Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Соловьев, Финслеровы N -спиноры с действительными компонентами, *ТМФ*, 2015, том 183, номер 3, 359–371

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8812>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.91.87.62

26 апреля 2023 г., 14:07:15

© 2015 г.

А. В. Соловьев*

ФИНСЛЕРОВЫ N -СПИНОРЫ С ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫМИ КОМПОНЕНТАМИ

Изучаются математические объекты, называемые финслеровыми N -спинорами над полем $\mathbb{R}$. Строится общая алгебраическая теория этих объектов. Показано, что финслеровы N -спиноры над полем $\mathbb{R}$ порождают две серии плоских псевдофинслеровых пространств $N(N+1)/2$ и $N(N-1)/2$ измерений. Произведено обобщение эпиморфизма $SL(2, \mathbb{R}) \rightarrow O_+^1(1, 2)$ на случай группы $SL(N, \mathbb{R})$. Детально рассмотрены примеры финслеровых N -спиноров над полем $\mathbb{R}$ при $N = 2, 3$.

Ключевые слова: гиперспинор, финслеров N -спинор, псевдофинслерово пространство, группа $SL(N, \mathbb{R})$.

DOI: 10.4213/tmf8812

1. ВВЕДЕНИЕ

В работах [1], [2] были введены *гиперспиноры*. Те же самые математические объекты под названием *финслеровых N -спиноров* совершенно независимо изучались в статьях [3], [4]. Общая алгебраическая теория финслеровых N -спиноров над полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел была построена в работе [5]. Геометрические и физические приложения теории финслеровых N -спиноров рассматривались в статьях [6]–[14].

Первоначальная мотивировка теории финслеровых N -спиноров состояла в следующем. Как известно, единые модели Калуцы–Клейна позволяют геометризовать калибровочные поля путем перехода от четырехмерного к многомерному псевдориманову пространству. С другой стороны, теория 2-спиноров, развитие которой было вдохновлено открытием квантово-механических волновых уравнений Паули и Дирака, обладает фундаментальным свойством: 2-спиноры порождают пространство Минковского, т. е. векторы пространства Минковского можно построить из 2-спиноров. В этом смысле 2-спиноры являются первичными по отношению к пространственно-временным векторам. Возникает естественный вопрос, что произойдет, если увеличить спинорную размерность и перейти от двухкомпонентных спиноров к многокомпонентным?

*Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, физический факультет, Москва, Россия. E-mail: a.v.solovyov@gmail.com

Действовать тут можно двумя способами. Во-первых, можно сохранить псевдоевклидов характер геометрии пространства, порождающегося N -компонентными спинорами. Но тогда придется отказаться от некоторых ключевых элементов алгебраической схемы теории 2-спиноров. Этот путь приводит к общепринятой, восходящей к Картану, теории многомерных спиноров, в которой $N = 2^n$ (здесь n – положительное целое число). Во-вторых, можно сохранить алгебраическую схему теории 2-спиноров. Но тогда придется отказаться от псевдоевклидова характера геометрии пространства, порождающегося N -компонентными обобщениями 2-спиноров. Этот путь приводит к теории финслеровых N -спиноров, в которой N может быть любым положительным целым числом, большим единицы.

Финслеровы N -спиноры над полем $\mathbb{C}$ порождают N^2 -мерное плоское псевдофинслерово пространство с метрикой, которая определяется однородным многочленом N -й степени относительно дифференциалов координат. Это обстоятельство и послужило причиной возникновения термина “финслеров N -спинор”. В простейшем случае, при $N = 2$, воспроизводится стандартная теория 2-спиноров, восходящая к ван дер Вардену. При $N > 2$ теория приобретает нетривиальный характер и уже с необходимостью оказывается финслеровой.

В моделях Калуцы–Клейна многомерный метрический тензор расщепляется на четырехмерный метрический тензор, векторные и скалярные поля. Аналогично многомерный вектор псевдофинслерова пространства, порождающегося финслеровыми N -спинорами, расщепляется на лоренцев вектор, майорановские спиноры и скаляры. Поэтому можно говорить о своеобразной геометризации майорановских спиноров. Простейший пример такого расщепления рассмотрен в конце статьи.

Удивительно, но до сих пор никто систематически не изучал финслеровы N -спиноры с действительными компонентами. Настоящая статья посвящена теории финслеровых N -спиноров над полем $\mathbb{R}$ действительных чисел и ее непосредственным геометрическим следствиям. С одной стороны, эта теория представляет собой частный случай теории финслеровых N -спиноров над полем $\mathbb{C}$ и поэтому является более простой. С другой стороны, что вообще характерно для алгебраических теорий над полем $\mathbb{R}$, здесь возникает большее разнообразие пространств, ассоциированных с финслеровыми N -спинорами.

В разделе 2 строится общая алгебраическая теория финслеровых N -спиноров над полем $\mathbb{R}$. В отличие от финслеровых N -спиноров над полем $\mathbb{C}$ финслеровы N -спиноры над полем $\mathbb{R}$ порождают не одну, а целых две серии плоских псевдофинслеровых пространств $N(N+1)/2$ и $N(N-1)/2$ измерений. Последующие два раздела статьи посвящены рассмотрению конкретных особенностей теории простейших финслеровых 2- и 3-спиноров над полем $\mathbb{R}$. Заключение содержит краткое обсуждение полученных в статье результатов.

2. ОБЩИЙ ФОРМАЛИЗМ

Пусть $\mathbf{RFS}^N$ – линейное пространство $N > 1$ измерений над полем $\mathbb{R}$ действительных чисел, а

$$[\cdot, \cdot, \dots, \cdot]: \underbrace{\mathbf{RFS}^N \times \mathbf{RFS}^N \times \dots \times \mathbf{RFS}^N}_{N \text{ множителей}} \rightarrow \mathbb{R} \quad (1)$$

есть ненулевой антисимметричный N -линейный функционал на $\mathbb{RFS}^N$. Последнее означает, что:

1) существуют такие $\xi_0, \eta_0, \dots, \lambda_0 \in \mathbb{RFS}^N$, что

$$[\xi_0, \eta_0, \dots, \lambda_0] = x_0 \neq 0 \quad (x_0 \in \mathbb{R}); \quad (2)$$

2) для любых $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N \in \mathbb{RFS}^N$ выполняются соотношения

$$[\xi_a, \xi_b, \dots, \xi_c] = \varepsilon_{ab\dots c} [\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N],$$

где $a, b, \dots, c = 1, 2, \dots, N$, а $\varepsilon_{ab\dots c}$ — N -мерный символ Леви-Чивиты, нормированный стандартным условием $\varepsilon_{12\dots N} = 1$;

3) для любых $\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2, \dots, \xi_N, \eta_N \in \mathbb{RFS}^N$ и $x \in \mathbb{R}$ выполняются равенства

$$\begin{aligned} [\xi_1, \dots, \xi_a + \eta_a, \dots, \xi_N] &= [\xi_1, \dots, \xi_a, \dots, \xi_N] + [\xi_1, \dots, \eta_a, \dots, \xi_N], \\ [\xi_1, \dots, x\xi_a, \dots, \xi_N] &= x[\xi_1, \dots, \xi_a, \dots, \xi_N], \end{aligned}$$

где a принимает значения $1, 2, \dots, N$.

