C_{\alpha b}^* B^\alpha + B^\alpha R_\alpha^i \bar{\varphi}_i (-1)^{\varepsilon_i + \varepsilon_\alpha}) \quad (9)$$

является решением уравнения в первом порядке по $C^{\alpha b}$, B^α . Именно при таком выборе приближения первого порядка и с учетом сохранения ngh высшие приближения будут

²⁾ В (8) R_α^i дается выражением (7), в котором сделана подстановка $\partial_\mu \rightarrow D_\mu$.

³⁾ Вообще говоря, показатель s_l может зависеть от i , а t – от α . В настоящей работе мы опускаем эти непринципиальные технические тонкости.

удовлетворять уравнению (2), условием совместности которого является уравнение (3) или эквивалентно (6). Выясним структуру общего решения уравнения (6). Все функции s_k , $k \leq n$, содержат производные Γ^Σ конечного порядка. Потому и функции f_{n+1}^a также содержат производные Γ^Σ конечного порядка. Выберем джет-пространство $J_{(l)}(\Gamma^\Sigma) = J_l(\varphi) \otimes J_{l_C}(C) \otimes \dots$, $l_{\varphi_a^*} = l_{\bar{\varphi}} = \sigma_l$, $l_{B_a^*} = l_{C_{b|a}^*} = l_{\bar{B}} = l_{\bar{C}_a} = s_l$, $l_{C^a} = l_B$ таким образом, чтобы функции f_{n+1}^a , $w^a f_{n+1}^b$, $D_\mu j^{\mu ab}$ были бы в нем определены. Заметим, что если ограничиться рассмотрением действия операторов w^a и D_μ только на функции, определенные на $J_{(l)}(\Gamma^\Sigma)$, то все суммы, входящие в выражения (5) и (6) для операторов w^a и D_μ , можно считать конечными. Джет-пространство определено неоднозначно: если набор (l) является допустимым, то и любой набор (l') , $l' \geq l$, $l'_C \geq l_C, \dots$, также является допустимым.

Операторы w^a , действующие в $J_{(l)}(\Gamma^\Sigma)$, имеют вид

$$\begin{aligned} w^a = & (-1)^{\varepsilon_I} L_I \frac{\partial}{\partial \varphi_{Ia}^*} + (-1)^{\varepsilon_{D'}} L_{D'} \frac{\partial}{\partial \varphi_{D'a}^*} - (-1)^{\varepsilon_D} \tilde{R}_D^Q \varphi_{Qb}^* \frac{\partial}{\partial C_{D|a}^*} + \\ & + ((-1)^{\varepsilon_Q} \tilde{R}_D^Q \bar{\varphi}_Q + \varepsilon^{bc} C_{Dc|b}^*) \frac{\partial}{\partial B_{Da}^*} - \\ & - (-1)^{\varepsilon_\alpha} \varepsilon^{ab} \sum_{k=0} \partial_{\mu_1 \dots \mu_k} B^\alpha \frac{\partial}{\partial (\partial_{\mu_1 \dots \mu_k} C^{\alpha b})} + \varepsilon^{ab} \varphi_{Qb}^* \frac{\partial}{\partial \bar{\varphi}_Q} + \\ & + \varepsilon^{ab} B_{D^b}^* \frac{\partial}{\partial \bar{B}_D} + \varepsilon^{ab} C_{Dc|b}^* \frac{\partial}{\partial \bar{C}_{Dc}}. \end{aligned}$$

Сделаем замену переменных:

$$\begin{aligned} (\varphi_{Ia}^*, \varphi_{D'a}^*) & \rightarrow (\varphi_{Ia}^*, \varphi_{Da}^* = \tilde{R}_D^Q \varphi_{Qa}^*), \\ (\bar{\varphi}_I, \bar{\varphi}_{D'}) & \rightarrow (\bar{\varphi}_I, \bar{\varphi}'_D = (-1)^{\varepsilon_Q} \tilde{R}_D^Q \bar{\varphi}_Q + \varepsilon^{bc} C_{Dc|b}^*). \end{aligned}$$

