Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. П. Костробий, А. В. Визнович, Б. Б. Маркив,
М. В. Токарчук, Обобщенные кинетические уравнения
для плотных газов и жидкостей в методе неравновес-
ного статистического оператора Зубарева и статистике
Реньи, *ТМФ*, 2015, том 184, номер 1, 145–159

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8811>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru под-
разумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.55.26

26 апреля 2023 г., 11:38:58

© 2015 г.

П. П. Костробий*, А. В. Визнович*,
Б. Б. Маркив†, М. В. Токарчук*†

ОБОБЩЕННЫЕ КИНЕТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ПЛОТНЫХ ГАЗОВ И ЖИДКОСТЕЙ В МЕТОДЕ НЕРАВНОВЕСНОГО СТАТИСТИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА ЗУБАРЕВА И СТАТИСТИКЕ РЕНЬИ

Для описания кинетических процессов в газах и жидкостях, далеких от равновесия, на основании метода неравновесного статистического оператора Зубарева и принципа максимума энтропии Реньи получены неравновесный статистический оператор и обобщенные кинетические уравнения для неравновесных одночастичной и двухчастичной функций распределения. Рассмотрено q -обобщение уравнения Лиувилля и методом неравновесного статистического оператора получено его общее решение.

Ключевые слова: энтропия Реньи, неравновесный статистический оператор, обобщенные кинетические уравнения.

DOI: 10.4213/tmf8811

1. ВВЕДЕНИЕ

Изучение нелинейных флуктуаций в плотных газах, плазме, а также в процессах турбулентности, динамике фазовых переходов, химических реакциях, процессах самоорганизации остается актуальным в статистической теории неравновесных процессов [1]–[18] как на кинетическом, так и на гидродинамическом уровне описания. Состояния таких систем далеки от равновесия. Поэтому важно, с одной стороны, изучать процессы, которые приводят к появлению устойчивых состояний с характерными временами жизни, с другой стороны, исследовать процессы релаксации системы к неравновесным состояниям, которые уже хорошо изучены (например, в случае плотных газов и жидкостей процессы релаксации к состояниям, которые описываются в рамках теории молекулярной гидродинамики [19]–[22]). Важно отметить, что еще одной особенностью неравновесных явлений в плотных газах, жидкостях,

*Национальный университет “Львовская политехника”, Львов, Украина

†Институт физики конденсированных систем НАН Украины, Львов, Украина.

E-mail: markiv@icmp.lviv.ua

плотной плазме (а также в пылевой плазме) является то, что кинетические и гидродинамические процессы следует рассматривать согласованно [23]–[27]. В таких исследованиях используются различные статистические подходы на основе энтропии Гиббса–Шеннона [28]–[32] и ее обобщений (энтропии Цаллиса [33], Реньи [34], [35], Шармы–Миттала [36], [37]), а также суперстатистики [38], [39].

Энтропия Цаллиса широко используется в различных направлениях неэкстенсивной статистической механики (см. работы [40]–[42] и ссылки в них), например при исследовании явлений субдиффузии [43], [44] и турбулентности [45], [46], коэффициентов переноса в газах и плазме [47], а также квантовых диссипативных систем [48]. В рамках формализма Цаллиса исследовались флуктуации энергии [49], кинетика неравновесной плазмы [50], проблемы самогравитирующих [51] и сложных систем [52], [53]. В работах [54]–[56] статистика Цаллиса применялась для описания химических реакций, в частности нелинейные уравнения реакционно-диффузионных процессов были получены в работе [54]. Несмотря на широкое применение энтропии Цаллиса как обобщения энтропии Гиббса–Шеннона, энтропия Реньи также представляет большой интерес [18], [43], [57]–[64]. В частности, в этом случае индекс q можно связать с теплоемкостью системы [60]. Важно отметить работы Луцци и др. [65], [66], в которых метод неравновесного статистического оператора и энтропия Реньи используются для описания систем, далеких от равновесия. В частности, неравновесное q -зависимое распределение Реньи, а также обобщенные функции распределения бозонов и фермионов были получены в работе [65], в которой в этом подходе были также описаны эксперименты по аномальной люминесценции в нанометровых квантовых точках в полупроводниковых гетероструктурах. Статистический подход для описания фрактальных физико-химических систем на основе нефиковских диффузионных процессов был предложен в работе [66], где проводились исследования аномальной диффузии в фракталоподобных электродах микробатарей. Неэкстенсивный подход [67], как и другие подходы [68], [69], которые приводят к уравнению Линдблада, использовались для описания декогеренции в квантовой механике. Работы [17], [70], [71] посвящены исследованиям нелинейной кинетики на основе уравнений Крамерса, Больцмана и Фоккера–Планка в рамках обобщенной статистики.

В настоящей работе для описания неравновесных процессов в плотных газах и жидкостях мы используем энтропию Реньи, которая зависит от параметра q ($0 < q \leq 1$) и совпадает с энтропией Гиббса–Шеннона при $q = 1$. В работе [18] на основании метода неравновесного статистического оператора Зубарева [28], [30], [31] и принципа максимума энтропии Реньи были получены неравновесный статистический оператор и обобщенные уравнения переноса для параметров сокращенного описания неравновесных процессов в экстенсивной статистической механике. В настоящей работе мы применяем данный подход к описанию кинетических процессов в плотных газах и жидкостях, далеких от равновесия, когда неравновесные одно- и двухчастичная функции распределения выбраны в качестве параметров сокращенного описания.

В разделе 2 мы формулируем метод неравновесного статистического оператора Зубарева в статистике Реньи. В разделе 3 на его основе получены обобщенные кинетические уравнения для одно- и двухчастичной функций распределения в статистике Реньи. В разделе 4 мы рассматриваем q -обобщение уравнения Лиувилля, получаем его решение с помощью метода неравновесного статистического оператора и обсуждаем его применение.

2. МЕТОД НЕРАВНОВЕСНОГО СТАТИСТИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА ЗУБАРЕВА В СТАТИСТИКЕ РЕНЬИ

В методе неравновесного статистического оператора Зубарева, когда параметры сокращенного описания $\langle \hat{P}_n \rangle^t$ выбраны согласно Боголюбову, неравновесный статистический оператор системы $\varrho(x^N; t) = \varrho(x_1, \dots, x_N; t)$ может быть найден в общем виде с учетом проецирования как решение уравнения Лиувилля [28], [30], [31]:

$$\varrho(x^N; t) = \varrho_{\text{rel}}(x^N; t) - \int_{-\infty}^t e^{\varepsilon(t'-t)} T(t, t') [1 - P_{\text{rel}}(t')] iL_N \varrho_{\text{rel}}(x^N; t') dt', \quad (1)$$

где

$$T(t, t') = \exp_+ \left\{ - \int_{t'}^t [1 - P_{\text{rel}}(t')] iL_N dt' \right\} \quad (2)$$