Будем использовать следующую терминологию. Линейное пространство $\mathbb{RFS}^N$, снабженное функционалом (1) с перечисленными выше свойствами 1–3, называется *пространством финслеровых N -спиноров над полем $\mathbb{R}$* . Действительное число $[\xi, \eta, \dots, \lambda]$ называется *скалярным N -произведением* финслеровых N -спиноров $\xi, \eta, \dots, \lambda \in \mathbb{RFS}^N$. Оно имеет простой геометрический смысл ориентированного объема N -мерного параллелепипеда с образующими $\xi, \eta, \dots, \lambda$.

Следует отметить, что $\xi_0, \eta_0, \dots, \lambda_0$ линейно независимы. Действительно, если бы они были линейно зависимы, то один из этих финслеровых N -спиноров был бы линейной комбинацией остальных и в соответствии со свойствами 2, 3 скалярное N -произведение $[\xi_0, \eta_0, \dots, \lambda_0]$ обратилось бы в нуль. Но это противоречит равенству (2). Таким образом, $\xi_0, \eta_0, \dots, \lambda_0$ линейно независимы, т. е. образуют базис в пространстве $\mathbb{RFS}^N$.

Введем обозначения $\epsilon_1 = \xi_0$, $\epsilon_2 = \eta_0, \dots, \epsilon_N = \lambda_0/x_0$. Очевидно, упорядоченное множество $\{\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_N\}$ является базисом в $\mathbb{RFS}^N$. В силу равенства (2) и свойства 3 его элементы удовлетворяют условию

$$[\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_N] = 1. \quad (3)$$

Базисы в пространстве $\mathbb{RFS}^N$, для которых имеет место равенство (3), назовем *каноническими*. Они играют выделенную роль во всем развиваемом формализме и вполне аналогичны симплектическим базисам в симплектическом пространстве.

Пусть $\epsilon'_1, \epsilon'_2, \dots, \epsilon'_N$ — произвольные финслеровы N -спиноры над полем $\mathbb{R}$, а

$$\epsilon'_a = c_a^b \epsilon_b \quad (4)$$

— их разложения по каноническому базису $\{\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_N\}$; здесь $a, b = 1, 2, \dots, N$, $c_a^b \in \mathbb{R}$ и производится суммирование по повторяющемуся индексу b (далее мы всюду используем суммирование по дважды повторяющимся индексам). При помощи свойств 2, 3 и соотношений (3), (4) находим

$$[\epsilon'_1, \epsilon'_2, \dots, \epsilon'_N] = \det C_N, \quad (5)$$

где $C_N \equiv \|c_a^b\|$. Линейная (не)зависимость финслеровых N -спиноров $\epsilon'_1, \epsilon'_2, \dots, \epsilon'_N$ равносильна линейной (не)зависимости столбцов действительной $(N \times N)$ -матрицы C_N , поэтому $\{\epsilon'_1, \epsilon'_2, \dots, \epsilon'_N\}$ является базисом в $\mathbb{RFS}^N$ тогда и только тогда, когда $\det C_N \neq 0$. Кроме того, из формулы (5) следует, что $\{\epsilon'_1, \epsilon'_2, \dots, \epsilon'_N\}$ – канонический базис, если $\det C_N = 1$. Таким образом, когда матрица C_N пробегает группу $SL(N, \mathbb{R})$ действительных $(N \times N)$ -матриц с единичным определителем, соответствующий базис $\{\epsilon'_1, \epsilon'_2, \dots, \epsilon'_N\}$ пробегает множество $\mathbf{E}(\mathbb{RFS}^N)$ канонических базисов в $\mathbb{RFS}^N$.

Выразим скалярное N -произведение финслеровых N -спиноров над полем $\mathbb{R}$ через компоненты этих N -спиноров относительно произвольного канонического базиса $\{\epsilon_1, \dots, \epsilon_N\} \in \mathbf{E}(\mathbb{RFS}^N)$. Используя свойства 2, 3, соотношение (3), а также разложения $\xi = \xi^a \epsilon_a$, $\eta = \eta^b \epsilon_b$, $\lambda = \lambda^c \epsilon_c$, получаем

$$[\xi, \eta, \dots, \lambda] = \varepsilon_{ab\dots c} \xi^a \eta^b \dots \lambda^c, \quad (6)$$

где $\xi, \eta, \dots, \lambda \in \mathbb{RFS}^N$, $\xi^a, \eta^b, \dots, \lambda^c \in \mathbb{R}$, $a, b, \dots, c = 1, 2, \dots, N$. Ясно, что скалярное N -произведение (6) обращается в нуль тогда и только тогда, когда финслеровы N -спиноры $\xi, \eta, \dots, \lambda$ линейно зависимы.

В дальнейшем нам понадобятся некоторые линейные геометрические объекты в пространстве $\mathbb{RFS}^N$. В соответствии с общей концепцией [15] геометрический объект характеризуется не только своей размерностью (числом компонент), но и законом преобразования при переходе от одного базиса к другому. Само по себе наличие функционала (1) естественным образом выделяет в $\mathbb{RFS}^N$ канонические базисы и группу $SL(N, \mathbb{R})$. Этим мы и будем руководствоваться при определении важных для развиваемой теории тензороподобных геометрических объектов.