Остальные переменные преобразуются тождественно. Операторы w^a в новых переменных имеют вид (штрихи опускаются)

$$\begin{aligned} w^a = & (-1)^{\varepsilon_I} L_I \frac{\partial}{\partial \varphi_{Ia}^*} + \varepsilon^{ab} \varphi_{Ib}^* \frac{\partial}{\partial \bar{\varphi}_I} - (-1)^{\varepsilon_D} \varphi_{Db}^* \frac{\partial}{\partial C_{D|a}^*} + \varepsilon^{ab} C_{Dc|b}^* \frac{\partial}{\partial \bar{C}_{Dc}} + \\ & + \bar{\varphi}_D \frac{\partial}{\partial B_{Da}^*} + \varepsilon^{ab} B_{D^b}^* \frac{\partial}{\partial \bar{B}_D} - (-1)^{\varepsilon_\alpha} \varepsilon^{ab} \sum_{k=0} \partial_{\mu_1 \dots \mu_k} B^\alpha \frac{\partial}{\partial (\partial_{\mu_1 \dots \mu_k} C^{\alpha b})}. \end{aligned}$$

Введем операторы

$$\begin{aligned} \gamma_a = & (-1)^{\varepsilon_I} \varphi_{Ia}^* \frac{\partial}{\partial L_I} - \varepsilon_{ab} \bar{\varphi}_I \frac{\partial}{\partial \varphi_{Ib}^*} - (-1)^{\varepsilon_D} C_{D|a}^* \frac{\partial}{\partial \varphi_{Db}^*} - \\ & - \varepsilon_{ab} \bar{C}_{Dc} \frac{\partial}{\partial C_{Dc|b}^*} + B_{Da}^* \frac{\partial}{\partial \bar{\varphi}_D} - \varepsilon_{ab} \bar{B}_D \frac{\partial}{\partial B_{D^b}^*}. \end{aligned}$$

Элементарные вычисления приводят к следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} \gamma_a \gamma_b + \gamma_b \gamma_a = 0, \quad w^a \gamma_b + \gamma_b w^a = \delta_b^a N, \quad w^a N = N w^a, \quad \gamma_a N = N \gamma_a, \\ N = L_I \frac{\partial}{\partial L_I} + \varphi_{Qb}^* \frac{\partial}{\partial \varphi_{Qb}^*} + \bar{\varphi}_Q \frac{\partial}{\partial \bar{\varphi}_Q} + B_{Db}^* \frac{\partial}{\partial B_{Db}^*} + \\ + C_{Db|a}^* \frac{\partial}{\partial C_{Db|a}^*} + \bar{B}_D \frac{\partial}{\partial \bar{B}_D} + \bar{C}_{Dc} \frac{\partial}{\partial \bar{C}_{Dc}}. \end{aligned}$$

Представим D_λ в виде $D_\lambda = \bar{D}_\lambda + \tilde{D}_\lambda$, где

$$\bar{D}_\lambda = \sum_{k=1} \partial_{\mu_1 \dots \mu_k} C^{\alpha a} \frac{\partial}{\partial (\partial_{\mu_1 \dots \mu_{k-1}} C^{\alpha a})} + \sum_{k=1} \partial_{\mu_1 \dots \mu_k} B^\alpha \frac{\partial}{\partial (\partial_{\mu_1 \dots \mu_{k-1}} B^\alpha)}$$

и имеют место соотношения

$$[w^a, \bar{D}_\lambda] = [\gamma_a, \bar{D}_\lambda] = [N, \bar{D}_\lambda] = 0, \quad [w^a, D_\lambda] = [N, D_\lambda] = 0, \quad [\gamma_a, D_\lambda] \neq 0.$$

Вернемся к уравнению (6). Решать его будем методом, использованным в [16] при решении аналогичного уравнения в стандартном формализме БВ. Разложим f_{n+1}^a и $j_{n+1}^{\mu ab}$ в ряд по суммарной степени производных полей $C^{\alpha a}$ и B^α :

$$\begin{aligned} f_{n+1}^a = \sum_{k=0}^p f_{n+1}^{(k)a}, \quad j_{n+1}^{\lambda ab} = \sum_{k=0}^m j_{n+1}^{(k)\lambda ab}, \quad D f_{n+1}^{(k)a} = k f_{n+1}^{(k)a}, \quad D j_{n+1}^{(k)\lambda ab} = k j_{n+1}^{(k)\lambda ab}, \\ D = \sum_{k=0} k \partial_{\mu_1 \dots \mu_k} C^{\alpha a} \frac{\partial}{\partial (\partial_{\mu_1 \dots \mu_k} C^{\alpha a})} + \sum_{k=0} k \partial_{\mu_1 \dots \mu_k} B^\alpha \frac{\partial}{\partial (\partial_{\mu_1 \dots \mu_k} B^\alpha)}, \end{aligned}$$

где p и m – некоторые конечные числа. Легко показать [16], что m можно считать равным $p - 1$. Из (6) следует

$$w^a f_{n+1}^{(p)b} + w^b f_{n+1}^{(p)a} = \bar{D}_\lambda j_{n+1}^{(p-1)\lambda ab}. \quad (10)$$

