Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. А. де Монвель, М. В. Щербина, О свободной энергии в двумерной $U(n)$ -калибровочной теории поля на сфере, *ТМФ*, 1998, том 115, номер 3, 389–401

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf881>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.217.227

26 апреля 2023 г., 05:32:28

© 1998 г. А. Буте де Монвель*, М. В. Шербина†

О СВОБОДНОЙ ЭНЕРГИИ В ДВУМЕРНОЙ $U(n)$ -КАЛИБРОВОЧНОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ НА СФЕРЕ

Математически строго получена статистическая сумма в двумерной $U(n)$ -калибровочной теории поля в пределе $n \rightarrow \infty$. Полученные результаты и использованные методы стимулированы недавними исследованиями в теории случайных матриц в сочетании с традиционным аппаратом статистической механики.

1. ВВЕДЕНИЕ

Двумерная неабелева калибровочная теория поля (QCD_2) может служить полезным полигоном для изучения математической структуры физически аналогичных теорий в пространствах с подходящим числом измерений (струнные аспекты, фаза конфайнмента, поведение различных инвариантных величин и т.д.). Важным объектом в неабелевых теориях является статистическая сумма (а в более общем случае математическое ожидание вильсоновских петель) на двумерных поверхностях. Эта функция является ядром (или его следом) уравнения теплопроводности на многообразии калибровочной группы, как это и ожидается из идеологии функционального интегрирования. Во многих интересных случаях можно явно выписать эти функции в терминах неприводимых представлений калибровочной группы. Это обстоятельство вызвало к жизни многочисленные исследования QCD_2 и смежных сюжетов.

В [1] была проанализирована статистическая сумма, отвечающая $U(n)$ -калибровочной теории в (планарном) пределе больших n . Авторы привели аргументы в пользу того, что в этом пределе возникает фазовый переход третьего рода при изменении площади A . Поскольку константа связи входит в статистическую сумму только в комбинации $g^2 A$, фазовый переход можно интерпретировать как определенное изменение асимптотического поведения (при больших n) в режиме сильной связи по сравнению с (тривиальным) режимом слабой связи. За ссылками и обсуждением QCD -аспектов фазового перехода мы отсылаем читателя к работам [1–3].

В настоящей статье мы даем строгий вывод выражения для свободной энергии, найденного в [1]. Наш вывод базируется на традиционных идеях статистической механики.

* Лаборатория математической физики и геометрии Университета, Париж VII, Франция

† Институт физики низких температур, Харьков, Украина

Именно, мы используем эквивалентность канонического и большого канонического ансамблей, а также метод предельного среднего поля.

Статистическая сумма, найденная в [1], имеет вид суммы по всем неприводимым представлениям R группы $U(n)$:

$$Z(n, A) = \sum_R (\dim R)^2 \exp \left\{ -\frac{A}{2n} C_2(R) \right\}. \quad (1.1)$$

Здесь $\dim R$ – размерность представления R , $C_2(R)$ – собственное значение квадратичного оператора Казимира (лапласиана), а A – площадь сферы. Пользуясь стандартной параметризацией неприводимых представлений $U(n)$ посредством соответствующих весов, можем записать статистическую сумму (1.1) в следующем виде [1]:

$$Z(n, A) = \frac{1}{n!} e^{-\frac{A}{24}(n^2-1)} \times \sum_{h_1, \dots, h_n = -\infty}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{An}{2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{h_i}{n} \right)^2 \right\} \prod_{1 \leq i < j \leq n} (h_i - h_j)^2, \quad (1.2)$$

где суммирование идет по всем целым числам $h_1, \dots, h_n$. Легко увидеть, что с точностью до тривиального множителя

$$\frac{1}{n!} e^{-\frac{A}{24}(n^2-1)}$$

это выражение совпадает со статистической суммой унитарно-инвариантного ансамбля эрмитовых случайных матриц [4]

$$\hat{Z}_n = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -n \sum_{i=1}^n V(x_i) \right\} \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j)^2 \prod_{i=1}^n dx_i, \quad (1.3)$$