Рассмотрим отображение

$$\begin{aligned} S: \mathbf{E}(\mathbb{RFS}^N) &\rightarrow \mathbb{R}^{N^{k+m}}, \\ \{\epsilon_1, \dots, \epsilon_N\} &\mapsto S\{\epsilon_1, \dots, \epsilon_N\} = (S_{a_1\dots a_m}^{b_1\dots b_k} \{\epsilon_1, \dots, \epsilon_N\}) \end{aligned} \quad (7)$$

такое, что для любых канонических базисов $\{\epsilon_1, \dots, \epsilon_N\}$, $\{\epsilon'_1, \dots, \epsilon'_N\} \in \mathbf{E}(\mathbb{RFS}^N)$, связанных между собой соотношениями (4), имеют место формулы

$$S_{a_1\dots a_m}^{b_1\dots b_k} \{\epsilon'_1, \dots, \epsilon'_N\} = c_{a_1}^{e_1} \dots c_{a_m}^{e_m} d_{f_1}^{b_1} \dots d_{f_k}^{b_k} S_{e_1\dots e_m}^{f_1\dots f_k} \{\epsilon_1, \dots, \epsilon_N\}; \quad (8)$$

здесь все индексы независимо пробегает значения от 1 до N , d_b^a – действительные числа, удовлетворяющие условиям $c_a^b d_c^a = \delta_c^b$ (где δ_c^b – символ Кронекера), $\det \|c_b^a\| = \det \|d_b^a\| = 1$, а k и m – неотрицательные целые числа. Обращаем внимание на то, что отображение (7) определено только на канонических базисах пространства $\mathbb{RFS}^N$.

Всякое отображение (7), обладающее свойством (8), будем называть *финслеровым N -спинтензором валентности $\left[\begin{smallmatrix} k \\ m \end{smallmatrix} \right]$ над полем $\mathbb{R}$* . Операции сложения и умножения таких N -спинтензоров определяются стандартным способом: если S и T имеют одинаковую валентность $\left[\begin{smallmatrix} k \\ m \end{smallmatrix} \right]$, а U имеет валентность $\left[\begin{smallmatrix} p \\ r \end{smallmatrix} \right]$, то действительные числа

$$(S + T)_{a_1\dots a_m}^{b_1\dots b_k} \{\epsilon_1, \dots, \epsilon_N\} = S_{a_1\dots a_m}^{b_1\dots b_k} \{\epsilon_1, \dots, \epsilon_N\} + T_{a_1\dots a_m}^{b_1\dots b_k} \{\epsilon_1, \dots, \epsilon_N\}$$

являются компонентами суммы $\mathbf{S} + \mathbf{T}$, а действительные числа

$$(\mathbf{S} \otimes \mathbf{U})_{a_1 \dots a_{m+p}}^{b_1 \dots b_{k+p}} \{\epsilon_1, \dots, \epsilon_N\} = S_{a_1 \dots a_m}^{b_1 \dots b_k} \{\epsilon_1, \dots, \epsilon_N\} \cdot U_{a_{m+1} \dots a_{m+p}}^{b_{k+1} \dots b_{k+p}} \{\epsilon_1, \dots, \epsilon_N\}$$

– компонентами произведения $\mathbf{S} \otimes \mathbf{U}$ относительно произвольного канонического базиса $\{\epsilon_1, \dots, \epsilon_N\} \in \mathbf{E}(\mathbb{RFS}^N)$. Очевидно, все финслеровы N -спинтензоры валентности $\begin{bmatrix} k \\ m \end{bmatrix}$ образуют N^{k+m} -мерное линейное пространство над полем $\mathbb{R}$.

Пространства симметричных и антисимметричных финслеровых N -спинтензоров валентности $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ над полем $\mathbb{R}$ оказываются естественными носителями псевдофинслеровых геометрий. Продемонстрируем это в самом общем виде.

Пусть $\text{Sym}(N)$ – линейное пространство $D = N(N+1)/2$ измерений над полем $\mathbb{R}$, состоящее из финслеровых N -спинтензоров $\mathbf{X}$ валентности $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$, компоненты которых удовлетворяют условиям симметрии

$$X^{bc} \{\epsilon_1, \dots, \epsilon_N\} = X^{cb} \{\epsilon_1, \dots, \epsilon_N\} \quad (9)$$

для любого $\{\epsilon_1, \dots, \epsilon_N\} \in \mathbf{E}(\mathbb{RFS}^N)$. Пусть далее $\{\mathbf{E}_0, \mathbf{E}_1, \dots, \mathbf{E}_{D-1}\}$ – некоторый базис в пространстве $\text{Sym}(N)$, а $\{\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_N\}$ – некоторый канонический базис в пространстве $\mathbb{RFS}^N$. С каждым $\{\epsilon'_1, \epsilon'_2, \dots, \epsilon'_N\} \in \mathbf{E}(\mathbb{RFS}^N)$ свяжем базис $\{\mathbf{E}'_0, \mathbf{E}'_1, \dots, \mathbf{E}'_{D-1}\}$ в $\text{Sym}(N)$ такой, что

$$(E'_\alpha)^{bc} \{\epsilon'_1, \dots, \epsilon'_N\} = E_\alpha^{bc}, \quad (10)$$

где $E_\alpha^{bc} \equiv E_\alpha^{bc} \{\epsilon_1, \dots, \epsilon_N\}$, а $\alpha = 0, 1, \dots, D-1$. Иными словами, равенство (10) определяет отображение

$$\{\epsilon'_1, \epsilon'_2, \dots, \epsilon'_N\} \mapsto \{\mathbf{E}'_0, \mathbf{E}'_1, \dots, \mathbf{E}'_{D-1}\}$$

множества $\mathbf{E}(\mathbb{RFS}^N)$ в множество всех базисов пространства $\text{Sym}(N)$. Но согласно N -спинтензорному закону преобразования (8)

$$(E'_\alpha)^{bc} \{\epsilon_1, \dots, \epsilon_N\} = c_f^b c_g^c (E'_\alpha)^{fg} \{\epsilon'_1, \dots, \epsilon'_N\}. \quad (11)$$

Сравнивая равенства (10) и (11), получаем формулы

$$(E'_\alpha)^{bc} \{\epsilon_1, \dots, \epsilon_N\} = c_f^b c_g^c E_\alpha^{fg}, \quad (12)$$

связывающие между собой компоненты финслеровых N -спинтензоров $\mathbf{E}'_\alpha$ и $\mathbf{E}_\alpha$ относительно одного и того же базиса $\{\epsilon_1, \dots, \epsilon_N\} \in \mathbf{E}(\mathbb{RFS}^N)$.