– оператор эволюции с учетом проецирования, $\exp_+$ – упорядоченная экспонента, iL_N – оператор Лиувилля системы взаимодействующих частиц, который в классическом случае имеет следующую форму:

$$iL_N = \sum_{j=1}^N \frac{\vec{p}_j}{m} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{r}_j} - \frac{1}{2} \sum_{\substack{l,j=1 \\ l \neq j}}^N \frac{\partial}{\partial \vec{r}_j} \Phi(r_{lj}) \left(\frac{\partial}{\partial \vec{p}_j} - \frac{\partial}{\partial \vec{p}_l} \right). \quad (3)$$

Здесь использованы следующие обозначения: $x_j = \{\vec{p}_j, \vec{r}_j\}$ – фазовые переменные j -й частицы, $\Phi(r_{lj})$ – энергия взаимодействия двух частиц, $\vec{p}_j$ – импульс j -й частицы, m – ее масса, $r_{lj} = |\vec{r}_l - \vec{r}_j|$ – расстояние между парой взаимодействующих частиц. $P_{\text{rel}}(t')$ – обобщенный проекционный оператор Кавасаки–Гантона, структура которого зависит от формы релевантного статистического оператора:

$$P_{\text{rel}} \varrho' = \left(\varrho_{\text{rel}}(t) - \sum_n \frac{\delta \varrho_{\text{rel}}(t)}{\delta \hat{P}_n^t} \langle \hat{P}_n \rangle^t \right) \int \varrho' d\Gamma_N + \sum_n \frac{\delta \varrho_{\text{rel}}(t)}{\delta \langle \hat{P}_n \rangle^t} \int \hat{P}_n \varrho' d\Gamma_N, \quad (4)$$

где $\varrho_{\text{rel}}(x^N; t)$ – релевантный статистический оператор, который в начальный момент времени равен $\varrho(x^N; t)$. Используя метод Лагранжа, будем искать $\varrho_{\text{rel}}(x^N; t)$ исходя из условия максимума функционала энтропии Реньи

$$S_R(\varrho) = \frac{1}{1-q} \ln \int \varrho^q(t) d\Gamma_N \quad (5)$$

при фиксированных параметрах сокращенного описания и с учетом условия нормировки [18]. Соответствующий функционал имеет следующий вид:

$$L_R(\varrho) = \frac{1}{1-q} \ln \int \varrho^q(t) d\Gamma_N - \alpha \int \varrho(t) d\Gamma_N - \sum_n F_n(t) \int \hat{P}_n \varrho(t) d\Gamma_N, \quad (6)$$

где $F_n(t)$ – множители Лагранжа. Приравняв к нулю функциональную производную $\delta L_R(\varrho)/\delta \varrho = 0$ и определяя параметр

$$\alpha = \frac{q}{1-q} - \sum_n F_n(t) \langle \hat{P}_n \rangle^t,$$

мы получим релевантный статистический оператор в следующем виде:

$$\varrho_{\text{rel}}(t) = \frac{1}{Z_{\text{R}}(t)} \left[1 - \frac{q-1}{q} \sum_n F_n(t) \delta \hat{P}_n \right]^{1/(q-1)}, \quad (7)$$

где

$$Z_{\text{R}}(t) = \int d\Gamma_N \left[1 - \frac{q-1}{q} \sum_n F_n(t) \delta \hat{P}_n \right]^{1/(q-1)} \quad (8)$$

– статистическая сумма, и $\delta \hat{P}_n = \hat{P}_n - \langle \hat{P}_n \rangle^t$. Множители Лагранжа $F_n(t)$ определяются из условий самосогласования:

$$\langle \hat{P}_n \rangle^t = \langle \hat{P}_n \rangle_{\text{rel}}^t. \quad (9)$$

Для того чтобы найти обобщенный проекционный оператор Кавасаки–Гантона (4), релевантный статистический оператор (7) удобно представить в следующем виде:

$$\varrho_{\text{rel}}(t) = \frac{1}{Z_{\text{R}}^*} \left(1 - \frac{q-1}{q} \sum_n F_n^*(t) \hat{P}_n \right)^{1/(q-1)} \quad (10)$$

со статистической суммой

$$Z_{\text{R}}^*(t) = \int d\Gamma_N \left(1 - \frac{q-1}{q} \sum_n F_n^*(t) \hat{P}_n \right)^{1/(q-1)} \quad (11)$$

и перенормированными множителями

$$F_n^*(t) = F_n(t) \left(1 + \frac{q-1}{q} \sum_l F_l(t) \langle \hat{P}_l \rangle^t \right)^{-1}. \quad (12)$$

Для того чтобы найти неравновесный статистический оператор (1), необходимо раскрыть явную структуру обобщенного проекционного оператора Кавасаки–Гантона (4). Для этого необходимо рассчитать вариационную производную от релевантного статистического оператора $\delta \rho_{\text{rel}}(t) / \delta \langle \hat{P}_m \rangle^t$, а следовательно, и вариационную производную $\delta F_n^*(t) / \delta \langle \hat{P}_m \rangle^t$, которую можно рассчитать как $[\delta \langle \hat{P}_m \rangle^t / \delta F_n^*(t)]^{-1}$. Тогда действие операторов $P_{\text{rel}}(t) i L_N$ на релевантный статистический оператор можно представить в виде

$$P_{\text{rel}}(t) i L_N \varrho_{\text{rel}}(t) = P_{\text{rel}}(t) A(t) \varrho_{\text{rel}}(t) = [P(t) A(t)] \varrho_{\text{rel}}(t),$$

где мы ввели обобщенный проекционный оператор, действующий на динамические переменные:

$$P(t) \cdots = \sum_{m,n} \langle \cdots \hat{P}_m \rangle_{\text{rel}} \langle \hat{P}_m \delta \{ [q\psi(t)]^{-1} \hat{P}_n \} \rangle_{\text{rel}}^{-1} \delta \{ [q\psi(t)]^{-1} \hat{P}_n \}, \quad (13)$$

где

$$\psi(t) = 1 - \frac{q-1}{q} \sum_n F_n^*(t) \hat{P}_n.$$

Учитывая, что

$$[1 - P_{\text{rel}}(t)]iL_N \varrho_{\text{rel}}(t) = - \sum_n I_n(t) F_n(t) \varrho_{\text{rel}}(t)$$

с обобщенными потоками

$$I_n(t) = [1 - P(t)] \frac{1}{q} \psi^{-1}(t) \hat{P}_n, \quad (14)$$

мы можем записать неравновесный статистический оператор в явном виде:

$$\varrho(x^N; t) = \varrho_{\text{rel}}(x^N; t) - \sum_n \int_{-\infty}^t e^{\varepsilon(t'-t)} T(t, t') I_n(t') F_n(t') \varrho_{\text{rel}}(x^N; t') dt'. \quad (15)$$

С его помощью можно получить обобщенные уравнения переноса для параметров сокращенного описания, которые мы представим следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle \hat{P}_m \rangle^t = \langle \dot{\hat{P}}_m \rangle_{\text{rel}}^t + \sum_n \int_{-\infty}^t e^{\varepsilon(t'-t)} \varphi_{mn}(t, t') F_n(t') dt'. \quad (16)$$

Первый член в правой части уравнения (16) рассчитывается с помощью релевантного статистического оператора (10). Обобщенные ядра переноса (функции памяти)

$$\varphi_{mn}(t, t') = \int \dot{\hat{P}}_m T(t, t') I_n(t') \varrho_{\text{rel}}(t') d\Gamma_N \quad (17)$$

представляют собой временные корреляционные функции (с учетом редуцированного оператора эволюции (2)), которые описывают диссипативные процессы в системе и построены на обобщенных потоках $I_n(t)$. Уравнения переноса (16), в общем случае учитывающие эффекты памяти, в приближении $\varphi_{mn}(t, t') \approx \varphi_{mn} \delta(t - t')$ описывают марковские процессы. Уравнения переноса являются незамкнутыми. Неравновесные множители Лагранжа в них (неравновесные термодинамические параметры в случае гидродинамического описания) определяются из условий самосогласования (9). С этой точки зрения система уравнений переноса становится замкнутой. Неравновесный статистический оператор (15) и уравнения переноса (16) составляют полный набор инструментов для описания неравновесных процессов в системах, далеких от равновесия, когда определены параметры сокращенного описания $\langle \hat{P}_n \rangle^t$.