где $V(x) = Ax^2/2$. В самом деле, если заменить суммирование в (1.2) интегрированием, мы получим выражение (1.3). Асимптотическое поведение $\hat{Z}_n$ было найдено физиками много лет назад (см. [5, 6]). Математически строго оно было доказано в [7]. Тем не менее прямое применение этих методов приводит к правильному выражению (1.2) только при малых A (фаза слабой связи). Таким образом, мы встречаем здесь фазовый переход нового типа, которого нет в непрерывной версии (1.2), т.е. в матричной модели. Чтобы понять математическую природу этого фазового перехода, рассчитаем “игрушечную” статистическую сумму

$$\begin{aligned} \hat{Z}_n^a &= \int_{x_i \neq x_j} \exp \left\{ -n \sum_{i=1}^n V(x_i) \right\} \prod_{i=1}^n dx_i, \\ Z_n^a &= \sum_{h_i \neq h_j} \exp \left\{ -n \sum_{i=1}^n V(h_i) \right\}, \end{aligned} \quad (1.4)$$

из которой удалены “члены взаимодействия”

$$\prod_{i < j} (h_i - h_j)^2 \quad \text{и} \quad \prod_{i < j} (x_i - x_j)^2,$$

а также использованы более простые условия

$$x_i \neq x_j \quad \text{или} \quad h_i \neq h_j, \quad i \neq j. \quad (1.5)$$

Непрерывная статистическая сумма (1.4) факторизуется:

$$\hat{Z}_n^a = \prod_{i=1}^n \int e^{-nV(x_i)} dx_i.$$

Дискретную статистическую сумму Z_n^a , вообще говоря, нельзя записать в таком виде, т.к. даже асимптотически при больших n равенство

$$Z_n^a = \prod_{i=1}^n \sum e^{-nV\left(\frac{h_i}{n}\right)}$$

справедливо только при некотором специальном выборе $V(x)$, который соответствует “фазе слабой связи”. Это явление объясняется тем, что в непрерывном случае условие (1.5) не влияет на интеграл, меж тем как в дискретном случае оно существенно, в особенности в ситуации фазового перехода. Можно сравнить эту проблему с проблемой вычисления свободной энергии идеального бозе-газа, где разница между дискретным и непрерывным случаями (т.е. между суммированием и интегрированием) приводит к конденсации Бозе–Эйнштейна.

Таким образом, чтобы найти асимптотическое поведение Z_n^a , мы нуждаемся в технике, способной автоматически учесть условия (1.5). Такая техника хорошо известна в статистической механике. Она сводится к обычному методу доказывать эквивалентность большого канонического и канонического ансамблей, вводя химический потенциал. Этой техникой мы докажем следующую теорему, которая является строгой формулировкой главного результата [1].

ТЕОРЕМА 1. *Рассмотрим дискретную статистическую сумму в виде*

$$Z_n = \sum_{h_i \neq h_j} \exp \left\{ \sum_{i \neq j} \log |h_i - h_j| - \sum_{i=1}^n nV\left(\frac{h_i}{n}\right) \right\}, \quad (1.6)$$

где $V(x)$ удовлетворяет условию

$$|V(x)| > (2 + \epsilon) \log |x|. \quad (1.7)$$

Тогда существует предельная свободная энергия

$$f \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-2} \log Z_n = \int \log |x - x'| \rho(x) \rho(x') dx dx' - \int \rho(x) V(x) dx,$$

где плотность $\rho(x)$ однозначно определяется из следующих условий:

а)

$$\rho(x) \geq 0, \quad \int \rho(x) dx = 1; \quad (1.8)$$

б)

$$\rho(x) \leq 1; \quad (1.9)$$

в) существует константа z такая, что

$$\text{supp } \rho(x) \in \{x : u(x) \geq -z\} \quad (1.10)$$

и

$$\rho(x) = 1 \quad \text{при} \quad u(x) > -z. \quad (1.11)$$

Здесь по определению

$$u(x) \equiv 2 \int \log |x - x'| \rho(x') dx' - V(x). \quad (1.12)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Легко показать, что свободную энергию f и плотность $\rho(x)$ можно получить как решение следующей вариационной задачи:

$$f = \sup_{\rho(x) \leq 1} \left\{ \int \log |x - x'| \rho(x) dx \rho(x') dx' - \int V(x) \rho(x) dx \right\}, \quad (1.13)$$