Рассмотрим следующие разложения:

$$\mathbf{E}'_\alpha = L(C_N)_\alpha^\beta \mathbf{E}_\beta, \quad (13)$$

где $L(C_N)_\alpha^\beta \in \mathbb{R}$, а $\alpha, \beta = 0, 1, \dots, D-1$. Чтобы найти $L(C_N)_\alpha^\beta$ как функции от c_a^b , полезно ввести D финслеровых N -спинтензоров $\mathbf{E}^\alpha$ валентности $\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ таких, что

$$\text{свертка}(\mathbf{E}^\alpha \otimes \mathbf{E}_\beta) = \delta_\beta^\alpha. \quad (14)$$

Легко показать, что N -спинтензоры $\mathbf{E}^\alpha$ существуют, единственны и $E_{bc}^\alpha = E_{cb}^\alpha$ в обозначениях $E_{bc}^\alpha \equiv E_{bc}^\alpha \{\epsilon_1, \dots, \epsilon_N\}$. На основании соотношений (13) и (14) заключаем, что

$$L(C_N)_\beta^\alpha = \text{свертка}(\mathbf{E}^\alpha \otimes \mathbf{E}'_\beta). \quad (15)$$

С другой стороны, из равенств (12) следует, что

$$\text{свертка}(\mathbf{E}^\alpha \otimes \mathbf{E}'_\beta) = E_{bc}^\alpha c_f^b c_g^c E_\beta^{fg}. \quad (16)$$

Таким образом, согласно формулам (15) и (16) имеем

$$L(C_N)_\beta^\alpha = E_{bc}^\alpha c_f^b c_g^c E_\beta^{fg}. \quad (17)$$

Пусть $E^\alpha \equiv \|E_{bc}^\alpha\|^\top$, $E_\beta \equiv \|E_\beta^{fg}\|$, а $E'_\beta \equiv \|(E'_\beta)^{fg}\{\epsilon_1, \dots, \epsilon_N\}\|$, где значок $\top$ обозначает транспонирование. Тогда соотношения (12), (17) можно переписать в матричной форме как соответственно

$$\mathbf{E}'_\beta = C_N \mathbf{E}_\beta C_N^\top, \quad (18)$$

$$L(C_N)_\beta^\alpha = \text{tr}(\mathbf{E}^\alpha C_N \mathbf{E}_\beta C_N^\top). \quad (19)$$

Однако из (13) следует, что $\mathbf{E}'_\beta = L(C_N)_\beta^\gamma \mathbf{E}_\gamma$. Поэтому

$$C_N \mathbf{E}_\beta C_N^\top = L(C_N)_\beta^\gamma \mathbf{E}_\gamma. \quad (20)$$

Принимая во внимание равенства (19) и (20), немедленно получаем

$$L(B_N C_N)_\beta^\alpha = \text{tr}(\mathbf{E}^\alpha B_N C_N \mathbf{E}_\beta C_N^\top B_N^\top) = L(B_N)_\gamma^\alpha L(C_N)_\beta^\gamma \quad (21)$$

для любых $B_N, C_N \in SL(N, \mathbb{R})$.

Пусть $L(C_N) \equiv \|L(C_N)_\beta^\alpha\|$, а $FL(D, \mathbb{R}) \equiv \{L(C_N) \mid C_N \in SL(N, \mathbb{R})\}$. Тогда формула (21) означает, что $FL(D, \mathbb{R})$ – группа относительно матричного умножения, а отображение

$$L: SL(N, \mathbb{R}) \rightarrow FL(D, \mathbb{R}), \quad C_N \mapsto L(C_N) \quad (22)$$

есть эпиморфизм, так что, в частности, $L(1_N) = 1_D$ (здесь $1_N, 1_D$ – единичные матрицы соответствующих порядков) и $L(C_N^{-1}) = L(C_N)^{-1}$. Легко проверить, что ядро эпиморфизма (22) имеет вид

$$\ker L = \begin{cases} \pm 1_N & \text{при четном } N, \\ 1_N & \text{при нечетном } N. \end{cases} \quad (23)$$

Последнее обстоятельство кардинально отличает развиваемую в настоящей работе теорию от теории финслеровых N -спиноров над полем $\mathbb{C}$ [5].

Вернемся к соотношениям (13). Поскольку и $\{\mathbf{E}_0, \dots, \mathbf{E}_{D-1}\}$, и $\{\mathbf{E}'_0, \dots, \mathbf{E}'_{D-1}\}$ являются базисами в $\text{Sym}(N)$, произвольный вектор $\mathbf{X} \in \text{Sym}(N)$ может быть разложен двояким образом:

$$\mathbf{X} = X^\alpha \mathbf{E}_\alpha = (X')^\beta \mathbf{E}'_\beta, \quad (24)$$

где $X^\alpha, (X')^\beta \in \mathbb{R}$. Очевидно, что $(X')^\beta = L(C_N^{-1})_\alpha^\beta X^\alpha$. С другой стороны,

$$X^{bc} \{\epsilon_1, \dots, \epsilon_N\} = c_f^b c_g^c X^{fg} \{\epsilon'_1, \dots, \epsilon'_N\}$$

или, что то же самое,

$$\|X^{bc} \{\epsilon_1, \dots, \epsilon_N\}\| = C_N \|X^{fg} \{\epsilon'_1, \dots, \epsilon'_N\}\| C_N^\top. \quad (25)$$

Вспоминая, что $\det C_N = 1$ и вычисляя определитель от обеих сторон равенства (25), получаем, что

$$\det \|X^{bc}\{\epsilon_1, \dots, \epsilon_N\}\| = \det \|X^{fg}\{\epsilon'_1, \dots, \epsilon'_N\}\| \quad (26)$$

для любого $\{\epsilon'_1, \dots, \epsilon'_N\} \in \mathbf{E}(\mathbb{RFS}^N)$. Значит, формула (26) задает инвариантную числовую характеристику вектора $\mathbf{X}$, которую естественно обозначить через $\det \mathbf{X}$.