В следующем разделе мы применим представленный подход к описанию нелинейных кинетических флуктуаций в газах и жидкостях, далеких от равновесия.

3. ОБОБЩЕННЫЕ КИНЕТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ В СТАТИСТИКЕ РЕНЬИ

Для описания кинетических процессов в классических газах и жидкостях, далеких от равновесия, в качестве параметров сокращенного описания могут быть выбраны неравновесные одно- и двухчастичная функции распределения

$$f_1(x; t) = \langle \hat{n}_1(x) \rangle^t, \quad f_2(x, x'; t) = \langle \hat{n}_2(x, x') \rangle^t, \quad (18)$$

где

$$\hat{n}_1(x) = \sum_{j=1}^N \delta(x - x_j), \quad \hat{n}_2(x, x') = \sum_{j=1}^N \sum_{l=1}^N \delta(x - x_j) \delta(x' - x_l)$$

– одно- и двухчастичная микроскопические фазовые плотности N частиц в объеме V . Они определяют плотности числа частиц, импульса и полной энергии (представленной суммой кинетической $\hat{\varepsilon}^{\text{kin}}$ и потенциальной $\hat{\varepsilon}^{\text{int}}$ частей)

$$\begin{aligned}\hat{n}(\vec{r}) &= \int \hat{n}_1(\vec{r}, \vec{p}) d\vec{p}, & \hat{p}(\vec{r}) &= \int \hat{n}_1(\vec{r}, \vec{p}) \vec{p} d\vec{p}, \\ \hat{\varepsilon}^{\text{kin}}(\vec{r}) &= \int \hat{n}_1(\vec{r}, \vec{p}) \frac{p^2}{2m} d\vec{p}, \\ \hat{\varepsilon}^{\text{int}}(\vec{r}) &= \frac{1}{2} \int d\vec{p} \int d\vec{p}' \int \Phi(|\vec{r} - \vec{r}'|) \hat{n}_2(\vec{r}, \vec{p}; \vec{r}', \vec{p}') d\vec{r}',\end{aligned}$$

средние значения которых

$$\begin{aligned}\langle \hat{n}(\vec{r}) \rangle^t &= \int f_1(\vec{r}, \vec{p}; t) d\vec{p}, & \langle \hat{p}(\vec{r}) \rangle^t &= \int f_1(\vec{r}, \vec{p}; t) \vec{p} d\vec{p}, \\ \langle \hat{\varepsilon}^{\text{kin}}(\vec{r}) \rangle^t &= \int f_1(\vec{r}, \vec{p}; t) \frac{p^2}{2m} d\vec{p}, \\ \langle \hat{\varepsilon}^{\text{int}}(\vec{r}) \rangle^t &= \frac{1}{2} \int d\vec{p} \int d\vec{p}' \int \Phi(|\vec{r} - \vec{r}'|) f_2(\vec{r}, \vec{p}; \vec{r}', \vec{p}'; t) d\vec{r}'\end{aligned}$$

удовлетворяют локальным законам сохранения:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} \langle \hat{n}(\vec{r}) \rangle^t &= -\frac{1}{m} \vec{\nabla} \cdot \langle \hat{p}(\vec{r}) \rangle^t, \\ \frac{\partial}{\partial t} \langle \hat{p}(\vec{r}) \rangle^t &= -\vec{\nabla} \cdot \left(\langle \hat{T}^{\text{kin}}(\vec{r}) \rangle^t + \langle \hat{T}^{\text{int}}(\vec{r}) \rangle^t \right), \\ \frac{\partial}{\partial t} \langle \hat{\varepsilon}(\vec{r}) \rangle^t &= -\vec{\nabla} \cdot (\langle \hat{j}_E^{\text{kin}}(\vec{r}) \rangle^t + \langle \hat{j}_E^{\text{int}}(\vec{r}) \rangle^t).\end{aligned}\tag{19}$$

Здесь $\langle \hat{\varepsilon}(\vec{r}) \rangle^t = \langle \hat{\varepsilon}^{\text{kin}}(\vec{r}) \rangle^t + \langle \hat{\varepsilon}^{\text{int}}(\vec{r}) \rangle^t$ – неравновесное среднее значение плотности полной энергии, $\vec{\nabla} = \partial/\partial \vec{r}$,

$$\langle \hat{T}^{\text{kin}}(\vec{r}) \rangle^t = \int \frac{\vec{p}\vec{p}}{m} f_1(\vec{r}, \vec{p}; t) d\vec{p}$$

– неравновесное среднее значение плотности кинетической части тензора напряжений,

$$\begin{aligned}\langle \hat{T}^{\text{int}}(\vec{r}) \rangle^t &= \\ &= \frac{1}{2} \int d\vec{p} \int d\vec{p}' \int \frac{\partial}{\partial |\vec{r} - \vec{r}'|} \Phi(|\vec{r} - \vec{r}'|) \frac{(\vec{r} - \vec{r}')(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} f_2(\vec{r}, \vec{r}'; \vec{p}, \vec{p}'; t) d\vec{r}'\end{aligned}$$

– неравновесное среднее значение плотности потенциальной части тензора напряжений,

$$\langle \hat{j}_E^{\text{kin}}(\vec{r}) \rangle^t = \int \frac{p^2}{2m} \vec{p} f_1(\vec{r}, \vec{p}; t) d\vec{p}$$

и

$$\langle \hat{j}_E^{\text{int}}(\vec{r}) \rangle^t = \int d\vec{p} \int d\vec{p}' \int \left[\frac{\vec{p}}{m} \Phi(|\vec{r} - \vec{r}'|) - \Phi(|\vec{r} - \vec{r}'|) \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] f_2(\vec{r}, \vec{r}'; \vec{p}, \vec{p}'; t) d\vec{r}'$$