где супремум берется по всем плотностям $\rho(x)$, удовлетворяющим условию “б”. С другой стороны, решение непрерывной проблемы (1.3) есть

$$\begin{aligned} \hat{f} &\equiv \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-2} \log \hat{Z}_n = \\ &= \sup_{\hat{\rho}(x)} \left\{ \int \log |x - x'| \hat{\rho}(x) dx \hat{\rho}(x') dx' - \int V(x) \hat{\rho}(x) dx \right\} \end{aligned} \quad (1.14)$$

(доказательство и обсуждение см. в [7]), где супремум берется по всем плотностям без этого ограничения. Таким образом, в фазе слабой связи мы получаем одно и то же решение и для дискретного, и для непрерывного случаев. С другой стороны, мы находим разные решения проблемы (1.2) и (1.3) (в фазе сильной связи (1.2)), поскольку $\hat{\rho}(x_0) = 1$ в некоторой точке x_0 для какой-то $A = A_c$ и $A > A_c$.

Чтобы найти $\rho(x)$ (или $\hat{\rho}(x)$) в фазе слабой связи в простейшем случае, когда $V(x)$ является четной функцией только с одним минимумом (например, $V(x) = x^2$), мы должны решить сингулярное интегральное уравнение

$$V'(x) = 2 \int_{-a}^a \frac{\rho(y) dy}{x - y}. \quad (1.15)$$

Это уравнение имеет ограниченное решение для любых a (см. [8]). Константа a определяется нормировочным условием “а”. В фазе сильной связи функция $\rho(x)$ удовлетворяет следующим условиям:

$$\begin{aligned} \rho(x) &= 0, \quad \text{если } |x| \geq a, \\ 0 \leq \rho(x) &\leq 1, \quad \text{если } a > |x| > b, \\ \rho(x) &= 1, \quad \text{если } |x| \leq b \end{aligned} \quad (1.16)$$

согласно условиям “а”, “б”, “в”. Поэтому нужно решить другое сингулярное уравнение (ср. с (1.15)):

$$V'(x) = 2 \int_{-a}^{-b} \rho(y) dy \left(\frac{1}{x-y} + \frac{1}{x+y} \right) + 2 \int_{-b}^b \frac{dy}{x-y}, \quad (1.17)$$

и найти a, b из условия нормировки “а” и уравнения

$$u(-b) = u(b),$$

которое следует из условия “в” для функции $u(x)$ формулы (1.12).

В случае, если $V(x)$ имеет m минимумов, носитель σ плотности $\rho(x)$ может состоять из m интервалов. Для каждого такого интервала (a_i, a_{i+1}) , $i = 1, 3, \dots, 2k-1$, рассмотрим маленький интервал $(b_i, b_{i+1}) \subset (a_i, a_{i+1})$, в котором $\rho(x) = 1$, и найдем $\rho(x)$ на множестве

$$\sigma' = \bigcup_{i=1}^{2k-1} ((a_i, b_i) \cup (b_{i+1}, a_{i+1}))$$

как решение сингулярного интегрального уравнения

$$V'(x) = 2 \int_{\sigma} \frac{\rho(y) dy}{x-y} \quad \text{при } x \in \sigma'.$$

Согласно теории сингулярных интегральных уравнений [8] это уравнение имеет ограниченное решение, если функция $V(x)$ удовлетворяет $2k$ условиям на множестве σ' . Это дает нам $2k$ уравнений в конечных точках $a_1, \dots, a_{2k}, b_1, \dots, b_{2k}$. Другие уравнения можно найти из нормировочных условий “а” и из равенств

$$\begin{aligned} u(b_1) &= u(b_2), \quad \dots, \quad u(b_{2k-1}) = u(b_{2k}), \\ u(a_2) &= u(a_3), \quad \dots, \quad u(a_{2k-2}) = u(b_{2k-1}), \end{aligned}$$

которые вытекают из соотношений (1.10), (1.11).

2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА

Заметим, что в силу леммы (см. ниже) существуют положительные числа $L > 2$ и $\delta > 0$ такие, что

$$\left| \frac{1}{n^2} \log Z_n - \frac{1}{n^2} \log Z_n^L \right| \leq e^{-n\delta}, \quad (2.1)$$

где

$$Z_n^L = \sum_{h_i \neq h_j, |h_j| \leq nL} \exp \left\{ \sum_{i \neq j} \log |h_i - h_j| - \sum_{i=1}^n nV\left(\frac{h_i}{n}\right) \right\}.$$