Таким образом, не ограничивая общности, можно вычислить $\det \mathbf{X}$ относительно базиса $\{\epsilon_1, \dots, \epsilon_N\} \in \mathbf{E}(\mathbb{RFS}^N)$. Согласно разложениям (24) и равенству (26) имеем $\det \mathbf{X} = \det(X^\alpha E_\alpha) = \det((X')^\beta E'_\beta)$. Однако из (18) немедленно следует, что $\det((X')^\beta E'_\beta) = \det(C_N(X')^\beta E_\beta C_N^T) = \det((X')^\beta E_\beta)$. Поэтому

$$\det \mathbf{X} = \det(X^\alpha E_\alpha) = \det((X')^\alpha E_\alpha). \quad (27)$$

С другой стороны,

$$\det(X^\alpha E_\alpha) = G_{\alpha\beta\dots\gamma} \underbrace{X^\alpha X^\beta \dots X^\gamma}_{N \text{ множителей}}, \quad (28)$$

где действительные коэффициенты $G_{\alpha\beta\dots\gamma}$ полностью определяются выбором базиса $\{\mathbf{E}_0, \dots, \mathbf{E}_{D-1}\}$ в $\text{Sym}(N)$. Кстати сказать, они симметричны по всем своим индексам и могут быть представлены явными формулами

$$G_{\alpha\beta\dots\gamma} = \frac{1}{N!} \varepsilon_{ij\dots k} \varepsilon_{ab\dots c} E_\alpha^{ia} E_\beta^{jb} \dots E_\gamma^{kc}.$$

В силу соотношений (27) и (28)

$$\det \mathbf{X} = G_{\alpha\beta\dots\gamma} X^\alpha X^\beta \dots X^\gamma = G_{\alpha\beta\dots\gamma} (X')^\alpha (X')^\beta \dots (X')^\gamma, \quad (29)$$

т. е. $\det \mathbf{X}$ *форминвариантен* относительно преобразований из группы $FL(D, \mathbb{R})$. Необходимо отметить, что (29) справедливо для любого базиса $\{\mathbf{E}'_0, \dots, \mathbf{E}'_{D-1}\}$, элементы которого связаны с элементами базиса $\{\mathbf{E}_0, \dots, \mathbf{E}_{D-1}\}$ соотношениями (13).

Обозначая $\sqrt[N]{\det \mathbf{X}}$ через $|\mathbf{X}|$ и используя формулу (28), получаем (в базисе $\{\mathbf{E}_0, \dots, \mathbf{E}_{D-1}\}$)

$$|\mathbf{X}|^N = \det \mathbf{X} = G_{\alpha\beta\dots\gamma} \underbrace{X^\alpha X^\beta \dots X^\gamma}_{N \text{ множителей}}, \quad (30)$$

где $G_{\alpha\beta\dots\gamma}$ симметричны по всем индексам и, как это следует из (24)–(26), не зависят от выбора канонического базиса в $\mathbb{RFS}^N$. Формула (30) обладает важным свойством: $|k\mathbf{X}| = k|\mathbf{X}|$ для любых $k > 0$ и $\mathbf{X} \in \text{Sym}(N)$. Сказанное наталкивает на мысль об интерпретации введенной выше величины $|\mathbf{X}|$ как длины вектора $\mathbf{X} \in \text{Sym}(N)$ в некоторой обобщенной геометрии. Такие геометрии действительно существуют и называются финслеровыми [16]–[18]. Однако собственно финслерово многообразие характеризуется тем, что касательное пространство к нему в каждой точке является нормированным. Этого нельзя сказать о линейном пространстве $\text{Sym}(N)$ по отношению к длине $|\mathbf{X}|$. В самом деле, алгебраическая форма N -й степени (30), вообще говоря, знакопеременна, т. е. вполне может оказаться, что $|\mathbf{X}| \not\geq 0$. Кроме того, для так определенной длины не выполняется неравенство треугольника. Поэтому здесь мы имеем дело с *псевдофинслеровым пространством*, причем плоским, ибо коэффициенты $G_{\alpha\beta\dots\gamma}$ не зависят от координат. Таким образом, равенство (30) корректно определяет на $\text{Sym}(N)$ структуру D -мерного плоского псевдофинслерова пространства.

Что касается линейного пространства $\text{Asym}(N)$, состоящего из антисимметричных финслеровых N -спинтензоров валентности $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ над полем $\mathbb{R}$, то для него все рассуждения почти дословно повторяют изложенную выше теорию пространства $\text{Sym}(N)$. Отличия проявляются лишь в трех местах. Во-первых, условия симметрии (9) необходимо заменить условиями антисимметрии:

$$X^{bc}\{\epsilon_1, \dots, \epsilon_N\} = -X^{cb}\{\epsilon_1, \dots, \epsilon_N\}.$$

Во-вторых, размерность пространства $\text{Asym}(N)$ задается как $D = N(N-1)/2$. Наконец, наиболее существенные изменения затрагивают определение длины вектора $\mathbf{X} \in \text{Asym}(N)$. Дело в том, что определитель любой антисимметричной матрицы N -го порядка является точным квадратом: $\det X = (\text{pf } X)^2$, где $\text{pf } X$ – пфаффиан матрицы X [19]. С другой стороны, при нечетном N всегда $\det X = 0$. Поэтому определить длину $|\mathbf{X}|$ можно только при четном N , и делается это, очевидно, с помощью формулы

$$|\mathbf{X}| = (\text{pf } X)^{2/N}, \quad X \equiv \|X^{bc}\{\epsilon_1, \dots, \epsilon_N\}\|.$$

Таким образом, вместо (30) получаем форму степени $N/2$:

$$|\mathbf{X}|^{N/2} = \text{pf } X = \tilde{G}_{\alpha\beta\dots\gamma} \underbrace{X^\alpha X^\beta \dots X^\gamma}_{N/2 \text{ множителей}}, \quad (31)$$

где N – четное число, а симметричные по всем индексам коэффициенты $\tilde{G}_{\alpha\beta\dots\gamma}$ полностью определяются выбором базиса $\{\mathbf{E}_0, \dots, \mathbf{E}_{D-1}\}$ в пространстве $\text{Asym}(N)$ и, как показывает прямое вычисление пфаффиана, имеют вид

$$\tilde{G}_{\alpha\dots\gamma} = \frac{1}{2^{N/2}(N/2)!} \varepsilon_{ab\dots cd} E_\alpha^{ab} \dots E_\gamma^{cd}.$$

В итоге приходим к выводу, что формула (31) корректно определяет на $\text{Asym}(N)$ структуру D -мерного плоского псевдофинслерова пространства.

В следующих двух разделах мы проиллюстрируем изложенный формализм простейшими примерами финслеровых 2- и 3-спинов над полем $\mathbb{R}$.

3. ФИНСЛЕРОВЫ 2-СПИНОРЫ НАД ПОЛЕМ $\mathbb{R}$

Рассмотрим применение общего формализма при $N = 2$. В этом случае функционал (1) является обычным симплектическим скалярным умножением на пространстве $\mathbb{R}\text{FS}^2$. Следовательно, $\mathbb{R}\text{FS}^2$ изоморфно пространству стандартных 2-спинов над полем $\mathbb{R}$. В физике такие спиноры называют майорановскими. Приведем некоторые важные для дальнейшего изложения сведения о майорановских 2-спинорах.

