Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. П. Созонов, А. В. Цыганов, О преобразованиях Беклунда, связывающих различные уравнения Гамильтона–Якоби, *ТМФ*, 2015, том 183, номер 3, 372–387

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8820>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 107.22.136.117

26 апреля 2023 г., 11:32:04

© 2015 г.

А. П. Созонов*, А. В. Цыганов*

О ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ БЕКЛУНДА, СВЯЗЫВАЮЩИХ РАЗЛИЧНЫЕ УРАВНЕНИЯ ГАМИЛЬТОНА–ЯКОБИ

Обсуждается один из возможных конечномерных аналогов общего преобразования Беклунда, связывающего различные уравнения в частных производных. Показано, как различные уравнения Гамильтона–Якоби могут быть получены из одной и той же матрицы Лакса. В качестве примера рассмотрены системы Энона–Эйлеса на плоскости, системы Неймана и Чаплыгина на сфере и две интегрируемые системы с потенциалами, зависящими от скоростей.

Ключевые слова: общие преобразования Беклунда, уравнения Гамильтона–Якоби, разделение переменных, матрицы Лакса.

DOI: 10.4213/tmf8820

1. ВВЕДЕНИЕ

Преобразования Беклунда, созданные в 1875 году для изучения поверхностей отрицательной кривизны, продолжают оставаться современным и весьма востребованным инструментом поиска решений (в частности, солитонных решений) нелинейных дифференциальных уравнений. Принято считать, что преобразования Беклунда дают:

- а) соотношения между решениями одного уравнения (auto-ВТ);
- б) соотношения между решениями разных уравнений (hetero-ВТ);
- в) метод построения дискретных систем.

Наличие у уравнения нетривиальной симметрии (автопреобразования Беклунда) по сути является свойством, обеспечивающим его интегрируемость (все необходимые ссылки могут быть найдены в недавно выпшедших монографиях [1], [2]). Использование автопреобразований для дискретизации обсуждается в монографиях [3]–[5]. С другой стороны, общее преобразование Беклунда (hetero-ВТ) – это несколько более сложный объект, описывающий в большей мере отношение между уравнениями, чем взаимно однозначное отображение между их решениями [6].

Аналогом автопреобразований Беклунда в конечномерном случае являются канонические преобразования координат

$$(u, p_u) \rightarrow (v, p_v), \quad \{u_i, p_{u_j}\} = \{v_i, p_{v_j}\} = \delta_{ij}, \quad (1)$$

---

*Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия.
E-mail: sozonov.alexey@yandex.ru, andrey.tsiganov@gmail.com

которые сохраняют не только скобку Пуассона, но и форму уравнений Гамильтона–Якоби

$$H_i\left(u, \frac{\partial S}{\partial u}\right) = \alpha_i, \quad H_i\left(v, \frac{\partial S}{\partial v}\right) = 0, \quad (2)$$

отвечающих некоторому семейству интегралов движения $H_1, \dots, H_n$ в инволюции. Этот аналог автопреобразований Беклунда, т.е. каноническое отображение, сохраняющее алгебраическую форму интегралов движения для некоторой конечномерной интегрируемой системы, был впервые введен Войцеховским [7].

Для построения дискретных или разностных интегрируемых систем с помощью автопреобразований Беклунда (1) достаточно рассматривать v -переменные как те же самые u -переменные, но в следующий момент некоторой дискретной переменной времени. Этой трактовке преобразований Беклунда в конечномерном случае посвящено несколько десятков работ, ссылки на которые можно найти в [5], [8], [9].

Общепризнанного аналога общего преобразования Беклунда, связывающего разные уравнения в частных производных, до настоящего времени не существует. По-видимому, это будет некоторое каноническое преобразование переменных (1), позволяющее построить разные уравнения Гамильтона–Якоби

$$H_i\left(u, \frac{\partial S}{\partial u}\right) = 0, \quad \tilde{H}_i\left(v, \frac{\partial \tilde{S}}{\partial v}\right) = 0 \quad (3)$$

и удовлетворяющее некоторым дополнительным условиям. Наложение дополнительных условий необходимо для построения нетривиальной теории.