Оказывается, что Z_n^L можно рассматривать как статистическую сумму некоторой одномерной модели типа Изинга. Гамильтониан этой модели имеет вид

$$\begin{aligned} H(\nu) = & -\frac{1}{n} \sum_{r \neq r', |r| < nL} \log \left| \frac{r - r'}{nL} \right| \nu_r \nu_{r'} - \\ & - \sum_{|r| < nL} V\left(\frac{r}{n}\right) \nu_r - \frac{1}{n} \sum_{|r| < nL} \left(\log \frac{1}{nL} + 1 \right) \nu_r, \end{aligned} \quad (2.2)$$

где $\nu_r = 0, 1$ — “числа заполнения”. Итак, имеем

$$Z_n^L = \sum_{\{\sum \nu_r = n\}} \exp \{ -nH(\nu) + n(n-1) \log nL + n(\log nL - 1) \}. \quad (2.3)$$

Чтобы освободиться от условия $\sum \nu_r = n$, введем в гамильтониан параметр z (“химический потенциал”). Эта процедура вполне стандартна в статистической механике:

$$H(\nu, z) = \sum_{|r|, |r'| < nL} w\left(\frac{r - r'}{nL}\right) \nu_r \nu_{r'} + \sum_{|r| < nL} \left(V\left(\frac{r}{n}\right) - z \right) \nu_r + nz, \quad (2.4)$$

где

$$w(r) = \begin{cases} -n^{-1} \log |r|, & r \neq 0, \\ -n^{-1} (\log nL - 1), & r = 0. \end{cases} \quad (2.5)$$

Рассмотрим

$$Z_n(z) = \sum_{\{\nu_r\}} \exp \{ -nH(\nu, z) \}. \quad (2.6)$$

Теперь воспользуемся условием

$$\left\langle \frac{1}{n} \sum_{|r| < nL} \nu_r \right\rangle_{H(z)} = 1, \quad (2.7)$$

чтобы рассчитать z . Если мы докажем, что

$$\left\langle \left(\frac{1}{n} \sum_{|r| < nL} \nu_r - 1 \right)^2 \right\rangle_{H(z)} \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty, \quad (2.8)$$

то (это также вполне обычно для статистической механики) мы сможем утверждать, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{n^2} \log Z_n^L - \frac{1}{n^2} \log Z_n(z) - \log nL \right| = 0. \quad (2.9)$$

Итак, чтобы рассчитать Z_n , нужно вычислить $Z_n(z)$, затем найти z из уравнения (2.7) и проверить (2.8). Чтобы сделать все это, воспользуемся методом среднего поля в форме, предложенной в [9] для аналогичных целей. Рассмотрим так называемый приближенный гамильтониан вида

$$\begin{aligned} H_a(\nu, c, z) = & 2 \sum_{|r|, |r'| < nL} w\left(\frac{r-r'}{nL}\right) \nu_r c_{r'} - \sum_{|r|, |r'| < nL} w\left(\frac{r-r'}{nL}\right) c_r c_{r'} + \\ & + \sum_{|r| < nL} \left(V\left(\frac{r}{n}\right) - z \right) \nu_r + nz. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Тогда получаем

$$\begin{aligned} H(\nu, z) = & H_a(\nu, c, z) + \\ & + \sum_{|r|, |r'| < nL} w\left(\frac{r-r'}{nL}\right) (\nu_r - c_r)(\nu_{r'} - c_{r'}) = H_a + R. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Согласно неравенству Боголюбова [10] имеем

$$\frac{1}{n^2} \langle R \rangle_{H(z)} \leq \frac{1}{n^2} \log Z_n(z) - \frac{1}{n^2} \log Z_n(c, z) \leq \frac{1}{n^2} \langle R \rangle_{H_a(c, z)}, \quad (2.12)$$

где $Z_n(c, z)$ — статистическая сумма, отвечающая гамильтониану $H_a(c, z)$. Для любого z выберем $c^{(n)} = \{c_r^{(n)}\}$ — точку минимума функции

$$\Phi(c, z) = \frac{1}{n^2} \log Z_n(c, z).$$

Поскольку в [7] было доказано, что

$$w\left(\frac{r-r'}{nL}\right)$$

— это положительная матрица, функция Φ является “строго выпуклой” по отношению к c , z (т.е. ее вторые производные по всем направлениям строго положительны). Кроме того, она растет при $c \rightarrow \infty$. Поэтому для всех z функция $\Phi(c, z)$ принимает минимальное значение относительно c в единственной точке $c^{(n)}$, которая является решением следующего уравнения:

$$c_r^{(n)} = \langle \nu_r \rangle_{H_a(c, z)} = \frac{\exp\{n(u_n(r/n) + z)\}}{1 + \exp\{n(u_n(r/n) + z)\}}, \quad (2.13)$$

