Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. И. Пронин, К. В. Степаньянц, Инстантонный вклад в аномалию R-симметрии, *ТМФ*, 1998, том 115, номер 3, 402–409

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf882>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 08:16:06

© 1998 г.

П. И. Пронин*, К. В. Степаньянц†

ИНСТАНТОННЫЙ ВКЛАД В АНОМАЛИЮ R-СИММЕТРИИ

Исследуется инстантонный вклад в аномалию R-симметрии $N = 2$ суперсимметричной теории Янга–Миллса, связанный с неинвариантностью меры интегрирования по коллективным координатам. Результат явного вычисления одноинстантонной поправки согласуется с точным результатом. Производится качественное исследование многоинстантонных вкладов.

1. ВВЕДЕНИЕ

Роль непертурбативных вкладов в квантово-полевые аномалии, методы их вычисления и сравнения являются малоисследованной областью. До недавнего времени небольшое число статей (см. [1]) скорее просто указывало на принципиальную возможность существования таких вкладов. Так, в [1] было показано, что в теории Янга–Миллса инстантоны могут давать вклад в аномалии. Точный непертурбативный результат для $U(1)_R$ -аномалии в $N = 2$ суперсимметричной теории Янга–Миллса удалось получить косвенными методами [2] на основе результатов Зайберга и Виттена [3, 4]. В то же время до настоящего момента не было разработано и предложено регулярных способов вычисления непертурбативных вкладов, аналогичных методу Фуджикавы [5] в теории возмущений. Однако, по нашему мнению, непертурбативные методы могут существенно отличаться от него, т.к. физические эффекты, лежащие в их основе, принципиально иные.

Поскольку непертурбативный вклад в эффективное действие дают инстантоны [6–8], мы предлагаем в данной работе метод вычисления одно- и многоинстантонных вкладов, основанный на неинвариантности меры функционального интеграла.

Основное внимание уделено вычислению одноинстантонного вклада в аномалию R-симметрии в $N = 2$ суперсимметричной теории Янга–Миллса. Показано, что эта аномалия связана с неинвариантностью меры интегрирования по коллективным координатам (как фермионным, так и бозонным). Для учета многоинстантонных вкладов предложен качественный анализ и показано, что вклад можно вычислить методами, аналогичными одноинстантонному примеру.

*Московский государственный университет, Москва, Россия. E-mail:pronin@theor.phys.msu.su

†Московский государственный университет, Москва, Россия. E-mail:stepan@theor.phys.msu.su

Статья организована следующим образом. В разделе 2 мы кратко напоминаем основные сведения о точных результатах в $N = 2$ суперсимметричных теориях. В разделе 3 дается краткое изложение техники вычислений инстантонных вкладов в эффективное действие, обобщение и развитие которой, данное в разделе 4, позволяет находить низшие непертурбативные поправки в аномалию. Здесь же вычислен одноинстантонный вклад в аномалию R-симметрии и показана его согласованность с точным результатом. Многоинстантонные поправки анализируются в разделе 5. В заключении кратко проанализированы основные результаты.

2. $N = 2$ СУПЕРСИММЕТРИЧНАЯ ТЕОРИЯ ЯНГА–МИЛЛСА

$N = 2$ суперсимметричная теория Янга–Миллса в суперпространстве описывается действием

$$S = \frac{1}{16\pi} \text{tr} \text{Im} \left(\tau \int d^4x d^2\theta_1 d^2\theta_2 \frac{1}{2} \Phi^2 \right), \quad (1)$$