Прежде всего, для любых $\{\epsilon_1, \epsilon_2\}, \{\epsilon'_1, \epsilon'_2\} \in \mathbf{E}(\mathbb{R}\text{FS}^2)$ и $\xi = \xi^a \epsilon_a = (\xi')^b \epsilon'_b \in \mathbb{R}\text{FS}^2$ из (4) вытекают соотношения

$$(\xi')^a = d_b^a \xi^b, \quad (32)$$

где $(\xi')^a, \xi^b \in \mathbb{R}$, $c_b^a d_c^b = \delta_c^a$ и $a, b, c = 1, 2$. Само собой разумеется, что матрицы $C_2, D_2 \in SL(2, \mathbb{R})$ и $D_2 = C_2^{-1}$ в обозначениях $C_2 \equiv \|c_b^a\|$, $D_2 \equiv \|d_b^a\|$. Аналогичным образом из (6) получаем формулу

$$[\xi, \eta] = \varepsilon_{ab} \xi^a \eta^b = \xi^1 \eta^2 - \xi^2 \eta^1 \quad (33)$$

для скалярного произведения майорановских 2-спиноров ξ и η относительно канонического (в данном случае симплектического) базиса $\{\epsilon_1, \epsilon_2\} \in \mathbf{E}(\mathbb{R}\mathbb{F}\mathbb{S}^2)$.

При $N = 2$ как пространство $\text{Sym}(2)$, так и пространство $\text{Asym}(2)$ обладают нетривиальными геометриями в смысле предыдущего раздела статьи. Рассмотрим сначала трехмерное пространство $\text{Sym}(2)$.

Положим

$$E^\alpha = \frac{1}{2}\sigma^\alpha, \quad E_\beta = \sigma_\beta, \quad (34)$$

где $\alpha, \beta = 0, 1, 2$, $\sigma^\alpha = \sigma_\alpha$ и

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (35)$$

– единичная матрица и две из трех матриц Паули, имеющие действительные элементы. Поскольку $\text{tr}(\sigma^\alpha \sigma_\beta) = 2\delta^\alpha_\beta$, такой выбор гарантирует выполнение условий (14). Из соотношений (13), (21) и (24) следует, что

$$(X')^\alpha = L(D_2)_\beta^\alpha X^\beta \quad (36)$$

для любого вектора $X \in \text{Sym}(2)$. Используя формулы (19), (34) и (35), получаем

$$L(D_2)_\beta^\alpha = \frac{1}{2} \text{tr}(\sigma^\alpha D_2 \sigma_\beta D_2^\top) \quad (37)$$

или, в явном виде,

$$\begin{aligned} L(D_2)_0^0 &= \frac{1}{2}(d_1^1 d_1^1 + d_2^1 d_2^1 + d_1^2 d_1^2 + d_2^2 d_2^2), \\ L(D_2)_1^0 &= \frac{1}{2}(d_1^1 d_2^1 + d_1^2 d_2^2 + d_2^1 d_1^1 + d_2^2 d_1^2), \\ L(D_2)_2^0 &= \frac{1}{2}(d_1^1 d_1^1 + d_1^2 d_1^2 - d_2^1 d_2^1 - d_2^2 d_2^2), \\ L(D_2)_0^1 &= \frac{1}{2}(d_1^1 d_1^2 + d_1^2 d_1^1 + d_2^1 d_2^2 + d_2^2 d_2^1), \\ L(D_2)_1^1 &= \frac{1}{2}(d_1^1 d_2^2 + d_1^2 d_2^1 + d_2^1 d_1^2 + d_2^2 d_1^1), \\ L(D_2)_2^1 &= \frac{1}{2}(d_1^1 d_1^2 + d_1^2 d_1^1 - d_2^1 d_2^2 - d_2^2 d_2^1), \\ L(D_2)_0^2 &= \frac{1}{2}(d_1^1 d_1^1 - d_1^2 d_1^2 + d_2^1 d_2^1 - d_2^2 d_2^2), \\ L(D_2)_1^2 &= \frac{1}{2}(d_1^1 d_2^1 - d_1^2 d_2^2 + d_2^1 d_1^1 - d_2^2 d_1^2), \\ L(D_2)_2^2 &= \frac{1}{2}(d_1^1 d_1^1 - d_1^2 d_1^2 - d_2^1 d_2^1 + d_2^2 d_2^2). \end{aligned} \quad (38)$$

Кроме того, из соотношений (28), (30), (34) и (35) следует, что

$$|X|^2 = G_{\alpha\beta} X^\alpha X^\beta = (X^0)^2 - (X^1)^2 - (X^2)^2.$$

В силу этого равенства и формулы (29) пространство $\text{Sym}(2)$ изоморфно трехмерному пространству Минковского, $FL(3, \mathbb{R}) = O_+^\uparrow(1, 2)$, а (22) совпадает с известным

эпиморфизмом $SL(2, \mathbb{R}) \rightarrow O_+^\uparrow(1, 2)$ [19]. При этом равенства (36)–(38) задают трехмерное собственное ортохронное преобразование Лоренца для любой $D_2 \in SL(2, \mathbb{R})$.

Что касается пространства $\text{Asym}(2)$, то здесь ситуация совсем простая. Оно изоморфно одномерному евклидову пространству. Действительно, положим

$$E^0 = -\frac{1}{2}E_0, \quad E_0 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (39)$$

Тогда $\text{tr}(E^0 E_0) = 1$, и можно воспользоваться формулой (19), что вместе с (39) дает для коэффициента линейного преобразования

$$(X')^0 = L(D_2)_0^0 X^0 \quad (40)$$

единственной компоненты вектора $\mathbf{X} \in \text{Asym}(2)$ следующее выражение:

$$L(D_2)_0^0 = \text{tr}(E^0 D_2 E_0 D_2^\top) = \det D_2 = 1. \quad (41)$$

Кроме того, из соотношений (28), (31) и (39) получаем

$$|\mathbf{X}|^2 = \det(X^0 E_0) = (X^0)^2. \quad (42)$$

В силу этого равенства пространство $\text{Asym}(2)$ изоморфно евклидовой прямой. Поскольку преобразование (40), (41) является тождественным, эпиморфизм (22) превращается в одномерное тривиальное представление группы $SL(2, \mathbb{R})$.

Завершая этот раздел, перепишем формулу (33) для скалярного произведения майорановских 2-спиноров в эквивалентном матричном виде

$$[\xi, \eta] = 2\xi^\top E^0 \eta, \quad (43)$$

где $\xi^\top = (\xi^1, \xi^2)$ – матрица-строка, $\eta = (\eta^1, \eta^2)^\top$ – матрица-столбец, а E^0 – квадратная матрица из (39).