где

$$u_n\left(\frac{r}{n}\right) = - \sum_{|r'| < L} w\left(\frac{r-r'}{nL}\right) c_{r'}^{(n)} + V\left(\frac{r}{n}\right). \quad (2.14)$$

Следовательно, если мы положим $c = c^{(n)}$ в (2.10) и воспользуемся тем фактом, что

$$\langle \nu_r \nu_{r'} \rangle_{H_a(c, z)} = \langle \nu_r \rangle_{H_a(c, z)} \langle \nu_{r'} \rangle_{H_a(c, z)} \quad (r \neq r'),$$

мы получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{n^2} \langle R \rangle_{H(z)} &\leq \frac{1}{n^2} \log Z_n(z) - \frac{1}{n^2} \log Z_n(c, z) \leq \\ &\leq \frac{1}{n} w(0) = \frac{\log nL + 1}{n}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Благодаря положительности матрицы

$$w\left(\frac{r-r'}{nL}\right)$$

левая часть этого неравенства положительна. Поэтому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{n^2} \log Z_n(z) - \min_c \frac{1}{n^2} \log Z_n(c, z) \right| = 0 \quad (2.16)$$

и

$$\left\langle \frac{1}{n} \sum_{|r|, |r'| < nL} w\left(\frac{r-r'}{nL}\right) (\nu_r - c_r)(\nu_{r'} - c_{r'}) \right\rangle_{H(z)} \leq \frac{\log nL + 1}{n}. \quad (2.17)$$

Как это доказано в [7], из последнего неравенства следует, что

$$\left\langle \left(\frac{1}{n} \sum_{|r| < nL} \nu_r - \frac{1}{n} \sum_{|r| < nL} c_r^{(n)} \right)^2 \right\rangle_{H(z)} \leq \text{const} \cdot n^{-1/2} \log^{1/2} n.$$

Итак, мы разрешим уравнение (2.7) и докажем (2.8), если выберем z , совместимое с уравнением

$$\frac{1}{n} \sum_{|r| < nL} c_r^{(n)} = 1. \quad (2.18)$$

Последнее равенство – это как раз уравнение для критической точки функционала $\Phi(c, z)$. Как отмечалось выше, этот функционал является “строго выпуклым” относительно c и растет при $z \rightarrow \infty$. Значит, существует единственная точка $z^{(n)}$, которая удовлетворяет условию (2.18). Согласно (2.9) и (2.12) имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{n^2} \log Z_n^L - \min_{c, z} \Phi_n(c, z) - \log nL \right| = 0. \quad (2.19)$$

Теперь изучим $\min_{c,z} \Phi_n(c, z) = \Phi_n(c^{(n)}, z^{(n)})$. Из (2.13) вытекает, что

$$0 \leq c_r^{(n)} \leq 1. \quad (2.20)$$

Рассмотрим меры

$$\mu^{(n)}(\Delta) = \frac{1}{n} \sum_{|r| < nL} c_r^{(n)} \chi_{\Delta}\left(\frac{r}{n}\right), \quad (2.21)$$

где $\chi_{\Delta}(x)$ — характеристическая функция интервала Δ . По теореме Хелли существуют подпоследовательность $\mu^{(n_k)}$, мера μ и константа z такие, что $\mu^{(n_k)}(\Delta) \rightarrow \mu(\Delta)$ для некоторого Δ и $z^{(n_k)} \rightarrow z$ при $k \rightarrow \infty$. Поскольку $\mu^{(n_k)}$ имеет вид (2.21), а $c_r^{(n_k)}$ удовлетворяют (2.18) и (2.20), предельная мера $\mu(dx)$ абсолютно непрерывна, $\mu(dx) = \rho(x) dx$, и ее плотность $\rho(x)$ удовлетворяет условиям

$$0 \leq \rho(x) \leq 1, \quad \int \rho(x) dx = 1. \quad (2.22)$$

Пусть

$$u(x) = 2 \int \log \left| \frac{x - x'}{L} \right| \rho(x') dx' - V(x). \quad (2.23)$$