В приложении 1 показано, что из (10) вытекает следующее соотношение для $f_{n+1}^{(p)a}$:

$$\begin{aligned} N^2 f_{n+1}^{(p)a} &= w^a y_{n+1}^{(p)} + \bar{D}_\lambda j_{n+1}^{(p-1)\lambda a}, \\ y_{n+1}^{(p)} &= \left(\frac{3}{2} N - \frac{1}{2} \gamma_c w^c \right) \gamma_b f_{n+1}^{(p)b}, \\ j_{n+1}^{(p-1)\lambda a} &= \left(\frac{2}{3} N - \frac{1}{6} \gamma_c w^c \right) \gamma_b j_{n+1}^{(p-1)\lambda ab}. \end{aligned} \quad (11)$$

Поскольку $\text{ngh}(f_{n+1}^{(p)a}) = 1$, $f_{n+1}^{(p)a} = O(C^l B^{n+1-l})$, $n \geq 1$, функции $f_{n+1}^{(p)a}$ обязательно содержат антиполе Φ_a^* или $\bar{\Phi}$. Поэтому соотношение (11) можно разделить на N^2 , получив в результате

$$f_{n+1}^{(p)a} = w^a \left(\frac{1}{N^2} y_{n+1}^{(p)} \right) + \bar{D}_\lambda \left(\frac{1}{N^2} j_{n+1}^{(p-1)\lambda a} \right).$$

Представим функции f_{n+1}^a в виде

$$f_{n+1}^a = w^a \left(\frac{1}{N^2} y_{n+1}^{(p)} \right) + D_\lambda \left(\frac{1}{N^2} j_{n+1}^{(p-1)\lambda a} \right) + f_{n+1}^{[p-1]a}.$$

Очевидно, что $f_{n+1}^{[p-1]a}$ также удовлетворяют уравнению (6), а старшая суммарная степень производных полей $C^{\alpha a}$ и B^α равна $p-1$. Продолжая этот процесс и учитывая, что $f_{n+1}^a = 0$ при $C^{\alpha a} = B^\alpha = 0$, получаем окончательно

$$f_{n+1}^a = w^a y_{n+1} + D_\lambda j_{n+1}^{\lambda a}, \quad F_{n+1}^a = W^a \int dx y_{n+1} \equiv W^a Y_{n+1}$$

с некоторыми функциями y_{n+1} и $j_{n+1}^{\lambda a}$. В приложении 2 показано, что функцию y_{n+1} можно выбрать $Sp(2)$ -скаляром и (при некоторых дополнительных предположениях) лоренцевским скаляром. Выбирая $S_{n+1} = Y_{n+1}$, мы получаем, что мастер-уравнение удовлетворяется в $n+1$ приближениях. Таким образом, существование локального решения $Sp(2)$ -мастер-уравнения, сохраняющего $Sp(2)$ -симметрию, доказано.

4. ПРОИЗВОЛ В РЕШЕНИИ $Sp(2)$ -МАСТЕР-УРАВНЕНИЯ

Предварительно введем класс операторов, которые мы будем называть калибровочными преобразованиями:

$$K = \exp \left\{ \frac{i\hbar}{2} : \varepsilon_{ab} [\bar{\Delta}^b, [\bar{\Delta}^a, F]]_+ : \right\}, \quad (12)$$

где

$$F = \sum_{n=0} \hbar^n F_n, \quad F_n = \int dx F_n^{\Sigma_1 \dots \Sigma_n} \frac{\delta}{\delta \Gamma^{\Sigma_1}} \dots \frac{\delta}{\delta \Gamma^{\Sigma_n}},$$

$F_n^{\Sigma_1 \dots \Sigma_n}$ — функции переменных Γ^Σ и их производных конечного порядка,

$$\bar{\Delta}^a = \int dx (-1)^{\varepsilon_A} \frac{\delta}{\delta \Phi^A} \frac{\delta}{\delta \Phi_{Aa}^*} + \int dx \frac{i}{\hbar} \varepsilon^{ab} \Phi_{Ab}^* \frac{\delta}{\delta \bar{\Phi}_A},$$

символ $: \dots :$ означает, что две производные из одного локального дифференциального оператора не могут действовать на один и тот же локальный функционал (по-другому можно сказать, что все величины типа $\delta(0)$ полагаются равными нулю)⁴⁾.

Калибровочные преобразования обладают следующими свойствами:

1. Произведение нескольких операторов калибровочных преобразований снова есть некоторое калибровочное преобразование.