4. ФИНСЛЕРОВЫ 3-СПИНОРЫ НАД ПОЛЕМ $\mathbb{R}$

Рассмотрим теперь по-настоящему нетривиальный случай финслеровых N -спиноров над полем $\mathbb{R}$, возникающий при $N = 3$. Кроме того, осуществим размерную редукцию соответствующей теории.

Начнем со следующих замечаний. Для любых $\{\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3\}, \{\epsilon'_1, \epsilon'_2, \epsilon'_3\} \in \mathbf{E}(\text{RFS}^3)$ и $\xi = \xi^a \epsilon_a = (\xi')^b \epsilon'_b \in \text{RFS}^3$ из (4) вытекают равенства $(\xi')^a = d_b^a \xi^b$, где $(\xi')^a, \xi^b \in \mathbb{R}$, $c_b^a d_c^b = \delta_c^a$ и $a, b, c = 1, 2, 3$. Ясно, что матрицы $C_3, D_3 \in SL(3, \mathbb{R})$ и $D_3 = C_3^{-1}$ в обозначениях $C_3 \equiv \|c_b^a\|$, $D_3 \equiv \|d_b^a\|$. Аналогичным образом из (6) получаем формулу $[\xi, \eta, \zeta] = \varepsilon_{abc} \xi^a \eta^b \zeta^c$ для скалярного 3-произведения финслеровых 3-спиноров ξ, η и ζ над полем $\mathbb{R}$ относительно канонического базиса $\{\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3\} \in \mathbf{E}(\text{RFS}^3)$.

В соответствии с общим формализмом пространство $\text{Sym}(3)$ является шестимерным плоским псевдофинслеровым пространством. Исследуем подробнее его геометрию.

По аналогии с предыдущим разделом положим

$$E^A = \frac{1}{2}\lambda^A, \quad E_B = \lambda_B, \quad (44)$$

где $A, B = 0, 1, \dots, 5$, $\lambda^A = \lambda_A$ (здесь $A \neq 5$), $\lambda^5 = 2\lambda_5$ и матрицы λ_A суть

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \lambda_3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (45)$$

($\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ и λ_4 – матрицы Гелл-Манна, имеющие действительные элементы). Поскольку $\text{tr}(\lambda^A \lambda_B) = 2\delta_B^A$, выбор матриц (44) обеспечивает выполнение условий (14). Из формул (13), (21) и (24) следует, что

$$(X')^A = L(D_3)^A_B X^B \quad (46)$$

для любого вектора $X \in \text{Sym}(3)$. Используя соотношения (19), (44) и (45), получаем

$$L(D_3)^A_B = \frac{1}{2} \text{tr}(\lambda^A D_3 \lambda_B D_3^\top). \quad (47)$$

Кроме того, из (28), (30), (44) и (45) вытекает формула

$$\begin{aligned} |X|^3 &= G_{AB\Gamma} X^A X^B X^\Gamma = [(X^0)^2 - (X^1)^2 - (X^2)^2] X^5 - \\ &- X^0 [(X^3)^2 + (X^4)^2] + 2X^1 X^3 X^4 + X^2 [(X^3)^2 - (X^4)^2]. \end{aligned} \quad (48)$$

В силу соотношения (29) куб псевдофинслеровой длины вектора $X \in \text{Sym}(3)$, который задается выражением (48), *форминвариантен* относительно преобразований (46), (47) из группы $FL(6, \mathbb{R})$. Последняя в этом смысле вполне аналогична группе $FL(3, \mathbb{R}) = O_+^\uparrow(1, 2)$, действующей на пространстве $\text{Sym}(2)$.

Чтобы разобраться со смыслом отдельных компонент вектора $X \in \text{Sym}(3)$, посмотрим на него с точки зрения “трехмерного наблюдателя”, т. е. осуществим размерную редукцию. Выделим в $SL(3, \mathbb{R})$ подгруппу, изоморфную $SL(2, \mathbb{R})$ и состоящую из матриц вида

$$D_3^{(1)} = \begin{pmatrix} d_1^1 & d_2^1 & 0 \\ d_1^2 & d_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \det D_3^{(1)} = 1. \quad (49)$$

Непосредственные вычисления с использованием формул (45)–(47) и (49) показывают, что $FL(6, \mathbb{R})$ -преобразование $(X')^A = L(D_3^{(1)})^A_B X^B$ представимо в следующей форме:

$$(X')^\alpha = L(D_2)^\alpha_\beta X^\beta, \quad (X')^{a+2} = d_b^a X^{b+2}, \quad (X')^5 = X^5, \quad (50)$$

где $\alpha, \beta = 0, 1, 2$, $D_2 \in SL(2, \mathbb{R})$ и $a, b = 1, 2$. Нетрудно видеть, что первое равенство в (50) совпадает с трехмерным преобразованием Лоренца (36)–(38), а второе (после введения обозначений $(\xi')^a = (X')^{a+2}$ и $\xi^b = X^{b+2}$, где $a, b = 1, 2$) – с преобразованием (32) компонент майорановского 2-спинора. Преобразования (50) образуют трехпараметрическую неабелеву подгруппу группы $FL(6, \mathbb{R})$.

Таким образом, для “трехмерного наблюдателя” шестимерный вектор X^A выглядит как совокупность трехмерного лоренцева вектора X^α , майорановского 2-спинора $\xi^a = X^{a+2}$ и скаляра X^5 . В этом заключается простой геометрический смысл

компонент вектора $\mathbf{X} \in \text{Sym}(3)$ относительно базиса $\{\mathbf{E}_0, \mathbf{E}_1, \dots, \mathbf{E}_5\}$ шестимерного плоского псевдофинслерова пространства $\text{Sym}(3)$.

Подобно формуле (43) для скалярного произведения майорановских 2-спиноров, формулу (48) для куба псевдофинслеровой длины вектора $\mathbf{X} \in \text{Sym}(3)$ теперь можно переписать в терминах трехмерных величин:

$$|\mathbf{X}|^3 = G_{\alpha\beta} X^\alpha X^\beta X^5 - G_{\alpha\beta} X^\alpha \xi^\top \sigma^\beta \xi, \quad (51)$$

где $\|G_{\alpha\beta}\| = \text{diag}(1, -1, -1)$ – матрица, составленная из компонент метрического тензора трехмерного пространства Минковского относительно псевдоортонормированного базиса, $\xi^\top = (X^3, X^4)$ – матрица-строка, $\xi = (X^3, X^4)^\top$ – матрица-столбец, а $\sigma^\beta = \sigma_\beta$ – матрицы (35).