Поскольку $c^{(n)}$ задаются решением (2.13), имеем (см. (1.8)–(1.12))

$$\text{supp } \rho(x) \in \{x: u(x) \geq -z\} \quad (2.24)$$

и

$$\rho(x) = 1, \quad \text{если } u(x) > -z. \quad (2.25)$$

Мы докажем сейчас, что условия (2.22)–(2.25) определяют функцию $\rho(x)$ однозначно. Для этого предположим, что существует другая функция $\rho_1(x)$, удовлетворяющая тем же условиям (быть может, с другим $z = z_1$). Рассмотрим

$$u^1(x) = 2 \int \log \left| \frac{x - x'}{L} \right| \rho_1(x') dx' - V(x); \quad (2.26)$$

$$d_n\left(\frac{r}{n}\right) = \rho_1\left(\frac{r}{n}\right) + n^{-1/2} \left(c_r^{(n)} - \rho_1\left(\frac{r}{n}\right) \right);$$

$$\begin{aligned} u_n^1\left(\frac{r}{n}\right) &= - \sum_{|r'| < L} w\left(\frac{r - r'}{nL}\right) d_n\left(\frac{r'}{n}\right) + V\left(\frac{r}{n}\right) = \\ &= u^1\left(\frac{r}{n}\right) + n^{-1/2} \left(u\left(\frac{r}{n}\right) - u^1\left(\frac{r}{n}\right) \right) + O(n^{-1} \log n), \end{aligned} \quad (2.27)$$

где $u_n(r/n)$ определено в (2.14). Так как $\Phi_n(c, z)$ – выпуклая функция, а $(c^{(n)}, z^{(n)})$ – точка минимума, будем иметь для $n = n_k$

$$\begin{aligned}
0 &\leq \Phi_n(d_n, z_1) - \Phi(c^{(n)}, z^{(n)}) \leq \\
&\leq -\frac{1}{n} \sum_{|r| < nL} d_n\left(\frac{r}{n}\right) \left(\bar{u}^1\left(\frac{r}{n}\right) - \bar{u}\left(\frac{r}{n}\right)\right) + \\
&\quad + \frac{1}{n} \sum_{|r| < nL} \left(\bar{u}^1\left(\frac{r}{n}\right) - \bar{u}\left(\frac{r}{n}\right)\right) \frac{\exp\{n\bar{u}_n^1(r/n)\}}{1 + \exp\{n\bar{u}_n^1(r/n)\}} + o(1) = \\
&= \int (\bar{u}^1(x) - \bar{u}(x)) dx \sum_{|r| < nL} \left(\bar{u}^1\left(\frac{r}{n}\right) - \bar{u}\left(\frac{r}{n}\right)\right) \times \\
&\quad \times \frac{\exp\{n\bar{u}^1\left(\frac{r}{n}\right) + n^{-1/2}(\bar{u}\left(\frac{r}{n}\right) - \bar{u}^1\left(\frac{r}{n}\right)) + o(n^{-1/2})\}}{1 + \exp\{n\bar{u}^1\left(\frac{r}{n}\right) + n^{-1/2}(\bar{u}\left(\frac{r}{n}\right) - \bar{u}^1\left(\frac{r}{n}\right))\}} + o(1) = \\
&= \int_{\bar{u}^1(x) > 0} (\bar{u}^1(x) - \bar{u}(x)) dx - \int_{\bar{u}^1(x) = 0} (\bar{u}^1(x) - \bar{u}(x)) dx \times \\
&\quad \times \sum_{\bar{u}^1\left(\frac{r}{n}\right) > 0} \left(\bar{u}^1\left(\frac{r}{n}\right) - \bar{u}\left(\frac{r}{n}\right)\right) + o(1), \tag{2.28}
\end{aligned}$$

где

$$\bar{u}(x) = u(x) + z, \quad \bar{u}^1(x) = u^1(x) + z_1.$$

Из последнего неравенства следует, что при $n = n_k$

$$\begin{aligned}
0 &\leq \Phi_n(d_n, z_1) - \Phi(c^{(n)}, z^{(n)}) \leq \\
&\leq - \int_{\bar{u}^1(x) > 0, \bar{u}(x) < 0} (-\bar{u}(x)) \rho^1(x) dx - \\
&\quad - \int_{\bar{u}^1(x) > 0, \bar{u}(x) > 0} \bar{u}(x)(1 - \rho^1(x)) dx + o(1) \leq o(1). \tag{2.29}
\end{aligned}$$