⁴⁾Строгое определение операторов типа (12) и описание их свойств, в частности перечисленных в этом разделе, будут даны в отдельной работе.

2. Пусть по заданному функционалу $S(\Gamma^\Sigma)$ построен функционал $S'(\Gamma^\Sigma)$ по правилу

$$\exp \left[\frac{i}{\hbar} S' \right] = K \exp \left[\frac{i}{\hbar} S \right], \quad (13)$$

тогда если S – локальный функционал, то S' – также локальный функционал; если S – локальный функционал и не зависит от $\hbar$, то этим свойством обладает и S' ; если S удовлетворяет $Sp(2)$ -мастер-уравнению, то и S' удовлетворяет $Sp(2)$ -мастер-уравнению. Будем называть два функционала S и S' калибровочно-эквивалентными, если они связаны соотношением (13). В [3] показано, что действие калибровочного преобразования на эффективное действие не меняет физического содержания теории.

Перейдем к описанию общего решения $Sp(2)$ -мастер-уравнения в первом порядке по $C^{\alpha a}$, B^α . Общий вид локального функционала первого порядка по $C^{\alpha a}$, B^α , сохраняющего gh и являющегося $Sp(2)$ -скаляром, есть

$$S_1 = \int dx \left(C^{\alpha a} \Lambda_\alpha^i \varphi_{ia}^* + \varepsilon^{ab} B^\beta \Lambda_\beta^\alpha C_{\alpha b|a}^* (-1)^{\varepsilon_\beta} + \right. \\ \left. + B^\alpha \bar{\Lambda}_\alpha^i \bar{\varphi}_i (-1)^{\varepsilon_i + \varepsilon_\alpha} + \frac{1}{2} \varepsilon^{ab} B^\alpha \hat{\Lambda}_\alpha^{ij} \varphi_{jb}^* \varphi_{ia}^* \right), \quad (14)$$

где Λ_α^i , Λ_α^β , $\bar{\Lambda}_\alpha^i$ – ЛДОКП,

$$\hat{\Lambda}_\alpha^{ij} A_j B_i = \sum_{k,l} \lambda_\alpha^{i\mu_1 \dots \mu_k | j\nu_1 \dots \nu_l} \partial_{\nu_1 \dots \nu_l} A_j \partial_{\mu_1 \dots \mu_k} B_i,$$

$\lambda_\alpha^{i\mu_1 \dots \mu_k | j\nu_1 \dots \nu_l}$ – функции, зависящие от φ^i и их производных конечного порядка. Совершим калибровочное преобразование над S с

$$F = \frac{1}{2} (-1)^{\varepsilon_j} B^\alpha \hat{\Lambda}_\alpha^{ij} \bar{\varphi}_j \bar{\varphi}_i.$$

Это преобразование сокращает слагаемое

$$\frac{1}{2} \varepsilon^{ab} B^\alpha \hat{\Lambda}_\alpha^{ij} \varphi_{jb}^* \varphi_{ia}^*$$

в S_1 , так что можно считать $\hat{\Lambda}_\alpha^{ij} = 0^5$).

Подстановка выражения (14) в $Sp(2)$ -мастер-уравнение дает

$$\Lambda_\alpha^i L_i = 0, \quad \bar{\Lambda}_\alpha^i = \Lambda_\alpha^\beta \Lambda_\beta^i.$$

⁵⁾ В [3] было постулировано, что $\hat{\Lambda}_\alpha^{ij} = 0$. Фактически мы видим, что его можно обратить в нуль калибровочным преобразованием.

Согласно предположениям о регулярности теории имеем

$$\Lambda_\alpha^i = m_\alpha^\beta R_\beta^i + \widehat{M}_\alpha^{ij} L_j, \quad \widehat{M}_\alpha^{ij} A_j = \sum_{k,l} m_\alpha^{i\mu_1 \dots \mu_k | j\nu_1 \dots \nu_l} \partial_{\nu_1 \dots \nu_l} A_j \partial_{\mu_1 \dots \mu_k},$$

$$m_\alpha^{i\mu_1 \dots \mu_k | j\nu_1 \dots \nu_l} = -(-1)^{\varepsilon_i \varepsilon_j} m_\alpha^{j\nu_1 \dots \nu_l | i\mu_1 \dots \mu_k},$$