Что касается пространства $\text{Asym}(3)$, то его геометрия тривиальна. Действительно, $N = 3$ является нечетным числом, так что формула (31) в данном случае неприменима. Но даже если попытаться использовать формулу (30), мы получим $|\mathbf{X}|^3 \equiv 0$, ибо матрица $X = \|X^{bc}\{\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3\}\|$ антисимметрична.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей статье рассмотрены алгебраические аспекты теории финслеровых N -спиноров над полем $\mathbb{R}$. Сформулированы общие определения финслерова N -спинора и финслерова N -спинтензора произвольной валентности над полем $\mathbb{R}$. Скалярное N -произведение финслеровых N -спиноров над полем $\mathbb{R}$ обладает простым геометрическим смыслом ориентированного объема N -мерного параллелепипеда, образованного данными N -спинорами.

Показано, что финслеровы N -спинтензоры валентности $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ над полем $\mathbb{R}$ порождают две серии плоских псевдофинслеровых пространств: $\text{Sym}(N)$ и $\text{Asym}(N)$ (где $N = 2, 3, \dots$). Пространство $\text{Sym}(N)$ имеет $N(N+1)/2$ измерений и характеризуется метрикой (30). Пространство $\text{Asym}(N)$ имеет $N(N-1)/2$ измерений и характеризуется метрикой (31) при четном N (при нечетном N его геометрия тривиальна).

Построено обобщение (22) хорошо известного группового эпиморфизма

$$SL(2, \mathbb{R}) \rightarrow O_+^\uparrow(1, 2)$$

и найдено его ядро (23). При четном N ядро эпиморфизма (22) состоит из двух элементов $\pm 1_N$, а при нечетном N – из одного элемента 1_N . Образ эпиморфизма (22) есть группа $FL(D, \mathbb{R})$ (где $D = N(N \pm 1)/2$), сохраняющая псевдофинслеровы метрики (30) и (31). В этом смысле $FL(D, \mathbb{R})$ является псевдофинслеровым обобщением группы Лоренца. Формулы (17) и (19) дают явные выражения для элементов матриц из группы $FL(D, \mathbb{R})$.

Изучены простейшие финслеровы N -спиноры над полем $\mathbb{R}$, возникающие при $N = 2, 3$. В частности, оказалось, что финслеровы 2-спиноры над полем $\mathbb{R}$ совпадают с майорановскими 2-спинорами, $\text{Sym}(2)$ изоморфно трехмерному пространству Минковского, а $\text{Asym}(2)$ изоморфно евклидовой прямой. Кроме того,

$$FL(3, \mathbb{R}) = O_+^\uparrow(1, 2), \quad FL(1, \mathbb{R}) = SO(1).$$

Наконец, осуществлена размерная редукция формулы (48) для куба псевдофинслеровой длины шестимерного вектора $\mathbf{X} \in \text{Sym}(3)$. Это привело к компактной

формуле (51) и выводу, что “трехмерный наблюдатель” воспринимает шестимерный псевдофинслеров вектор как совокупность трехмерного лоренцева вектора, майорановского 2-спинора и скаляра. Последнее видно непосредственно из соотношений (50).

Благодарности. Автор благодарит профессора Ю. С. Владимирова за многолетнее плодотворное сотрудничество и Т. Г. Кирильцеву за вдохновляющие обсуждения вопросов, связанных с геометрией пространства $Asym(N)$. Автор также благодарен академику А. А. Славнову за создание доброжелательной и благоприятствующей научным исследованиям атмосферы на руководимой им кафедре теоретической физики физического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова.

Список литературы

- [1] D. Finkelstein, *Phys. Rev. Lett.*, **56**:15 (1986), 1532–1533.
- [2] D. Finkelstein, S. R. Finkelstein, C. Holm, *Internat. J. Theor. Phys.*, **25**:4 (1986), 441–463.
- [3] Ю. С. Владимиров, А. В. Соловьев, “Физическая структура ранга $(4, 4; b)$ и трехкомпонентные спиноры”, *Системология и методологические проблемы информационно-логических систем*, Вычислительные системы, **135**, Институт математики СО АН СССР, Новосибирск, 1990, 44–66.
- [4] А. В. Соловьев, “К теории бинарных физических структур ранга $(5, 5; b)$ и выше”, *Системология и методологические проблемы информационно-логических систем*, Вычислительные системы, **135**, Институт математики СО АН СССР, Новосибирск, 1990, 67–77.
- [5] A. V. Solov'yov, Yu. S. Vladimirov, *Internat. J. Theor. Phys.*, **40**:8 (2001), 1511–1523.
- [6] D. Finkelstein, S. R. Finkelstein, C. Holm, *Phys. Rev. Lett.*, **59**:12 (1987), 1265–1266.
- [7] S. R. Finkelstein, *Internat. J. Theor. Phys.*, **27**:2 (1988), 251–272.
- [8] C. Holm, *J. Math. Phys.*, **29**:4 (1988), 978–986.
- [9] C. Holm, *J. Math. Phys.*, **29**:10 (1988), 2273–2279.
- [10] C. Holm, *Internat. J. Theor. Phys.*, **29**:1 (1990), 23–36.
- [11] D. C. Honeycutt, *Internat. J. Theor. Phys.*, **30**:12 (1991), 1613–1644.
- [12] D. C. Brody, L. P. Hughston, *Proc. R. Soc. Lond. Ser. A*, **461**:2061 (2005), 2679–2699, arXiv: gr-qc/0406121.
- [13] A. V. Solov'ev, *Russ. J. Math. Phys.*, **13**:4 (2006), 466–472.
- [14] A. V. Solov'yov, *J. Math. Sci.*, **172**:6 (2011), 894–900.
- [15] П. К. Рашевский, *Риманова геометрия и тензорный анализ*, ЛКИ, М., 2010.
- [16] S.-S. Chern, Z. Shen, *Riemann–Finsler Geometry*, Nankai Tracts in Mathematics, **6**, World Sci., Singapore, 2005.
- [17] M. Matsumoto, S. Numata, *Tensor (N. S.)*, **33**:2 (1979), 153–162.
- [18] H. Shimada, *Tensor (N. S.)*, **33**:3 (1979), 365–372.
- [19] М. М. Постников, *Лекции по геометрии. Семестр II. Линейная алгебра*, Наука, М., 1986.

Поступила в редакцию 29.10.2014,
после доработки 5.02.2015