Второе неравенство в (2.29) выполняется благодаря тому, что $\rho^1(x)$ удовлетворяет уравнению (2.22). Кроме того, поскольку $\Phi_n(c, z)$ можно представить как

$$\Phi_n(c, z) = w\left(\frac{r - r'}{nL}\right) c_r c_{r'} - z + F_n(c, z),$$

где $F_n(c, z)$ – это тоже выпуклая функция, мы получаем

$$\begin{aligned}
\Phi_n(c, z) - \Phi(c^{(n)}, z^{(n)}) &\geq \sum_{|r|, |r'| < nL} \frac{\partial^2 \Phi_n}{\partial c_r \partial c_{r'}} (c_r - c_r^{(n)}) (c_{r'} - c_{r'}^{(n)}) + \\
&\quad + \sum_{|r| < nL} \frac{\partial^2 \Phi_n}{\partial c_r \partial z} (c_r - c_r^{(n)}) (z - z^{(n)}) + \frac{\partial^2 \Phi_n}{\partial z^2} (z - z^{(n)})^2 \geq \\
&\geq \frac{2}{n} \sum_{|r|, |r'| < nL} w\left(\frac{r - r'}{nL}\right) (c_r - c_r^{(n)}) (c_{r'} - c_{r'}^{(n)}).
\end{aligned}$$

Итак, из (2.29) следует, что

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{|r|, |r'| < nL} w\left(\frac{r-r'}{nL}\right) (c_r - c_r^{(n)}) (c_{r'} - c_{r'}^{(n)}) = \\ = \int \log \left| \frac{x-x'}{L} \right| (\rho(x) - \rho_1(x)) (\rho(x') - \rho_1(x')) dx dx' + o(1) \leq \\ \leq \Phi_n(c, z) - \Phi(c^{(n)}, z^{(n)}) \leq o(1). \end{aligned}$$

В результате мы приходим к равенствам $\rho(x) = \rho_1(x)$ и $z = z_1$.

ЛЕММА. Если $V(x)$ удовлетворяет условиям (1.7), то существуют положительные числа $L > 2$ и $\delta > 0$ такие, что:

а)

$$\left| \frac{1}{n^2} \log Z_n - \frac{1}{n^2} \log Z_n^L \right| \leq e^{-n\delta}; \quad (2.30)$$

б) для $|r_1|, \dots, |r_k| \leq nL$

$$|\rho(r_1, \dots, r_k) - \rho_L(r_1, \dots, r_k)| \leq \rho_L(r_1, \dots, r_k) e^{-n\delta};$$

в) и для $|r_1| > nL$, и любых $r_2, \dots, r_k$

$$|\rho(r_1, \dots, r_k)| \leq \exp \left\{ -n\delta \left[V(x) - \max_{|y| \leq 1/2} V(y) \right] \right\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем L настолько большим ($L > 2$), чтобы выполнялось следующее условие:

$$V(x) - \max_{|y| \leq 1/2} V(y) \geq \left(2 + \frac{\epsilon}{3} \right) \log |x| + \frac{\epsilon}{3} |V(x)|. \quad (2.31)$$

Рассмотрим

$$Z_n = I_0 + \sum_{p=1}^n C_n^p \sum_{j_1, \dots, j_p = \pm 1, \pm 2, \dots} I(j_1, \dots, j_p), \quad (2.32)$$

где

$$Z_n^L = \sum_{|r_1|, \dots, |r_n| \leq Ln} \exp \{ -nH(r_1, \dots, r_n) \} \quad (2.33)$$

и

$$I(j_1, \dots, j_p) = \sum_{|r_1|, \dots, |r_n| \leq Ln} \exp \{ -nH(r_1 + j_1 nL, \dots, r_p + j_p nL, r_{p+1}, \dots, r_n) \}. \quad (2.34)$$