где использованы следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \Phi &= -ie\Phi^a T^a, \quad \text{tr} T^a T^b = \frac{1}{2} \delta^{ab}, \\ \tau &= \frac{4\pi i}{e^2}, \quad y^\mu = x^\mu + \frac{i}{2} \bar{\theta}_i \gamma^\mu \gamma_5 \theta_i, \\ \Phi(y, \theta_1, \theta_2) &= \phi(y, \theta_1) - i\bar{\theta}_2(1 + \gamma_5)W(y, \theta_1) + \frac{1}{2} \bar{\theta}_2(1 + \gamma_5)\theta_2 G(y, \theta_1), \\ \phi(y, \theta_1) &= P(y) + iS(y) + \bar{\theta}_1(1 + \gamma_5)\psi_1(y) + \frac{1}{2} \bar{\theta}_1(1 + \gamma_5)\theta_1 f(y), \\ W(y, \theta_1) &= \frac{1}{2}(1 + \gamma_5) \times \\ &\times \left(i\psi_2(y) + i\theta_1 D(y) + \frac{1}{2} \Sigma_{\mu\nu} \theta_1 F_{\mu\nu}(y) + \frac{1}{2} \bar{\theta}_1(1 + \gamma_5)\theta_1 \gamma^\mu D_\mu \psi_2(y) \right), \\ G(y, \theta_1) &= \frac{1}{2} \int d^2\bar{\theta}_1 e^{2V} \phi^+ e^{-2V}, \\ V(x, \theta_1) &= -\frac{i}{2} \bar{\theta}_1 \gamma^\mu \gamma_5 \theta_1 A_\mu(x) + i(\bar{\theta}_1 \theta_1)(\bar{\theta}_1 \gamma_5 \psi_2(x)) + \frac{i}{4} (\bar{\theta}_1 \theta_1)^2 D. \end{aligned}$$

Наиболее общий вид действия в теории с $N = 2$ суперсимметрией есть

$$\Gamma = \frac{1}{16\pi} \text{Im} \int d^4x d^2\theta_1 d^2\theta_2 F(\Phi), \quad (2)$$

где функция F называется препотенциалом.

В данной работе мы будем рассматривать только случай группы $SU(2)$, которая спонтанно нарушается до $U(1)$.

Действие (1) инвариантно относительно суперсимметричных и суперконформных преобразований

$$\begin{aligned} \delta\Phi &= \bar{\epsilon}_i \left(\frac{\partial}{\partial \bar{\theta}_i} + i\gamma^\mu \theta^i \frac{\partial}{\partial x_\mu} \right) \Phi, \\ \delta\Phi &= \bar{\beta}_i \gamma_\nu x^\nu \left(\frac{\partial}{\partial \bar{\theta}_i} + i\gamma^\mu \theta^i \frac{\partial}{\partial x_\mu} \right) \Phi. \end{aligned}$$

Инвариантность относительно преобразований из группы $U(1)_R$

$$\Phi(\theta) \rightarrow e^{2i\alpha} \Phi(e^{-i\alpha\gamma_5}\theta),$$

которая в терминах компонентных полей переписывается как

$$\begin{aligned} P &\rightarrow P \cos 2\alpha - S \sin 2\alpha, \\ S &\rightarrow S \cos 2\alpha + P \sin 2\alpha, \\ \psi_i &\rightarrow (\cos \alpha + i\gamma_5 \sin \alpha) \psi_i, \\ A_\mu &\rightarrow A_\mu, \\ &\dots\dots\dots, \end{aligned}$$

порождает сохраняющийся ток j_R^μ :

$$j_R^\mu = \bar{\psi}_i^a \gamma^\mu \gamma_5 \psi_i^a - 4D^\mu P^a S^a + 4D^\mu S^a P^a.$$

Для фермионных полей $U(1)_R$ преобразования сводятся к киральным. Поэтому в рамках теории возмущений для группы $SU(2)$ аномалия тока j_R^μ будет

$$\langle \partial_\mu j_R^\mu \rangle = \frac{e^2}{4\pi^2} F_{\mu\nu}^a \tilde{F}^{a\mu\nu} = -\frac{e^2}{16\pi^2} \text{Im } \Phi_a^2.$$