– неравновесные средние значения плотности кинетической и потенциальной частей потока энергии соответственно. Из приведенных соотношений следует, что неравновесная одночастичная функция распределения определяет макроскопические неравновесные плотности числа частиц, импульса, а также кинетические части полной энергии, тензора напряжений и потока энергии, тогда как неравновесная двухчастичная функция распределения определяет потенциальные части полной энергии, тензора напряжений и потока энергии. Таким образом, в системах, далеких от равновесия, нелинейные гидродинамические флуктуации обусловлены нелинейными флуктуациями неравновесных одно- и двухчастичной функций распределения, для которых следует построить соответствующие кинетические уравнения. В таком случае, когда неравновесные одно- и двухчастичные функции распределения $f_1(x; t) = \langle \hat{n}_1(x) \rangle^t$ и $f_2(x, x'; t) = \langle \hat{n}_2(x, x') \rangle^t$ выбраны в качестве параметров сокращенного описания, согласно (7) релевантная функция распределения имеет вид

$$\varrho_{\text{rel}}(t) = \frac{1}{Z_{\text{R}}(t)} \left\{ 1 - \frac{q-1}{q} \left[\int x a(x; t) \delta \hat{n}_1(x; t) dx + \int dx \int b(x, x'; t) \delta \hat{n}_2(x, x'; t) dx' \right] \right\}^{1/(q-1)}, \quad (20)$$

где

$$Z_{\text{R}}(t) = \int d\Gamma_N \left\{ 1 - \frac{q-1}{q} \left[\int a(x; t) \delta \hat{n}_1(x; t) dx + \int dx \int b(x, x'; t) \delta \hat{n}_2(x, x'; t) dx' \right] \right\}^{1/(q-1)}$$

– статистическая сумма релевантной функции распределения. Параметры $a(x; t)$ и $b(x, x'; t)$ определяются из следующих условий самосогласования:

$$\langle \hat{n}_1(x) \rangle^t = \langle \hat{n}_1(x) \rangle_{\text{rel}}^t, \quad \langle \hat{n}_2(x, x') \rangle^t = \langle \hat{n}_2(x, x') \rangle_{\text{rel}}^t. \quad (21)$$

Релевантную функцию распределения (20) удобно представить в другой форме:

$$\varrho_{\text{rel}}(t) = \frac{1}{Z_{\text{R}}^*(t)} \left\{ 1 - \frac{q-1}{q} \left[\int a^*(x; t) \hat{n}_1(x) dx + \int dx \int b^*(x, x'; t) \hat{n}_2(x, x') dx' \right] \right\}^{1/(q-1)}, \quad (22)$$

записав множители Лагранжа следующим образом:

$$\begin{aligned} a^*(x; t) &= a(x; t) \left\{ 1 + \frac{q-1}{q} \times \right. \\ &\quad \times \left[\int a(x; t) f_1(x; t) dx + \int dx \int b(x, x'; t) f_2(x, x'; t) dx' \right] \Big\}^{-1}, \\ b^*(x, x'; t) &= b(x, x'; t) \left\{ 1 + \frac{q-1}{q} \times \right. \\ &\quad \times \left[\int a(x; t) f_1(x; t) dx + \int dx \int b(x, x'; t) f_2(x, x'; t) dx' \right] \Big\}^{-1}. \end{aligned}$$

Важно отметить, что в случае $q = 1$ имеем $a^*(x; t) = a(x; t)$ и $b^*(x, x'; t) = b(x, x'; t)$, и мы получим релевантную функцию распределения, соответствующую статистике Гиббса [24].

Теперь мы можем представить неравновесный статистический оператор системы следующим образом:

$$\begin{aligned} \varrho(t) = & \varrho_{\text{rel}}(t) + \int dx' \int_{-\infty}^t e^{\varepsilon(t'-t)} T(t, t') a(x'; t') I_n^{(1)}(x'; t') \varrho_{\text{rel}}(t) dt' + \\ & + \int dx' \int dx'' \int_{-\infty}^t e^{\varepsilon(t'-t)} T(t, t') b(x', x''; t') I_n^{(2)}(x', x''; t') \varrho_{\text{rel}}(t) dt', \end{aligned} \quad (23)$$

где

$$\begin{aligned} I_n^{(1)}(x; t) &= [1 - P(t)] \frac{1}{q} \psi^{-1}(t) i L_N \hat{n}_1(x), \\ I_n^{(2)}(x, x'; t) &= [1 - P(t)] \frac{1}{q} \psi^{-1}(t) i L_N \hat{n}_2(x, x') \end{aligned}$$

– обобщенные потоки, в которых функция $\psi(t)$ равна

$$\psi(t) = 1 - \frac{q-1}{q} \left[\int a^*(x; t) \hat{n}_1(x; t) dx + \int dx \int b^*(x, x'; t) \hat{n}_2(x, x'; t) dx' \right].$$

С помощью неравновесного статистического оператора (23) согласно (16) мы получим систему обобщенных кинетических уравнений для параметров сокращенного описания $f_1(x; t) = \langle \hat{n}_1(x) \rangle^t$ и $f_2(x, x'; t) = \langle \hat{n}_2(x, x') \rangle^t$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \langle \hat{n}_1(x) \rangle^t &= \int \Phi_{nn}^{11}(x, x'; t) a(x'; t) dx' + \\ &+ \int dx' \int \Phi_{nn}^{12}(x, x', x''; t) b(x', x''; t) dx'' + \\ &+ \int dx' \int_{-\infty}^t e^{\varepsilon(t'-t)} \varphi_{nn}^{11}(x, x'; t, t') a(x'; t') dt' + \\ &+ \int dx' \int dx'' \int_{-\infty}^t e^{\varepsilon(t'-t)} \varphi_{nn}^{12}(x, x', x''; t, t') b(x', x''; t') dt', \\ \frac{\partial}{\partial t} \langle \hat{n}_2(x, x') \rangle^t &= \int \Phi_{nn}^{21}(x, x'; x''; t) a(x''; t) dx'' + \\ &+ \int dx'' \int \Phi_{nn}^{22}(x, x'; x'', x'''; t) b(x'', x'''; t) dx''' + \\ &+ \int dx'' \int_{-\infty}^t e^{\varepsilon(t'-t)} \varphi_{nn}^{21}(x, x'; x'' t, t') a(x''; t') dt' + \\ &+ \int dx'' \int dx''' \int_{-\infty}^t e^{\varepsilon(t'-t)} \varphi_{nn}^{22}(x, x'; x'', x'''; t, t') b(x'', x'''; t') dt'. \end{aligned} \quad (24)$$

В этих уравнениях функции

$$\Phi_{PP}^{\alpha\beta}(x, x'; t) = \int \hat{P}_\alpha(x) \frac{1}{q} \psi^{-1} i L_N \hat{P}_\beta(x') \varrho_{\text{rel}}(x^N; t) d\Gamma_N \quad (25)$$

описывают недиссипативную динамику, а функции

$$\varphi_{I_F I_F}^{\alpha\beta}(x; x'; t, t') = \int iL_N \hat{P}_\alpha(x) T(t, t') I_P^\beta(x'; t') \varrho_{\text{rel}}(x^N; t') d\Gamma_N \quad (26)$$