где m_α^β – ЛДОКП. Слагаемое $C^{\alpha a} \widehat{M}_\alpha^{ij} L_j \varphi_{ia}^*$ может быть компенсировано калибровочным преобразованием с $F = (1/2) C^{\alpha a} \widehat{M}_\alpha^{ij} \varphi_{ja}^* \varphi_i$. Для уточнения структуры m_α^β заметим следующее. При $\Phi_{A2}^* = \bar{\Phi}_A = 0$ действие S является решением мастер-уравнения. Мы потребуем, чтобы это решение было собственным. Это означает, что уравнения

$$m_\beta^{T\alpha} C^{\beta a} = 0, \quad \Lambda_\beta^{T\alpha} B^\beta = 0$$

имеют только тривиальные решения. В свою очередь, это означает, что существует ЛДОКП $m_\alpha^{-1\beta}$, $\Lambda_\alpha^{-1\beta}$. Делая замену переменных

$$C'^{\alpha a} = (-1)^{\varepsilon_\alpha + \varepsilon_\beta} m_\beta^{T\alpha} C^{\beta a}, \quad C'_{\alpha b|a}^* = m_\alpha^{-1\beta} C_{\beta b|a}^*, \quad \bar{C}'_{\alpha a} = m_\alpha^{-1\beta} \bar{C}_{\beta a},$$

$$B'^\alpha = m_\beta^{T\alpha} \Lambda_\gamma^{T\beta} B^\gamma (-1)^{\varepsilon_\gamma + \varepsilon_\alpha}, \quad B'_{\alpha a}^* = \Lambda_\alpha^{-1\beta} m_\beta^{-1\gamma} B_{\gamma a}^*, \quad \bar{B}'_\alpha = \Lambda_\alpha^{-1\beta} m_\beta^{-1\gamma} \bar{B}_\gamma$$

(которая сохраняет $Sp(2)$ -мастер-уравнение и может быть реализована как калибровочное преобразование), мы преобразуем S_1 к виду (9).

Пусть мы имеем два решения S и S' $Sp(2)$ -мастер-уравнения (1) с одним и тем же начальным условием $\mathcal{S}(\varphi)$. Предположим, мы установили, что в n -м приближении они калибровочно-эквивалентны (это предположение справедливо в нулевом и первом порядках). Выполняя калибровочное преобразование над действием S' , можем считать, что

$$S_{[n]} = S'_{[n]}, \quad S'_{n+1} = S_{n+1} + \Delta S_{n+1}$$

и S_1 дается формулой (9). Тогда ΔS_{n+1} удовлетворяет уравнению $W^a \Delta S_{n+1} = 0$ или $w^a \Delta s_{n+1} = D_\mu j_{n+1}^\mu$. С помощью метода, использованного при решении уравнения (6), и результатов приложения 1 получаем

$$\Delta S_{n+1} = W^2 W^1 X_{n+1}.$$

Добавка ΔS_{n+1} может быть получена применением калибровочного преобразования к действию S с $F = X_{n+1}$. Применяя метод индукции, получаем окончательно следующий вывод:

общее локальное собственное решение $Sp(2)$ -мастер-уравнения, сохраняющего $Sp(2)$ -симметрию и $\mathfrak{gh}$, может быть представлено в виде

$$\exp\left(\frac{i}{\hbar} S\right) = \exp\left\{\frac{i\hbar}{2} : \varepsilon_{ab} [\bar{\Delta}^b, [\bar{\Delta}^a, X]]_+ : \right\} \exp\left(\frac{i}{\hbar} S_c\right),$$

где S_c – какое-либо фиксированное частное решение.

Ш. С. Ш. благодарит за финансовую поддержку Российский фонд фундаментальных исследований и Комиссию европейского сообщества, контракты N 96–02–17314, INTAS–96–0308. И. В. Т. благодарит за поддержку Российский фонд фундаментальных исследований и Комиссию европейского сообщества, контракты № 96–01–00482, РФФИ–INTAS–95829.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Здесь выводится соотношение (11). Пусть операторы w^a, γ_a, N и d образуют алгебру

$$\begin{aligned} w^a w^b + w^b w^a &= 0, & \gamma_a \gamma_b + \gamma_b \gamma_a &= 0, \\ w^a \gamma_b + \gamma_b w^a &= \delta_b^a N, & [w^a, d] &= [\gamma_a, d] = 0. \end{aligned}$$

Вначале рассмотрим уравнение

$$w^a f = dj^a.$$

Используя введенные выше перестановочные соотношения, получаем

$$\begin{aligned} N^2 f &= N(w^2 \gamma_1 f + d \gamma_1 j^2) = dN \gamma_2 j^2 + w^2 w^1 \gamma_1 \gamma_2 f + dw^2 \gamma_2 \gamma_1 j^1 = \\ &= w^2 w^1 \gamma_1 \gamma_2 f + d \left(\frac{1}{2} (N + \gamma_a w^a) \gamma_b j^b \right) \end{aligned}$$