Один из примеров таких дополнительных условий можно найти в теории суперинтегрируемых или вырожденных систем. Рассмотрим, например, двумерный гармонический осциллятор с интегралами движения

$$H_1 = p_x^2 + p_y^2 + a(x^2 + y^2), \quad H_2 = p_x^2 - p_y^2 + a(x^2 - y^2).$$

Соответствующие уравнения Гамильтона–Якоби допускают разделение переменных в декартовых координатах $u = (x, y)$.

Так как это суперинтегрируемая система, то существует другой набор интегралов движения

$$\tilde{H}_1 = p_x^2 + p_y^2 + a(x^2 + y^2), \quad \tilde{H}_2 = xp_y - yp_x,$$

для которых соответствующие уравнения Гамильтона–Якоби допускают разделение переменных в полярных координатах $v = (r, \varphi)$ на плоскости. Это позволяет нам говорить, что каноническое преобразование переменных

$$(u, p_u) = (x, y, p_x, p_y) \rightarrow (v, p_v) = (r, \varphi, p_r, p_\varphi) \quad (4)$$

задает отношение между двумя разными системами уравнений Гамильтона–Якоби

$$H_{1,2}\left(x, y, \frac{\partial S}{\partial x}, \frac{\partial S}{\partial y}\right) = \alpha_{1,2}, \quad \tilde{H}_{1,2}\left(r, \varphi, \frac{\partial \tilde{S}}{\partial r}, \frac{\partial \tilde{S}}{\partial \varphi}\right) = \tilde{\alpha}_{1,2}.$$

В этом случае дополнительным условием будет требование того, что уравнение Гамильтона–Якоби для функции Гамильтона (механической энергии) $H_1 = \tilde{H}_1$ допускает разделение переменных одновременно в u - и в v -переменных. Это дополнительное условие довольно часто и весьма успешно используется в теории классических и квантовых суперинтегрируемых систем [10].

Так как это отношение связывает две разные системы уравнений Гамильтона–Якоби, отвечающие одной и той же суперинтегрируемой системе, то мы можем говорить о полуавтопреобразовании Беклунда (semi-auto BT) или о полубобщем преобразовании Беклунда (semi-hetero BT). Вопрос о построении отношений между полностью различными уравнениями Гамильтона–Якоби остается открытым.

В настоящей работе мы рассмотрим несколько подобных отношений, которые можно трактовать как преобразования Беклунда общего вида [11]. Основной задачей является доказательство полезности наложения следующих дополнительных условий:

1) искомое каноническое преобразование переменных (1) является автопреобразованием Беклунда для исходной динамической системы с интегралами движения $H_1, \dots, H_n$, которые тем самым одновременно допускают разделение в u - и в v -переменных;

2) уравнения Гамильтона–Якоби, отвечающие разным интегралам движения H_k и $\tilde{H}_k$, одновременно допускают разделение в полученных после автопреобразования v -переменных.

Далее мы покажем, что примеры таких преобразований существуют и что подобные преобразования можно использовать для построения и классификации интегрируемых систем.

2. ИНТЕГРИРУЕМЫЕ СИСТЕМЫ НА ПЛОСКОСТИ

Напомним, что уравнение Гамильтона–Якоби

$$H(q, p) = E$$

допускает аддитивное разделение переменных, если полный интеграл этого уравнения имеет вид

$$S(u_1, \dots, u_n; \alpha_1, \dots, \alpha_n) = \sum_{i=1}^n S_i(u_i; \alpha_1, \dots, \alpha_n),$$

где u_k – переменные разделения, которые находятся в инволюции относительно канонических скобок Пуассона. В этом случае вторые уравнения Якоби

$$p_{u_i} = \frac{\partial S_i(u_i; \alpha_1, \dots, \alpha_n)}{\partial u_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (5)$$

определяют сопряженные им импульсы, что позволяет нам доказать, что решения разделенных уравнений (5) относительно $\alpha_i = H_i(u, p_u)$ находятся в инволюции друг с другом.