– кинетические ядра переноса, которые описывают диссипативные процессы. Здесь мы ввели обозначение $\hat{P}_\alpha(x) = \{\hat{n}_1(x), \hat{n}_2(x, x')\}$. Если пренебречь двухчастичными корреляциями при $q = 1$, обобщенное кинетическое уравнение в статистике Реньи переходит в кинетическое уравнение, полученное в рамках статистики Гиббса [30], в котором ядра переноса рассчитываются при помощи релевантной функции распределения $\varrho_{\text{rel}}(t) = \prod_{j=1}^N [f_1(x_j; t)/e]$. В этом случае неравновесный статистический оператор следует искать как решение уравнения Лиувилля с граничным условием, соответствующим гипотезе Боголюбова об ослаблении корреляций между частицами:

$$\frac{\partial}{\partial t} \varrho(x^N; t) + iL_N \varrho(x^N; t) = -\varepsilon \left(\varrho(x^N; t) - \prod_{j=1}^N \frac{f_1(x_j; t)}{e} \right).$$

Для более детального изучения структуры корреляционных функций (25) и ядер переноса (26) рассмотрим действие оператора Лиувилля на $\hat{n}_1(x)$ и $\hat{n}_2(x, x')$. Его можно записать следующим образом:

$$iL_N \hat{n}_1(x) = -\frac{\partial}{\partial \vec{r}} \cdot \frac{1}{m} \hat{j}(\vec{r}, \vec{p}) + \frac{\partial}{\partial \vec{p}} \cdot \hat{F}(\vec{r}, \vec{p}), \quad (27)$$

где

$$\hat{j}(\vec{r}, \vec{p}) = \sum_{j=1}^N \vec{p}_j \delta(\vec{r} - \vec{r}_j) \delta(\vec{p} - \vec{p}_j) \quad (28)$$

– микроскопическая плотность импульса в пространстве координат и импульсов, а

$$\hat{F}(\vec{r}, \vec{p}) = \sum_{l \neq j} \frac{\partial}{\partial \vec{r}_j} \Phi(|\vec{r}_j - \vec{r}_l|) \delta(\vec{r} - \vec{r}_j) \delta(\vec{p} - \vec{p}_j) \quad (29)$$

– микроскопическая плотность силы в пространстве координат и импульсов. Аналогично имеем

$$\begin{aligned} iL_N \hat{n}_2(x, x') = & -\frac{\partial}{\partial \vec{r}} \cdot \frac{1}{m} \hat{j}(\vec{r}, \vec{p}) \hat{n}_1(x') - \hat{n}_1(x) \frac{\partial}{\partial \vec{r}'} \cdot \frac{1}{m} \hat{j}(\vec{r}', \vec{p}') + \\ & + \frac{\partial}{\partial \vec{p}} \cdot \hat{F}(\vec{r}, \vec{p}) \hat{n}_1(x') + \hat{n}_1(x) \frac{\partial}{\partial \vec{p}'} \cdot \hat{F}(\vec{r}', \vec{p}'). \end{aligned} \quad (30)$$

Принимая во внимание соотношения (27)–(30), для функций (25) мы получим, в частности,

$$\Phi_{nn}^{11}(x, x'; t) = \left[\Omega_{nj}(x, x'; t) \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{r}'} - \Omega_{nF}(x, x'; t) \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{p}'} \right]. \quad (31)$$

Обобщенные ядра переноса (26) можно представить следующим образом:

$$\begin{aligned}
 \varphi_{nn}^{11}(x, x'; t, t') &= - \left[\frac{\partial}{\partial \vec{r}} \cdot D_{jj}(x, x'; t, t') \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{r}'} - \frac{\partial}{\partial \vec{p}} \cdot D_{Fj}(x, x'; t, t') \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{r}'} - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \cdot D_{jF}(x, x'; t, t') \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{p}'} + \frac{\partial}{\partial \vec{p}} \cdot D_{FF}(x, x'; t, t') \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{p}'} \right], \\
 \varphi_{nn}^{12}(x, x', x''; t, t') &= \\
 &= - \left[\frac{\partial}{\partial \vec{r}} \cdot D_{jjn}(x, x', x''; t, t') \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{r}'} + \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \cdot D_{jnj}(x, x', x''; t, t') \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{r}''} - \right. \\
 &\quad - \frac{\partial}{\partial \vec{p}} \cdot D_{Fjn}(x, x', x''; t, t') \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{r}'} - \frac{\partial}{\partial \vec{p}} \cdot D_{Fnj}(x, x', x''; t, t') \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{r}''} - \\
 &\quad - \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \cdot D_{jFn}(x, x', x''; t, t') \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{p}'} - \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \cdot D_{jnF}(x, x', x''; t, t') \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{p}''} + \\
 &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial \vec{p}} \cdot D_{FFn}(x, x', x''; t, t') \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{p}'} + \frac{\partial}{\partial \vec{p}} \cdot D_{FnF}(x, x', x''; t, t') \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{p}''} \right], \\
 \varphi_{nn}^{22}(x, x', x'', x'''; t, t') &= \\
 &= - \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \cdot \left[D_{jnjn}(x, x', x'', x'''; t, t') \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{r}'''} + D_{jnnj}(x, x', x'', x'''; t, t') \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{r}'''} \right] - \quad (32) \\
 &\quad - \frac{\partial}{\partial \vec{r}'} \cdot \left[D_{njjn}(x, x', x'', x'''; t, t') \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{r}'''} + D_{njjn}(x, x', x'', x'''; t, t') \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{r}'''} \right] + \\
 &\quad + \frac{\partial}{\partial \vec{p}} \cdot \left[D_{Fnjn}(x, x', x'', x'''; t, t') \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{r}'''} + D_{Fnnj}(x, x', x'', x'''; t, t') \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{r}'''} \right] + \\
 &\quad + \frac{\partial}{\partial \vec{p}'} \cdot \left[D_{nFjn}(x, x', x'', x'''; t, t') \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{r}'''} + D_{nFnj}(x, x', x'', x'''; t, t') \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{r}'''} \right] + \\
 &\quad + \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \cdot \left[D_{jnFn}(x, x', x'', x'''; t, t') \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{p}'''} + D_{jnnF}(x, x', x'', x'''; t, t') \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{p}'''} \right] + \\
 &\quad + \frac{\partial}{\partial \vec{r}'} \cdot \left[D_{njFn}(x, x', x'', x'''; t, t') \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{p}'''} + D_{njjnF}(x, x', x'', x'''; t, t') \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{p}'''} \right] - \\
 &\quad - \frac{\partial}{\partial \vec{p}} \cdot \left[D_{FnFn}(x, x', x'', x'''; t, t') \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{p}'''} + D_{FnnF}(x, x', x'', x'''; t, t') \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{p}'''} \right] - \\
 &\quad - \frac{\partial}{\partial \vec{p}'} \cdot \left[D_{nFFn}(x, x', x'', x'''; t, t') \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{p}'''} + D_{nFnF}(x, x', x'', x'''; t, t') \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{p}'''} \right],
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 D_{jj}(x, x'; t, t') &= \int \hat{j}(x) T(t, t') [1 - P(t')] \frac{1}{q} \psi^{-1}(t) \hat{j}(x') \varrho_{\text{rel}}(x^N; t') d\Gamma_N, \\
 D_{FF}(x, x'; t, t') &= \int \hat{F}(x) T(t, t') [1 - P(t')] \frac{1}{q} \psi^{-1}(t) \hat{F}(x') \varrho_{\text{rel}}(x^N; t') d\Gamma_N
 \end{aligned}$$