или

$$N^2 f = w^2 w^1 y + dj.$$

Рассмотрим далее уравнение

$$\sum_{i=1}^{l+1} w^{a_i} f^{a_1 \dots \hat{a}_i \dots a_{l+1}} = dj^{a_1 \dots a_{l+1}} \quad (15)$$

для функции $f^{a_1 \dots a_l}$, полностью симметричной по индексам a_i . Умножая его на $w^b \varepsilon_{ba_{l+1}}$, получаем

$$(l+2)w^2 w^1 f^{a_1 \dots a_l} = dw^c \varepsilon_{cb} j^{a_1 \dots a_l b}. \quad (16)$$

Умножим (15) на $\gamma_{a_{l+1}}$:

$$\gamma_b w^b f^{a_1 \dots a_l} + lN f^{a_1 \dots a_l} - \sum_{i=1}^l w^{a_i} (\gamma_b f^{a_1 \dots \hat{a}_i \dots a_l b}) = d(\gamma_b j^{a_1 \dots a_l b}). \quad (17)$$

Уравнение (17) умножим на $\gamma_c w^c$ и воспользуемся соотношениями

$$\gamma_c w^c \gamma_b w^b = N \gamma_b w^b + 2\gamma_1 \gamma_2 w^2 w^1, \quad \gamma_c w^c w^a = w^a (\gamma_c w^c - N).$$

Получаем

$$(l+1)N\gamma_c w^c f^{a_1 \dots a_l} = \sum_{i=1}^l w^{a_i} [(\gamma_c w^c - N)\gamma_b f^{a_1 \dots \hat{a}_i \dots a_l b}] + \\ + d \left[\left(\frac{l}{l+2} \gamma_c w^c + \frac{2}{l+2} N \right) \gamma_b j^{a_1 \dots a_l b} \right], \quad (18)$$

где использовано равенство $\gamma_1 \gamma_2 w^b \varepsilon_{bc} = (\gamma_b w^b - N)\gamma_c$. Подставляя (18) в (17), находим окончательно

$$l(l+1)N^2 f^{a_1 \dots a_l} = \sum_{i=1}^l w^{a_i} [((l+2)N - \gamma_c w^c) \gamma_b f^{a_1 \dots \hat{a}_i \dots a_l b}] + \\ + d \left[\left(\frac{l(l+3)}{l+2} N - \frac{l}{l+2} \gamma_c w^c \right) \gamma_b j^{a_1 \dots a_l b} \right] \quad (19)$$

или

$$N^2 f^{a_1 \dots a_l} = \sum_{i=1}^l w^{a_i} y^{a_1 \dots \hat{a}_i \dots a_l} + d j^{a_1 \dots a_l}.$$

Соотношение (11) получается из (19) при $l = 1$, $d \rightarrow \bar{D}_\mu$, $j^a \rightarrow j^{a\mu}$.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Покажем, что функционалы Y_n можно выбрать $Sp(2)$ -скалярами и (при некоторых дополнительных предположениях) лоренцевскими скалярами. В своих рассуждениях мы близко следуем книге [12].

Пусть T^σ – генераторы преобразований полей Γ^Σ , образующие полупростую алгебру $\mathfrak{g}$. Пусть действие генераторов T^σ на любой локальный функционал $A = \int dx a$ может быть представлено в виде

$$T^\sigma A = \int dx t^\sigma a, \quad (20)$$

$$t^\sigma = \sum_{k=0} t_{(k)\Sigma}^{\sigma \mu_1 \dots \mu_k \Sigma'} \partial_{\nu_1 \dots \nu_k} \Gamma^\Sigma \frac{\partial}{\partial (\partial_{\nu_1 \dots \nu_k} \Gamma^{\Sigma'})}, \quad (21)$$

где $t_{(k)\Sigma}^{\sigma \mu_1 \dots \mu_k \Sigma'}$ – постоянные матрицы, причем t^σ образуют ту же алгебру $\mathfrak{g}$ и обладают свойствами

$$[t^\sigma, w^a] = \tau_b^{\sigma a} w^b, \quad [t^\sigma, w^2 w^1] = 0, \quad [t^\sigma, D_\mu] = a_\mu^{\sigma \nu} D_\nu, \quad (22)$$

где $\tau_b^{\sigma a}$ и $a_\mu^{\sigma \nu}$ – постоянные матрицы. Рассмотрим функционал

$$F^a = W^a Y, \quad \text{где} \quad Y = \int dx y, \quad (23)$$

который удовлетворяет условию

$$T^\sigma F^a = \tau_b^{\sigma a} F^b. \quad (24)$$

Из (24) вытекает

$$w^a t^\sigma y = D_\mu j^{\mu a \sigma}$$

с некоторыми функциями $j^{\mu a \sigma}$.