В работе [2] данная аномалия была вычислена вне рамок теории возмущений. Было показано, что

$$\langle \partial_\mu j_R^\mu \rangle = -\frac{1}{8\pi^2} \text{Im} \int d^2\theta_1 d^2\theta_2 u, \quad (3)$$

где функция $u = u(\Phi) \rightarrow u(v)$ определяется из уравнения

$$v(u) = \frac{\sqrt{2}}{e\pi} \int_{-1}^1 dx \frac{\sqrt{x-u}}{\sqrt{x^2-1}}$$

(здесь мы положили инстантонный масштаб $\Lambda = M \exp(-2\pi^2/e^2) = 1$).

Отметим, что формула (3) справедлива при вычислении как по теории возмущений, так и вне ее рамок. Результат теории возмущений имеет место в пределе $v \rightarrow \infty$ [3]. В этом случае

$$u = \frac{e^2 \Phi^2}{2} + \frac{\Lambda^4}{4e^2 \Phi^2} + O\left(\frac{1}{\Phi^6}\right).$$

Первое слагаемое здесь правильно воспроизводит пертурбативный результат для аномалии, в то время как второе соответствует одноинстантонному вкладу. Компонентная запись второго слагаемого была получена в [2].

Высшие поправки могут быть определены из уравнения [4]

$$\left(\frac{d^2}{du^2} + \frac{1}{4(u^2-1)} \right) v = 0.$$

3. ИНСТАНТОНЫ И ДИНАМИКА ТЕОРИИ ПОЛЯ

Непертурбативные поправки к эффективному действию связаны в первую очередь с инстантонными эффектами [7]. Поэтому вполне естественно предположить, что и непертурбативный вклад в аномалию также определяется инстантонами.

Техника вычислений инстантонного вклада в эффективное действие является хорошо известной [9, 10]. Напомним кратко ее основные идеи.

В низшем приближении

$$\Delta\Gamma = \frac{1}{Z_0} \int D\phi \exp(-S[\phi_0 + \phi]),$$

где ϕ обозначает весь набор полей теории, а ϕ_0 – классическое решение евклидовых уравнений поля. Однако данное выражение является чисто формальным. Дело в том, что минимум евклидова действия, соответствующий инстантонным решениям, является вырожденным, т.к. действие преобразований симметрии на одно классическое решение дает новое с той же величиной действия. Формально это приводит к возникновению нулевых мод у второй вариации классического действия, которые должны удаляться интегрированием по соответствующим коллективным координатам. Мера интегрирования в несуперсимметричном случае впервые была вычислена 'т Хоофтом [9] и содержит вклады трансляционных (параметр a), масштабных (ρ) и калибровочных (ω) нулевых мод (всего 8 коллективных координат). В N -суперсимметричном случае [11] добавляются еще $4N$ нулевых мод ($2N$ из-за преобразований суперсимметрии и $2N$ из-за суперконформных преобразований).

Явный вид нулевых мод может быть легко найден действием соответствующих преобразований на инстантонное решение. В частности, для фермионных нулевых мод при действии преобразований суперсимметрии получаем ($\epsilon \neq \epsilon(x)$)

$$\psi_{i0}^{\text{susy}} = -2\Sigma_{\mu\nu}\epsilon_i \frac{\rho^2}{(z^2 + \rho^2)^2} \sigma_{\mu\nu},$$

где $\sigma^{\mu\nu} = \eta^{a\mu\nu} \sigma_a / 2$; $\eta^{a\mu\nu}$ – символ 'т Хоофта, а

$$z^\mu = y^\mu - a^\mu = x^\mu + \frac{i}{2} \bar{\theta}_i \gamma^\mu \gamma_5 \theta_i - a^\mu,$$

в то время как суперконформные моды получаются заменой $\epsilon \rightarrow \gamma_\alpha z^\alpha \beta$; $\beta \neq \beta(x)$:

$$\psi_{i0}^{\text{sc}} = -2\Sigma_{\mu\nu} \gamma_\alpha z^\alpha \beta_i \frac{\rho^2}{(z^2 + \rho^2)^2} \sigma_{\mu\nu}.$$

$U(1)_R$ -преобразования не дают новых нулевых мод, т.к. их действие на инстантонное суперполе сводится просто к изменению его параметров, и не выводят из пространства решений.