– обобщенные коэффициенты диффузии и трения в пространстве координат и импульсов в рамках статистики Реньи. При этом в случае $q = 1$ они переходят в обоб-

щенные коэффициенты диффузии и трения в статистике Гиббса

$$\begin{aligned} \int d\vec{p} \int D_{jj}(x, x'; t, t') d\vec{p}' &= D_{jj}(\vec{r}, \vec{r}'; t, t'), \\ \int d\vec{p} \int D_{FF}(x, x'; t, t') d\vec{p}' &= D_{FF}(\vec{r}, \vec{r}'; t, t'). \end{aligned}$$

Полученные кинетические уравнения содержат корреляционные функции второго, третьего и четвертого порядков Ω_{nj} , Ω_{nF} , Ω_{nnj} , Ω_{nnF} , Ω_{nnjn} , Ω_{nnFn} по динамическим переменным $\hat{n}(x)$, $\hat{j}(x)$, $\hat{F}(x)$. Величины $\Omega_{\alpha\beta}$ представляют собой корреляционные функции, описывающие недиссипативные процессы. Обобщенные функции памяти $D_{\alpha\beta}$, $D_{\alpha\beta\gamma}$ и $D_{\alpha\beta\gamma\delta}$ представляют собой временные корреляционные функции, построенные на динамических переменных $\hat{n}(x)$, $\hat{j}(x)$, $\hat{F}(x)$, $[1 - P(t)]\hat{j}(x)$, $[1 - P(t)]\hat{F}(x)$, которые описывают немарковские диссипативные процессы в системе. При $q = 1$ они переходят в функции памяти в статистике Гиббса. Такие функции памяти как D_{njj} и D_{nFnF} имеют сложную структуру:

$$\begin{aligned} D_{njj}(x, x', x'', x'''; t, t') &= \\ &= \int \hat{n}(x) \hat{j}(x') T(t, t') [1 - P(t')] \frac{1}{q} \psi^{-1}(t) \hat{n}(x'') \hat{j}(x''') \varrho_{\text{rel}}(x^N; t') d\Gamma_N, \\ D_{nFnF}(x, x', x'', x'''; t, t') &= \\ &= \int \hat{n}(x) \hat{F}(x') T(t, t') [1 - P(t')] \frac{1}{q} \psi^{-1}(t) \hat{n}(x'') \hat{F}(x''') \varrho_{\text{rel}}(x^N; t') d\Gamma_N, \end{aligned}$$

тем не менее их можно аппроксимировать, например, следующим образом:

$$D_{njj} \approx D_{nn} D_{jj} + D_{nj} D_{jn}, \quad D_{nFnF} \approx D_{nn} D_{FF} + D_{nF} D_{Fn},$$

что отвечает идеологии теории взаимодействующих мод.

Обобщенные кинетические уравнения (24) с учетом (31), (32) имеют структуру типа уравнения Фоккера–Планка. Их можно использовать для перехода к уравнениям обобщенной гидродинамики для локально сохраняющихся величин (19): плотностей числа частиц, импульса и энергии. Действительно, умножая систему уравнений (24) на первые моменты неравновесной одночастичной функции распределения $f_1(\vec{r}, \vec{p}; t)$ ($1, \vec{p}, p^2/2m$) и на $\frac{1}{2}\Phi(|\vec{r} - \vec{r}'|)$, мы получим обобщенные уравнения гидродинамики, в которых коэффициенты обобщенной вязкости и теплопроводимости определяются через ядра переноса с разделенными вкладами от кинетической и потенциальной частей энергии.

В случае разреженных газов в состояниях, близких к равновесию, когда можно пренебречь неравновесными парными корреляциями, описываемыми функцией $\langle \hat{n}_2(x, x') \rangle^t$, можно воспроизвести результаты, подобные результатам Богосяна [72].

Актуальной является переформулировка представленного подхода для описания диссипативных процессов в открытых системах [73]–[75], диссипации и диффузии в реакциях ядерного распада и синтеза [75] и квантовой турбулентности [1], [76]. Для описания диссипативных процессов в открытых квантовых системах широко применяется уравнение Линдблада [77]–[80]. Оно может быть получено с помощью q -обобщения уравнения Лиувилля [67], которое мы рассмотрим в следующем разделе.

4. q -ОБОБЩЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ЛИУВИЛЛЯ

Интересное q -обобщение обычного уравнения Лиувилля было представлено в работе [67]:

$$\frac{\partial}{\partial t} \varrho(x^N; t) + i\tilde{L}_N(t) \varrho(x^N; t) = 0, \quad (33)$$

где $i\tilde{L}_N$ – q -параметризованный оператор Лиувилля

$$i\tilde{L}_N(t) = \frac{iL_N}{1 + (1 - q)t iL_N}, \quad (34)$$

который при $q = 1$ переходит в оператор Лиувилля (3). Когда $|1 - q|\Omega_{\text{ch}}t \ll 1$, где Ω_{ch} – характеристическая частота рассматриваемой физической системы, уравнение (33) можно записать в следующем виде [67]:

$$\frac{\partial}{\partial t} \varrho(x^N; t) + [iL_N - (1 - q)t(iL_N)^2] \varrho(x^N; t) = 0. \quad (35)$$

Это уравнение типа Линдблада для неравновесного статистического оператора $\varrho(x^N; t)$. Уравнение типа Линдблада в рамках статистики Реньи было получено в работе [48]. Решение q -параметризованного уравнения Лиувилля в рамках метода неравновесного статистического оператора можно представить следующим образом:

$$\begin{aligned} \varrho(x^N; t) &= -\varepsilon \int_{-\infty}^t e^{\varepsilon(t'-t)} T_q(t, t') \varrho_{\text{rel}}(x^N; t') dt' = \\ &= \varrho_{\text{rel}}(x^N; t) - \int_{-\infty}^t e^{\varepsilon(t'-t)} \left[T_q(t, t') \frac{\partial}{\partial t'} - \right. \\ &\quad \left. - \int_0^1 T_q^\tau(t, t') \frac{iL_N}{1 + (1 - q)(t' - t)iL_N} T_q^{1-\tau}(t, t') d\tau \right] \varrho_{\text{rel}}(x^N; t') dt', \end{aligned} \quad (36)$$

где

$$T_q(t, t') = \exp \left\{ - \int_{t'}^t \frac{iL_N}{1 + (1 - q)t'' iL_N} dt'' \right\} \quad (37)$$

– параметризованный оператор эволюции. В случае $|1 - q|\Omega_{\text{ch}}t \ll 1$ из (36) мы получим решение уравнения типа Линдблада для $\varrho(x^N; t)$. Это решение можно использовать для получения обобщенных уравнений переноса для квантовых систем. В частности, интересным является вопрос о форме кинетических уравнений для одно- и двухчастичной неравновесных функций в случае систем, которые описываются неравновесным статистическим оператором (36).