Предположим, что на функциях $t^\sigma y$ существует оператор N^{-1} . Тогда из результатов приложения 1 следует

$$t^\sigma y = w^2 w^1 z^\sigma + D_\mu j^{\mu \sigma}. \quad (25)$$

Каждое подпространство однородных полиномов фиксированной степени по переменным Γ^Σ и их производных конечного порядка образует пространство представления алгебры генераторов t^σ , которое является конечномерным и поэтому вполне приводимым. Разложим y по неприводимым представлениям

$$y = y_0 + \sum_{R \neq 0} y_R,$$

где y_0 означает тривиальное представление. Соотношение (25) переписывается в виде

$$\sum_{R \neq 0} t^\sigma y_R = w^2 w^1 z^\sigma + D_\mu j^{\mu \sigma}. \quad (26)$$

Стандартные рассуждения показывают, что из (26) следует

$$y_R = w^2 w^1 z_R + D_\mu j_R^\mu$$

с некоторыми функциями z_R и j_R^μ . Окончательно получаем

$$y = y_0 + w^2 w^1 z + D_\mu j^\mu$$

с некоторыми функциями z и j^μ .

Возвращаясь к функционалам F^a , мы видим, что в качестве Y можно взять $Y_0 = \int dx y_0$. В общем случае Y инвариантен с точностью до калибровочного преобразования.

Очевидно, что генераторы $Sp(2)$ -преобразований удовлетворяют условиям (20)–(22).

Обсудим теперь вопрос о лоренц-инвариантности функционала Y . Генераторы преобразований Лоренца имеют вид

$$M_{\mu\nu} = \int dx \left((x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu) \Gamma^\Sigma \frac{\delta}{\delta \Gamma^\Sigma} + M_{\Sigma\mu\nu}^\Sigma \Gamma^\Sigma \frac{\delta}{\delta \Gamma^\Sigma} \right),$$

где матрицы $M_{\mu\nu}^{i'}$ преобразования Лоренца исходных полей φ^i считаются заданными, а элементы матриц для остальных полей будут определены ниже.

Предположим, что классическое действие $\mathcal{S}(\varphi)$ явно не зависит от x . Тогда и все функции s_k , f_n^a можно выбрать не зависящими от x (см. раздел 2). При действии на такие функции операторы $M_{\mu\nu}$ можно представить в виде

$$M_{\mu\nu}A = \int dx m_{\mu\nu}a,$$

$$m_{\mu\nu} = \sum_{k=0} M_{(k)\Sigma}^{\mu_1 \dots \mu_k \Sigma'} \partial_{\nu_1 \dots \nu_k | \mu\nu} \Gamma^\Sigma \frac{\partial}{\partial(\partial_{\nu_1 \dots \nu_k} \Gamma^{\Sigma'})},$$

где

$$M_{(k)\Sigma}^{\mu_1 \dots \mu_k \Sigma'} \partial_{\nu_1 \dots \nu_k | \mu\nu} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k (\lambda_{\nu_k}^{\mu_i} + M_{(k-1)\Sigma}^{\mu_1 \dots \mu_{i-1} \mu_{i+1} \dots \mu_k \Sigma'} \partial_{\nu_1 \dots \nu_k | \mu\nu}), \quad k \geq 1,$$

$$\lambda_{\beta|\mu\nu}^\alpha = \eta_{\mu\beta} \delta_\nu^\alpha - \eta_{\nu\beta} \delta_\mu^\alpha, \quad M_{(0)\Sigma|\mu\nu}^{\Sigma'} = M_{\Sigma\mu\nu}^{\Sigma'}, \quad m_{\mu\nu} \varphi^i = M_{i'\mu\nu}^i \varphi^{i'}.$$

При действии на функции, явно не зависящие от x , имеем

$$D_\mu = \sum_{k=0} \partial_{\mu\mu_1 \dots \mu_k} \Gamma^\Sigma \frac{\partial}{\partial(\partial_{\mu_1 \dots \mu_k} \Gamma^\Sigma)},$$

так что выполняется коммутационное соотношение $[m_{\mu\nu}, D_\lambda] = \lambda_{\lambda|\mu\nu}^\sigma D_\sigma$. Из лоренц-инвариантности исходного классического действия следует $m_{\mu\nu} L_i = -M_{i'}^i L_{i'}$. Естественно определить

$$m_{\mu\nu} \varphi_{i'a}^* = -M_{i'\mu\nu}^{i'} \varphi_{i'a}^*, \quad m_{\mu\nu} \bar{\varphi}_i = -M_{i'\mu\nu}^{i'} \bar{\varphi}_{i'}.$$