На плоскости существуют четыре системы ортогональных криволинейных координат: декартовы, полярные, параболические и эллиптические координаты. Уравнение Гамильтона–Якоби для функции Гамильтона натурального вида

$$H_1 = p_1^2 + p_2^2 + V(q_1, q_2) \quad (6)$$

допускает аддитивное разделение переменных в одной из этих систем координат, если потенциал принимает одну из следующих форм:

$$\begin{aligned} 1) \quad V(q_1, q_2) &= U_1(x) + U_2(y); & 2) \quad V(q_1, q_2) &= U_1(r) + \frac{U_2(\phi)}{r^2}; \\ 3) \quad V(q_1, q_2) &= \frac{U_1(u_1) + U_2(u_2)}{u_1 + u_2}; & 4) \quad V(q_1, q_2) &= \frac{U_1(\zeta_1) + U_2(\zeta_2)}{\zeta_1^2 - \zeta_2^2}. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь x, y – декартовы координаты, r, ϕ – полярные координаты, u_1, u_2 – параболические координаты, ζ_1, ζ_2 – эллиптические координаты на плоскости (см. учебник [12]).

Таким образом, мы имеем полное описание и полную классификацию всех интегрируемых систем на плоскости, допускающих разделение переменных в одной из ортогональных криволинейных систем координат. Обобщение этой классификации интегрируемых систем типа Штеккеля на римановых пространствах постоянной кривизны может быть найдено в книге [13]. Применяя к этим интегрируемым системам с квадратичными интегралами движения по импульсам автопреобразования Беклунда, мы получим семейство новых канонических координат (v, p_v) из классических криволинейных координат (u, p_u) , которые можно рассматривать как переменные разделения для новых интегрируемых систем с интегралами движения старших степеней. Для классификации получаемых таким образом интегрируемых систем можно использовать детально разработанную классификацию ортогональных систем координат и соответствующих им интегрируемых систем типа Штеккеля.

Далее мы ограничимся рассмотрением динамических систем на плоскости, допускающих разделение переменных в параболических координатах, так как, с одной стороны, это достаточно интересные системы, а с другой стороны, соответствующие формулы будут не так громоздки, как формулы для эллиптических координат, которые могут быть найдены в работе [11]. Итак, рассмотрим параболические координаты на плоскости

$$\lambda - 2q_2 - \frac{q_1^2}{\lambda} = \frac{(\lambda - u_1)(\lambda - u_2)}{\lambda}, \quad (8)$$

для которых разделенные уравнения (5) имеют вид

$$p_{u_i}^2 + U_i(u_i) = H_1 + \frac{H_2}{u_i}, \quad i = 1, 2. \quad (9)$$

Складывая эти уравнения (9), мы получим другую интегрируемую систему с гамильтонианом

$$\tilde{H}_1 = \frac{1}{2}(p_{u_1}^2 + U_1(u_1) + p_{u_2}^2 + U_2(u_2)) = H_1 + \frac{H_2}{2} \left(\frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} \right), \quad (10)$$

который можно рассматривать как интегрируемое возмущение исходного гамильтониана H_1 (6). Вычитая второе уравнение из первого, мы получим второй интеграл движения

$$\tilde{H}_2 = (p_{u_1}^2 + U_1(u_1) - p_{u_2}^2 - U_2(u_2)) = H_2 \left(\frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_2} \right).$$

Физического смысла полученные таким образом интегралы движения не имеют.

Чтобы придать этим интегралам физический смысл, можно использовать автопреобразования Беклунда исходной динамической системы

$$(u_i, p_{u_i}) \rightarrow (v_i, p_{v_i}),$$

которые сохраняют исходные интегралы движения H , H_2 и изменяют вторые интегралы движения

$$\tilde{H}_1 = H_1 + \frac{H_2}{2} \left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} \right), \quad \tilde{H}_2 = H_2 \left(\frac{1}{v_1} - \frac{1}{v_2} \right). \quad (11)$$

Если среди множества автопреобразований Беклунда найдется специальное преобразование, после применения которого гамильтониан $\tilde{H}$ станет осмысленной с физической точки зрения функцией от исходных физических переменных (q, p) , то именно такое преобразование можно будет назвать аналогом общего преобразования Беклунда, связывающего различные уравнения Гамильтона–Якоби.

2.1. Системы Энона–Эйлеса. На плоскости существуют три интегрируемые системы Энона–Эйлеса с потенциалом третьей степени. Эти системы могут быть получены с помощью конечномерной редукции следующих уравнений в частных производных: уравнение Кортевега–де Фриза (КдФ) пятого порядка, уравнения Каупа–Купершмидта и уравнения Савады–Котера [14]. Явное интегрирование уравнений движения во всех трех случаях обсуждается в работе [15].