Оценим величину

$$\Delta(j_1, \dots, j_p) = \log I(j_1, \dots, j_p) - \log Z_n^L.$$

Для этого сравним каждый член в (2.32) с соответствующим членом в (2.33). Именно для каждой конфигурации $|r_{p+1}|, \dots, |r_n| \leq nL$ рассмотрим $|r_1^*|, \dots, |r_p^*| \leq nL/2$, которые не совпадают с какими-либо $r_{p+1}, \dots, r_n$ (это возможно, т.к. $L > 2$). Тогда получаем

$$\begin{aligned}
& -nH(r_1 + j_1 nL, \dots, r_p + j_p nL, r_{p+1}, \dots, r_n) + nH(r_1^*, \dots, r_p^*, r_{p+1}, \dots, r_n) \leq \\
& \leq -n \sum_{1 \leq i \leq p} \left[V\left(\frac{r_i}{n} + j_i L\right) - V\left(\frac{r_i^*}{n}\right) \right] + \\
& + 2 \sum_{1 \leq i < k \leq p} \left[\log \left| \frac{r_i}{n} + j_i L - \frac{r_k}{n} + j_k L \right| - \log \left| \frac{r_i^* - r_k^*}{n} \right| \right] \times \\
& \times \sum_{1 \leq i \leq p, p < k \leq n} \left[\log \left| \frac{r_i}{n} + j_i L - \frac{r_k}{n} \right| - \log \left| \frac{r_i^* - r_k}{n} \right| \right] \leq \\
& \leq -n \left(2 + \frac{\epsilon}{3} \right) \sum_{1 \leq i \leq p} \log L \left(|j_i| - \frac{1}{2} \right) + \\
& + 2n \sum_{1 \leq i \leq p} \log L \left(|j_i| + \frac{1}{2} \right) + npC + O(\log n) \leq \\
& \leq -n \frac{\epsilon}{6} \sum_{1 \leq i \leq p} \log L \left(|j_i| - \frac{1}{2} \right) + npC + O(\log n). \tag{2.35}
\end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались неравенством (2.31), чтобы оценить

$$V\left(\frac{r_i}{n} + j_i L\right) - V\left(\frac{r_i^*}{n}\right),$$

неравенством

$$\log |a - b| \leq \log |a| + \log |b| \quad (|a|, |b| > 1),$$

чтобы оценить вторую сумму в правой части (2.35), а неравенством

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{n} \sum_{1 \leq i \leq p, i \neq k} \log \left| \frac{r_i^* - r_k^*}{n} \right| - \frac{1}{n} \sum_{p+1 \leq i \leq n} \log \left| \frac{r_i - r_k^*}{n} \right| \geq \\
& \geq -\frac{2}{n} \sum_{1 \leq i \leq n} \log \frac{i}{n} = -\int_0^{1/2} \ln x \, dx + O(n^{-1} \log n),
\end{aligned}$$

чтобы оценить последнюю сумму в правой части (2.35). Подставляя последнюю оценку в (2.32), мы получаем

$$|Z_n - Z_n^L| \leq Z_n^L n e^{-n\delta} (1 + e^{-n\delta})^n,$$

где δ зависит от L и ϵ . Этим завершается доказательство неравенства “а” леммы. Неравенства “б” и “в” могут быть доказаны аналогично.

Список литературы

- [1] *M. Douglas, V. Kazakov.* Phys. Lett. B. 1993. V. 319. P. 219.
- [2] *J.-M. Daul, V. Kazakov.* Wilson Loop for Large N Yang-Mills Theory on a Two Dimensional Sphere. Preprint LPTENS N93/37, 1993.
- [3] *V. Kazakov, T. Wynter.* Nucl. Phys. B. 1995. V. 440. P. 407.
- [4] *M. L. Mehta.* Random Matrices. New York: Academic Press, 1991.
- [5] *E. Brezin, C. Itzykson, G. Parisi, J. Zuber.* Commun. Math. Phys. 1978. V. 59. P. 35.
- [6] *D. Bessis, C. Itzykson, J. Zuber.* Adv. Appl. Math. 1980. V. 1. P. 109.
- [7] *A. B. de Monvel, L. Pastur, M. Shcherbina.* J. Stat. Phys. 1995. V. 79. P. 585.
- [8] *N. I. Muskhelishvili.* Singular Integral Equations. Groningen: P. Noordhoff, 1953.
- [9] *М. В. Щербина.* ТМФ. 1989. Т. 81. С. 134.
- [10] *Н. Н. Боголюбов, мл.* Метод аппроксимирующего гамильтониана. М.: Наука, 1971.

Поступила в редакцию 17.XI.1997 г.