В рассматриваемом случае $N = 2$ суперсимметричной теории Янга–Миллса окончательное выражение для меры принимает вид

$$d\mu = \text{const} \int d^4 a \frac{d\rho}{\rho^5} \frac{d^3 \omega}{2\pi^2} M^8 \rho^8 \frac{1}{M^4 \rho^4} \int d^2 \epsilon_1 d^2 \epsilon_2 d^2 \bar{\beta}_1 d^2 \bar{\beta}_2.$$

Следующим шагом при получении эффективного действия являются вычисление показателя экспоненты в пределе постоянного поля [12, 10, 8] и взятие соответствующего интеграла. Однако для нас нет необходимости повторять его. Достаточно знать, что он может быть выполнен и результат хорошо известен [7, 8].

4. ИНСТАНТОННЫЙ ВКЛАД В АНОМАЛИЮ И НЕИНВАРИАНТНОСТЬ МЕРЫ

В данном случае нам требуется вклад не в эффективное действие, а в аномалию

$$\langle \partial_\mu j_R^\mu \rangle = - \frac{\partial \Gamma}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0}. \quad (4)$$

Для ее вычисления требуется только заметить [10], что показатель экспоненты является функцией от $\Phi(x^\mu = a^\mu, \theta_i = \epsilon_i + \gamma_\alpha x^\alpha \beta_i)$ и в низшем порядке по производным принимает вид

$$\exp \left(- \frac{4\pi^2}{e^2} \rho^2 (1 + 2\bar{\beta}_i (1 + \gamma_5) \epsilon_i) \Phi^2(a^\mu, \epsilon_i + \gamma_\alpha x^\alpha \beta_i) \right).$$

Данное выражение не является $U(1)_R$ -инвариантным, т.к.

$$\delta \Phi = (1 + 2i\alpha\gamma_5)\Phi,$$

$$\delta \epsilon_i = (1 + i\alpha\gamma_5)\epsilon_i,$$

$$\delta \beta_i = (1 + i\alpha\gamma_5)\beta_i,$$

$$\delta \rho = 0,$$

$$\delta a^\mu = 0.$$

Однако по нулевым модам производится интегрирование. Поэтому можно поступить следующим образом: сначала совершить $U(1)_R$ -преобразования, а затем сделать замену

$$\theta \rightarrow (1 - i\alpha\gamma_5)\theta,$$

$$\epsilon \rightarrow (1 - i\alpha\gamma_5)\epsilon,$$

$$\beta \rightarrow (1 + i\alpha\gamma_5)\beta,$$

$$\rho \rightarrow (1 - 2i\alpha)\rho,$$

$$a^\mu \rightarrow (1 - 2i\alpha)a^\mu,$$

после которой показатель экспоненты восстанавливает свой прежний вид, но мера интегрирования при этом меняется:

$$d\mu \rightarrow (1 - 2i\alpha)^4 (1 - i\alpha)^4 (1 + i\alpha)^4 d\mu = (1 - 8i\alpha) d\mu.$$

Необходимо только учесть, что при получении суперпотенциала остается интеграл

$$\int d^4x d^2\theta_1 d^2\theta_2$$

(присутствующий в определении суперпотенциала), в котором необходимо произвести обратную замену переменных. Однако при обратном преобразовании этот интеграл остается инвариантным, т.к. в результате двух проделанных выше преобразований получаются замены

$$x \rightarrow (1 - 2i\alpha)x; \quad \theta \rightarrow (1 - 2\alpha\gamma_5)\theta.$$

(Преобразования этого интеграла будут давать нетривиальный результат при рассмотрении $N = 1$ суперсимметричных теорий.)