Первая функция Гамильтона, связанная с уравнением КдФ,

$$H_1 = p_1^2 + p_2^2 - 16aq_2(q_1^2 + 2q_2^2), \quad a \in \mathbb{R}, \quad (12)$$

порождает уравнение Гамильтона–Якоби, которое допускает разделение переменных в параболических координатах на плоскости.

Вторая функция Гамильтона, связанная с уравнением Каупа–Купершмидта, имеет вид

$$\tilde{H}_1 = p_1^2 + p_2^2 - 2aq_2(3q_1^2 + 16q_2^2). \quad (13)$$

Так как уравнение Каупа–Купершмидта калибровочно-эквивалентно уравнению Савады–Котера, то существует каноническое преобразование

$$(q_{1,2}, p_{1,2}) \rightarrow (P_{1,2}, Q_{1,2}),$$

которое отождествляет $\tilde{H}_1$ (13) с гамильтонианом

$$\hat{H}_1 = P_1^2 + P_2^2 - 2aQ_2(3Q_1^2 + Q_2^2), \quad (14)$$

допускающим разделение переменных в декартовых координатах [16]. Различные свойства этого преобразования и его обобщения обсуждаются в работах [17], [18].

Ниже мы предьявим неизвестную ранее связь между системами Энона–Эйлеса (12) и (13), которую можно рассматривать как некоторый аналог общего преобразования Беклунда. Мы могли бы построить этот искомый аналог общего преобразования Беклунда, используя метод конечномерной редукции [14], если бы нам было известно преобразование Беклунда (hetero-ВТ), связывающее уравнение КдФ

пятого порядка и уравнение Каупа–Купершмидта или уравнение Савады–Котера, однако такое преобразование нам неизвестно.

Так как мы верим, что вся информация об интегрируемой системе, включая ее связи с другими системами, должна содержаться в “правильном” представлении Лакса, то нам просто нужно научиться извлекать эту информацию. Поэтому далее мы получим все соотношения между системами Энона–Эйлеса непосредственно из (2×2) -матрицы Лакса для системы Энона–Эйлеса (12), не используя при этом никаких дополнительных сведений.

2.2. Преобразования Беклунда. С помощью ортогональных систем координат на плоскости мы можем построить континуум (2×2) -матриц Лакса [19], [20], отвечающих интегрируемым системам с потенциалами $V(q_1, q_2)$ (7). Для системы Энона–Эйлеса соответствующая матрица Лакса имеет вид

$$L(\lambda) = \begin{pmatrix} \frac{p_2}{2} + \frac{p_1 q_1}{2\lambda} & \lambda - 2q_2 - \frac{q_1^2}{\lambda} \\ a\lambda^2 + 2aq_2\lambda + a(q_1^2 + 4q_2^2) + \frac{p_1^2}{4\lambda} & -\frac{p_2}{2} - \frac{p_1 q_1}{2\lambda} \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}. \quad (15)$$

Спектральная кривая этой матрицы Лакса задается уравнением

$$C: \mu^2 - a\lambda^3 - \frac{H_1}{4} + \frac{H_2}{\lambda} = 0, \quad (16)$$

в которое входят интегралы движения H_1 (12) и

$$H_2 = aq_1^2(q_1^2 + 4q_2^2) + \frac{p_1(q_2 p_1 - q_1 p_2)}{2}.$$

Автопреобразования Беклунда сохраняют форму интегралов движения [7], определяемых характеристическим полиномом матрицы Лакса, поэтому каждому автопреобразованию Беклунда можно сопоставить преобразование подобия

$$\hat{L} = VLV^{-1}$$

для матрицы Лакса [8]. Так как для каждой динамической системы существует бесконечно много автопреобразований Беклунда, то соответствующих им преобразований подобия также бесконечно много [8], [5].