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, мы представили обобщение метода неравновесного статистического оператора Зубарева на основе принципа максимума энтропии Реньи. Для описания кинетических процессов в газах и жидкостях, далеких от равновесия, получены неравновесный статистический оператор и обобщенные кинетические уравнения для одно- и двухчастичной функций распределения $f_1(x; t) = \langle \hat{n}_1(x) \rangle^t$ и $f_2(x, x'; t) = \langle \hat{n}_2(x, x') \rangle^t$. Мы раскрыли внутреннюю структуру обобщенных функций памяти.

Это дало возможность показать, что кинетические уравнения содержат корреляционные функции второго и высших порядков Ω_{nj} , Ω_{nF} , Ω_{nnj} , Ω_{nnF} , Ω_{nnjn} , Ω_{nnFn} по динамическим переменным $\hat{n}(x)$, $\hat{j}(x)$, $\hat{F}(x)$. В отличие от функций $\Omega_{\alpha\beta}$, описывающих недиссипативные процессы, диссипативные процессы в системе описываются функциями памяти кинетических уравнений $D_{\alpha\beta}$, построенными на переменных $\hat{n}(x)$, $\hat{j}(x)$, $\hat{F}(x)$, $[1 - P(t)]\hat{j}(x)$ и $[1 - P(t)]\hat{F}(x)$.

Мы рассмотрели q -обобщение уравнения Лиувилля и получили его общее решение методом неравновесного статистического оператора. В случае $|1 - q|\Omega_{\text{ch}}t \ll 1$ можно получить решение уравнения типа Линдблада для $\varrho(x^N; t)$.

Еще одна интересная задача состоит в получении q -обобщенных уравнений гидродинамики на основе уравнений (24) и в применении их для описания процессов турбулентности и динамики фазовых переходов в жидкостях и плотных газах. Актуальной также является переформулирование представленного подхода для описания квантовых систем (в частности, квантовой турбулентности [1], [76]). Эти задачи будут рассматриваться в наших следующих работах.

Список литературы

- [1] K. Yoshida, T. Arimitsu, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **46**:33 (2013), 335501, 15 pp.
- [2] P. C. Valente, J. C. Vassilicos, *The non-equilibrium region of grid-generated decaying turbulence*, arXiv: 1307.5898; *The energy cascade in grid-generated non-equilibrium decaying turbulence*, arXiv: 1307.5901.
- [3] M. Tokuyama, *Phys. A*, **395** (2014), 31–47, arXiv: 1409.4839.
- [4] P. Mendoza-Méndez, L. López-Flores, A. Vizcarra-Redón, L. F. Sánchez-Díaz, M. Medina-Noyola, *Phys. A*, **394** (2014), 1–16.
- [5] J. Du, *Phys. A*, **391**:4 (2012), 1718–1728.
- [6] R. Guo, J. Du, *Phys. A*, **406** (2014), 281–286.
- [7] J. P. Boon, J. F. Lutsko, C. Lutsko, *Phys. Rev. E*, **85**:2 (2012), 021126, 7 pp., arXiv: 1110.5463.
- [8] G. F. Mazenko, *Phys. Rev. E*, **81**:6 (2010), 061102, 18 pp., arXiv: 0905.4904.
- [9] G. F. Mazenko, *Phys. Rev. E*, **83**:4 (2011), 041125, 21 pp., arXiv: 1009.3008.
- [10] S. P. Das, G. F. Mazenko, *J. Statist. Phys.*, **152**:1 (2013), 159–194, arXiv: 1303.1627.
- [11] P. Kostrobij, R. Tokarchuk, M. Tokarchuk, B. Markiv, *Condens. Matter Phys.*, **17**:3 (2014), 33005, 9 pp.
- [12] P. A. Hlushak, M. V. Tokarchuk, *Condens. Matter Phys.*, **17**:2 (2014), 23606, 14 pp.
- [13] C. A. B. Silva, A. R. Vasconcellos, J. G. Ramos, R. Luzzi, *J. Statist. Phys.*, **143**:5 (2011), 1020–1034.
- [14] C. A. B. Silva, J. G. Ramos, A. R. Vasconcellos, R. Luzzi, *Nonlinear higher-order hydrodynamics. Unification of kinetic and hydrodynamic approaches within a nonequilibrium statistical ensemble formalism*, arXiv: 1210.7280.
- [15] V. N. Tsytovich, U. de Angelis, *Phys. Plasmas*, **11**:2 (2004), 496–506.
- [16] A. I. Olemskoi, *Theory of Structure Transformations in Non-equilibrium Condensed Matter*, Horizons in World Physics Series, **231**, NOVA Science Publ., New York, 1999.
- [17] T. D. Frank, *Nonlinear Fokker–Planck Equations. Fundamentals and Applications*, Springer, Berlin, 2005.
- [18] B. B. Markiv, R. M. Tokarchuk, P. P. Kostrobij, M. V. Tokarchuk, *Phys. A*, **390**:5 (2011), 785–791.
- [19] J. P. Boon, S. Yip, *Molecular Hydrodynamics*, McGraw-Hill, New York, 1980.