В итоге мы получаем, что

$$\Gamma'_{\text{inst}} = \int d\mu (1 - 8i\alpha) e^{-S} = \frac{1}{16\pi} \text{Im} \int d^4x d^2\theta_1 d^2\theta_2 (1 - 8i\alpha) \Delta F,$$

где ΔF – инстантонный вклад в препотенциал, который вычислен в целом ряде работ (например, [8]) и в наших обозначениях имеет следующий вид:

$$\Delta F = \frac{1}{16\pi} \frac{i\Lambda^4}{e^2 \Phi^2}.$$

Остается только произвести дифференцирование по α и воспользоваться данными результатами. Окончательно имеем

$$\langle \partial_\mu j_R^\mu \rangle_{1-\text{inst}} = -\frac{1}{32\pi^2} \text{Im} \int d^2\theta_1 d^2\theta_2 \frac{\Lambda^4}{e^2 \Phi^2},$$

что полностью совпадает с первой нетривиальной поправкой к пертурбативному результату, полученной в [2] как асимптотика точного результата.

5. МНОГОИНСТАНТОННЫЕ ВКЛАДЫ В АНОМАЛИЮ

Исследуем теперь структуру высших инстантонных вкладов в аномалию R-симметрии. Для этого необходимо качественно исследовать структуру меры интегрирования по коллективным координатам.

Как мы вскоре увидим, наиболее важную роль играет количество фермионных коллективных координат, которое в суперсимметричных теориях есть не что иное, как количество фермионных нулевых мод.

Количество нулевых мод оператора Дирака на топологически нетривиальном фоне определяется теоремой Атьи–Зингера

$$n_+ - n_- = \frac{1}{16\pi^2} \text{tr} \int d^4x t(F_{\mu\nu}) t(\tilde{F}^{\mu\nu}) = \alpha_t n,$$

где α_t – индекс Дынкина представления t , а n – инстантонное число (для определенности далее $n \geq 0$). Для группы $SU(2)$ существует единственный положительный корень, поэтому [13] имеем

$$\alpha_t = \frac{1}{\text{rank}(G)} \sum_{\text{weights}} (\lambda, \lambda) = \frac{1}{6} (2j)(2j+1)(2j+2).$$

Здесь сумма берется по всем весам λ представления t . В нашем случае фермионы находятся в присоединенном представлении, где $j = 1$, и, следовательно, $\alpha_t = 4$. Это соответствует двум суперсимметричным и двум суперконформным степеням свободы для каждого фермиона. В нашем случае имеются два фермиона. Поэтому полное число коллективных координат для n -инстантонного вклада есть просто $8n$.

Каждая суперсимметричная нулевая мода дает вклад $1 - i\alpha$ в меру интегрирования, а каждая суперконформная (без учета преобразования ρ в мере) дает $1 + i\alpha$, поэтому суммарный вклад равен единице.

Калибровочные нулевые моды (опять же без учета ρ в мере), как мы видели, никакого вклада не дают. Поэтому необходимо лишь вычислить вклад размерных величин. Данная задача существенно упрощается, если заметить, что все они имеют заведомо одинаковый закон преобразования типа $\rho \rightarrow (1 - 2i\alpha)\rho$, в чем мы убеждаемся, рассматривая предел, когда все инстантоны находятся достаточно далеко друг от друга. Суммарная же размерность есть $4n$, она получается при рассмотрении того же предела.

Все это приводит к следующему вкладу в аномалию:

$$\frac{1}{16\pi^2} \text{Im}(-8in) \int d^2\theta_1 d^2\theta_2 \Delta F, \quad (5)$$

где ΔF – инстантонный вклад в препотенциал.