Предположим, что базис генераторов калибровочных преобразований выбран лоренц-ковариантным способом, т.е. имеет место

$$m_{\mu\nu} R_\alpha^i = M_{i'\mu\nu}^i R_\alpha^{i'} - M_{\alpha\mu\nu}^{\alpha'} R_{\alpha'}^i,$$

где матрицы $M_{\alpha\mu\nu}^{\alpha'}$ являются генераторами некоторого конечномерного представления алгебры $o(3,1)$ (по этому представлению преобразуются параметры калибровочных преобразований). Будем считать, что поля $C^{\alpha b}$, B^α , $C_{\alpha b|a}^*$, $B_{\alpha a}^*$, $\bar{C}_{\alpha b}$, $\bar{B}_\alpha$ следующим образом преобразуются при преобразованиях Лоренца:

$$m_{\mu\nu}(C^{\alpha b}, B^\alpha) = M_{\alpha'\mu\nu}^\alpha (C^{\alpha' b}, B^{\alpha'}),$$

$$m_{\mu\nu}(C_{\alpha b|a}^*, B_{\alpha a}^*, \bar{C}_{\alpha b}, \bar{B}_\alpha) = -M_{\alpha'\mu\nu}^{\alpha'} (C_{\alpha' b|a}^*, B_{\alpha' a}^*, \bar{C}_{\alpha' b}, \bar{B}_{\alpha'})$$

(поля $C^{\alpha b}$ и B^α имеют те же лоренцевские трансформационные свойства, что и параметры калибровочных преобразований). Нетрудно проверить, что определенные таким образом операторы $m_{\mu\nu}$ (и $M_{\mu\nu}$) образуют алгебру $o(3,1)$ и имеет место соотношение

$$[w^a, m_{\mu\nu}] = 0.$$

Итак, генераторы $M_{\mu\nu}$ и $m_{\mu\nu}$ удовлетворяют условиям (20)–(22). Поэтому из результатов этого приложения вытекает, что функцию y в представлении (23) можно выбрать лоренцевским скаляром.

Список литературы

- [1] *G. Curci, R. Ferrari.* Phys. Lett. B. 1976. V. 63. P. 91.
- [2] *I. A. Batalin, P. M. Lavrov, I. V. Tyutin.* J. Math. Phys. 1990. V. 31. P. 6.
- [3] *I. A. Batalin, P. M. Lavrov, I. V. Tyutin.* J. Math. Phys. 1990. V. 31. P. 1487.
- [4] *I. A. Batalin, P. M. Lavrov, I. V. Tyutin.* J. Math. Phys. 1990. V. 31. P. 2708.
- [5] *I. A. Batalin, P. M. Lavrov, I. V. Tyutin.* Int. J. Mod. Phys. A. 1991. V. 6. P. 3599.
- [6] *I. A. Batalin, P. M. Lavrov, I. V. Tyutin.* J. Math. Phys. 1991. V. 32. P. 532.
- [7] *I. A. Batalin, P. M. Lavrov, I. V. Tyutin.* J. Math. Phys. 1991. V. 32. P. 2513.
- [8] *C. M. Hull.* Mod. Phys. Lett. A. 1990. V. 5. P. 1871.
- [9] *I. A. Batalin, R. Marnelius, A. M. Semikhatov.* Nucl. Phys. B. 1995. V. 446. P. 249.
- [10] *P. H. Damgaard, A. Nersessian.* Phys. Lett. B. 1995. V. 335. P. 150.
- [11] *И. В. Тютин, Ш. С. Шахвердиев.* ТМФ. 1997. Т. 110. С. 137.
- [12] *O. Piguet, S. P. Sorella.* Algebraic Renormalization. Heidelberg: Springer-Verlag, 1995.
- [13] *M. Henneaux, C. Teitelboim.* Quantization of Gauge Systems. Prinseton: Prinseton University Press, 1992.
- [14] *G. Barnich, F. Brandt, M. Henneaux.* Commun. Math. Phys. 1995. V. 174. P. 57.
- [15] *D. J. Saunders.* The Geometry of Jet Bundles. In: London Mathematical Society Lecture Note. Series 142. Cambridge: Cambridge University Press, 1989.
- [16] *M. Henneaux.* Commun. Math. Phys. 1991. V. 140. P. 1.

Поступила в редакцию 10.II.1998 г.