- [20] И. Мрыглод, М. Токарчук, *Вопросы атомной науки и техники*, **3**:24 (1992), 134–139.
- [21] I. M. Mryglod, I. P. Omelyan, M. V. Tokarchuk, *Mol. Phys.*, **84**:2 (1995), 235–259.
- [22] B. B. Markiv, I. P. Omelyan, M. V. Tokarchuk, *Phys. Rev. E*, **82**:4 (2010), 041202, 11 pp.
- [23] Д. Н. Зубарев, В. Г. Морозов, И. П. Омелян, М. В. Токарчук, *ТМФ*, **96**:3 (1993), 325–350.
- [24] M. V. Tokarchuk, I. P. Omelyan, A. E. Kobryn, *Condens. Matter Phys.*, **1**:4(16) (1998), 687–751.
- [25] A. E. Kobryn, I. P. Omelyan, M. V. Tokarchuk, *J. Statist. Phys.*, **92**:5–6 (1998), 973–994.
- [26] B. Markiv, I. Omelyan, M. V. Tokarchuk, *J. Statist. Phys.*, **155**:5 (2014), 843–866, arXiv:1308.3627.
- [27] B. Markiv, M. Tokarchuk, *Phys. Plasmas*, **21**:2 (2014), 023707, 16 pp., arXiv:1309.2509.
- [28] Д. Н. Зубарев, *Неравновесная статистическая термодинамика*, Наука, М., 1971.
- [29] C. Cercignani, V. I. Gerasimenko, D. Ya. Petryna, *Many-Particle Dynamics and Kinetic Equations*, Kluwer, Dordrecht, 1997.
- [30] Д. Н. Зубарев, В. Г. Морозов, Г. Рёпке, *Статистическая механика неравновесных процессов*, т. 1, Физматлит, М., 2002.
- [31] Д. Н. Зубарев, В. Г. Морозов, Г. Рёпке, *Статистическая механика неравновесных процессов*, т. 2, Физматлит, М., 2002.
- [32] P. P. Kostrobij, M. V. Tokarchuk, B. M. Markovych, V. V. Ignatyuk, B. V. Gnativ, *Reaction-diffusion Processes in the “Metal-Gas” Systems*, Publishing House of Lviv Polytechnic National University, Lviv, 2009 (in Ukrainian).
- [33] C. Tsallis, *J. Statist. Phys.*, **52**:1–2 (1988), 479–487.
- [34] A. Rényi, *Probability Theory*, Applied Mathematics and Mechanics, **10**, North-Holland, Amsterdam, 1970.
- [35] P. Turán (ed.), *Selected Papers of Alfréd Rényi*, v. 2: 1956–1961, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1976.
- [36] B. D. Sharma, D. P. Mittal, *J. Math. Sci.*, **10** (1975), 28–40.
- [37] E. Akturk, G. B. Bagci, R. Sever, *Is Sharma-Mittal entropy really a step beyond Tsallis and Renyi entropies?* arXiv:cond-mat/0703277.
- [38] C. Beck, *Contin. Mech. Thermodyn.*, **16**:3 (2004), 293–304, arXiv:cond-mat/0303288.
- [39] C. Beck, “Superstatistics: Theoretical concepts and physical applications”, *Anomalous Transport: Foundations and Applications*, eds. R. Klages, G. Radons, I. M. Sokolov, Wiley-VCH, New York, 2008, 433–457.
- [40] S. Abe, Y. Okamoto (eds.), *Nonextensive Statistical Mechanics and Its Applications*, Lecture Notes in Physics, **560**, Springer, Heidelberg, 2001.
- [41] M. Gell-Mann, C. Tsallis (eds.), *Nonextensive Entropy – Interdisciplinary Applications*, Oxford Univ. Press, New York, 2004.
- [42] C. Tsallis (ed.), *Introduction to Nonextensive Statistical Mechanics. Approaching a Complex World*, Springer, New York, 2009.
- [43] C. Essex, C. Schulzky, A. Franz, K. H. Hoffmann, *Phys. A*, **284**:1–4 (2000), 299–308.
- [44] J. P. Boon, J. F. Lutsko, *Phys. A*, **368**:1 (2006), 55–62, arXiv:cond-mat/0508231.
- [45] T. Arimitsu, N. Arimitsu, *Phys. Rev. E*, **61**:3 (2000), 3237–3240.
- [46] F. M. Ramos, R. R. Rosa, C. R. Neto, M. J. A. Bolzan, L. D. Abreu Sa, H. F. Campos Velho, *Phys. A*, **295**:1–2 (2001), 250–253.
- [47] J. R. Bezerra, R. Silva, J. A. S. Lima, *Phys. A*, **322**:1–4 (2003), 256–266, arXiv:cond-mat/0201541.
- [48] В. С. Кирчанов, *ТМФ*, **156**:3 (2008), 444–453.
- [49] Z.-H. Feng, L.-Y. Liu, *Phys. A*, **389**:2 (2010), 237–241.
- [50] J. Du, *Phys. Lett. A*, **329**:4–5 (2004), 262–267, arXiv:cond-mat/0404602.

- [51] J. Du, *Phys. A*, **335**:1–2 (2004), 107–114.
- [52] R. M. Yulmetyev, F. M. Gafarov, D. G. Yulmetyeva, N. A. Emeljanova, *Phys. A*, **303**:3–4 (2002), 427–438.
- [53] R. M. Yulmetyev, N. A. Emeljanova, F. M. Gafarov, *Phys. A*, **341** (2004), 649–676.
- [54] A. R. Plastino, M. Casas, A. Plastino, *Phys. A*, **280**:3 (2000), 289–303.
- [55] R. K. Niven, *Chem. Eng. Sci.*, **61**:11 (2006), 3785–3790.
- [56] G. B. Bagci, *Phys. A*, **386**:1 (2007), 79–84.
- [57] A. G. Bashkirov, A. V. Vityazev, *Phys. A*, **277**:1 (2000), 136–145.
- [58] А. Г. Башкиров, *ТМФ*, **149**:2 (2006), 299–317.
- [59] P. Jizba, T. Arimitsu, *Ann. Phys.*, **312**:1 (2004), 17–59, arXiv:cond-mat/0207707.
- [60] А. Г. Башкиров, А. Д. Суханов, *ЖЭТФ*, **122**:3 (2002), 513–520.
- [61] A. G. Bashkirov, *Phys. A*, **340**:1–3 (2004), 153–162.
- [62] A. S. Parvan, T. S. Biró, *Phys. Lett. A*, **340**:5–6 (2005), 375–387.
- [63] A. S. Parvan, T. S. Biró, *Phys. Lett. A*, **374**:19–20 (2010), 1951–1957.
- [64] A. Figueiredo, M. A. Amato, T. M. R. Filho, *Phys. A*, **367** (2006), 191–206.
- [65] R. Luzzi, Á. R. Vasconcellos, J. G. Ramos, *Riv. Nuovo Cimento*, **30**:3 (2007), 95–158.
- [66] Á. R. Vasconcellos, J. G. Ramos, A. Gorenstein, M. U. Kleinke, T. G. Souza Cruz, R. Luzzi, *Internat. J. Modern Phys. B*, **20**:28 (2006), 4821–4841.
- [67] A. Vidiella-Barranco, H. Moya-Cessa, *Phys. Lett. A*, **279**:1–2 (2001), 56–60, arXiv:quant-ph/0002071.
- [68] G. J. Milburn, *Phys. Rev. A*, **44**:9 (1991), 5401–5406.
- [69] R. Bonifacio, S. Olivares, P. Tombesi, D. Vitali, *Phys. Rev. A*, **61**:5 (2000), 053802, 8 pp., arXiv:quant-ph/9911100.
- [70] G. Kaniadakis, *Phys. A*, **296**:3 (2001), 405–425, arXiv:cond-mat/0103467.
- [71] L. Borland, *Phys. Rev. E*, **57**:6 (1998), 6634–6642.
- [72] B. M. Boghosian, *Bras. J. Phys.*, **29**:1 (1999), 91–107, arXiv:cond-mat/9812154.
- [73] М. Б. Менский, *УФН*, **173**:11 (2003), 1199–1219.
- [74] G. Schaller, *Non-Equilibrium Master Equations*, Tech. Univ., Berlin, 2014.
- [75] В. В. Саргсян, З. Каноков, Г. Г. Адамян, Н. В. Антоненко, *ЭЧАЯ*, **41**:2 (2010), 330–433.
- [76] S. K. Nemirovskii, *Phys. Rep.*, **524**:3 (2013), 85–202.
- [77] G. Lindblad, *Commun. Math. Phys.*, **48**:2 (1976), 119–130.
- [78] G. Lindblad, *Rep. Math. Phys.*, **10**:3 (1976), 393–406.
- [79] H. Dekker, *Phys. Rep.*, **80**:1 (1981), 1–110.
- [80] A. Isar, A. Sandulescu, H. Scutaru, E. Stefanescu, W. Scheid, *Internat. J. Modern Phys. E*, **3**:2 (1994), 635–714, arXiv:quant-ph/0411189.

Поступила в редакцию 29.10.2014