Однако, с другой стороны, в силу (4) и (2) эта же величина есть

$$\frac{1}{16\pi^2} \text{Im} \int d^2\theta_1 d^2\theta_2 \left(2i\Phi \frac{\partial}{\partial \Phi} - 4i \right) \Delta F.$$

Решая уравнение

$$\Phi \frac{\partial}{\partial \Phi} \Delta F = (-4n + 2) \Delta F,$$

находим, что инстантонное решение с топологическим числом n дает поправку в препотенциал вида

$$\Delta F = \text{const } \Phi^{2(-2n+1)},$$

что находится в согласии с результатами [6], полученными на основе совсем других предположений. С помощью (5) легко найти, что вклад в аномалию имеет структуру

$$\langle \partial_\mu j_R^\mu \rangle_{\text{inst}} = \text{Im} \int d^4x d^2\theta_1 d^2\theta_2 \sum_{n=1}^{\infty} a_n \Phi^{2(-2n+1)},$$

где a_n — вещественные коэффициенты.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе мы показали на примере $N = 2$ суперсимметричной теории Янга–Миллса, каков вклад инстантонов в аномалии. Одноинстантонный вклад, полученный представленным методом, полностью согласуется с точным результатом, так же как и структура многоинстантонных поправок. Причина возникновения непертурбативных вкладов в аномалию, как оказалось, кроется в неинвариантности меры интегрирования по коллективным координатам, в отличие от неинвариантности меры относительно переменных интегрирования в методе Фуджикавы. Предложенный подход действительно существенно отличается от последнего, поскольку принципиально отличаются физические причины возникновения аномальных вкладов.

Несомненный интерес представляет исследование непертурбативных вкладов в $N = 1$ суперсимметричных полевых моделях, а также применение метода к другим типам аномалий и исследование аномалий реалистичных моделей. Мы вернемся к обсуждению этих вопросов в наших следующих работах.

В заключение авторы выражают свою глубокую благодарность И. В. Тютину за ряд ценных замечаний и обсуждение результатов и А. А. Славнову за внимание к работе. Кроме того мы хотели бы особенно поблагодарить В. В. Асадова за финансовую поддержку исследований.

Список литературы

- [1] V. Novikov, M. Shifman, A. Vainshtein, V. Zakharov. Nucl. Phys. B. 1983. V. 229. P. 394.
- [2] P. Howe, P. West. Nucl. Phys. B. 1997. V. 486. P. 245.
- [3] N. Seiberg, E. Witten. Nucl. Phys. B. 1994. V. 426. P. 19.
- [4] A. Bilal. Duality in $N = 2$ SUSY $SU(2)$ Yang–Mills theory: A pedagogical introduction to the work of Seiberg and Witten. hep-th/9601007.
- [5] K. Fujikawa. Phys. Rev. Lett. 1979. V. 42. P. 1979; 1980. V. 44. P. 1733.
- [6] N. Seiberg. Phys. Lett. B. 1988. V. 206. P. 75.
- [7] D. Finnell, P. Pouliot. Nucl. Phys. B. 1995. V. 453. P. 225.
- [8] A. Yung. Nucl. Phys. B. 1997. V. 485. P. 38.
- [9] G. 't Hooft. Phys. Rev. Lett. 1976. V. 37. P. 8; Phys. Rev. D. 1976. V. 14. P. 3432.
- [10] M. Shifman, A. Vainshtein, V. Zakharov. Nucl. Phys. B. 1980. V. 165. P. 45; V. Novikov, M. Shifman, A. Vainshtein, V. Zakharov. Nucl. Phys. B. 1983. V. 229. P. 407; 1985. V. 260. P. 157.
- [11] S. Cordes. Nucl. Phys. B. 1986. V. 273. P. 629.
- [12] C. Callan, R. Dashen, D. Gross. Phys. Rev. D. 1978. V. 17. P. 2717.
- [13] R. Slansky. Phys. Rep. 1981. V. 79. P. 1.

Поступила в редакцию 13.I.1998 г.