Рассмотрим специальное преобразование подобия, задаваемое матрицей

$$V = \begin{pmatrix} L_{12} & 0 \\ 4(L_{11} - \hat{L}_{11}(\lambda)) & 4L_{12} \end{pmatrix}, \quad (17)$$

где L_{ij} – элементы исходной матрицы Лакса (15) и

$$\hat{L}_{11}(\lambda) = \frac{p_2}{2} + \frac{q_1 p_1 (\lambda - 2q_2)}{2q_1^2}.$$

После преобразования мы получаем единственную матрицу $\hat{L}(\lambda) = VLV^{-1}$, удовлетворяющую следующим трем условиям.

1. Нули верхнего внедиагонального элемента

$$\widehat{L}_{12}(\lambda) = \frac{(\lambda - u_1)(\lambda - u_2)}{4\lambda}$$

являются исходными параболическими координатами на плоскости (8).

2. Нижний внедиагональный элемент

$$\begin{aligned}\widehat{L}_{21} &= 4a(\lambda - v_1)(\lambda - v_2) = \\ &= 4a\lambda^2 + \frac{(8aq_1^2q_2 - p_1^2)\lambda}{q_1^2} + 4a(q_1^2 + 4q_2^2) + \frac{2p_1(p_1q_2 - p_2q_1)}{q_1^2}\end{aligned}\quad (18)$$

также имеет только два нуля, которые являются функционально независимыми функциями $v_{1,2}(q, p)$ в инволюции относительно канонических скобок Пуассона.

3. Сопряженные моменты для координат $u_{1,2}$ и для координат $v_{1,2}$ являются значениями диагонального элемента матрицы Лакса:

$$p_{u_i} = \widehat{L}_{11}(\lambda)|_{\lambda=u_i}, \quad p_{v_i} = \widehat{L}_{11}(\lambda)|_{\lambda=v_i}, \quad i = 1, 2.$$

Так как

$$\det(L(\lambda) - \mu) = \det(\widehat{L}(\lambda) - \mu) = \mu^2 - \widehat{L}_{11}^2(\lambda) - \widehat{L}_{12}(\lambda)\widehat{L}_{21}(\lambda),$$

то мы легко получим разделенные уравнения вида (9), подставляя $\lambda = u_{1,2}$ и $\lambda = v_{1,2}$ в эти уравнения.

Два семейства канонических переменных (u, p_u) и (v, p_v) связаны каноническим преобразованием, которое является конечномерным аналогом автопреобразования Беклунда для нелинейных эволюционных уравнений.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Для системы Энона–Эйлеса (12) автопреобразование Беклунда состоит из канонического преобразования параболических координат на плоскости и сопряженных им моментов*

$$(u_1, u_2, p_{u_1}, p_{u_2}) \rightarrow (v_1, v_2, p_{v_1}, p_{v_2})$$

и соотношений

$$\Phi(\lambda, \mu) = \mu^2 - a\lambda^3 = \frac{H_1}{4} - \frac{H_2}{\lambda}, \quad \lambda = u_{1,2}, v_{1,2}, \quad \mu = p_{u_{1,2}}, p_{v_{1,2}}, \quad (19)$$

позволяющих построить уравнения Гамильтона–Якоби

$$H_{1,2}\left(\lambda, \frac{\partial S}{\partial \lambda}\right) = \alpha_{1,2}, \quad \lambda = u, v,$$

которые имеют одну и ту же форму в (u, p_u) - и в (v, p_v) -переменных.

С геометрической точки зрения автопреобразования Беклунда описывают изменение координат (сдвиг) на якобиане гиперэллиптической кривой – спектральной кривой матрицы Лакса [8].

Добавляя к этому автопреобразованию дополнительное правило для нахождения других уравнений Гамильтона–Якоби, мы можем получить некоторый аналог

общего преобразования Беклунда. Например, подставляя v -переменные в определение (11), мы получим

$$\tilde{H}_1 = H_1 - \frac{d \ln(\lambda - v_1)(\lambda - v_2)}{d\lambda} \Big|_{\lambda=0} = p_1^2 + \frac{p_2^2}{2} - 2aq_2(6q_1^2 + 16q_2^2). \quad (20)$$

Этот гамильтониан совпадает с гамильтонианом (13) для второй системы Энона–Эйлеса с точностью до канонического преобразования

$$p_1 \rightarrow \sqrt{2}p_1, \quad q_1 \rightarrow \frac{q_1}{\sqrt{2}}.$$

С другой стороны, каноническое преобразование

$$(q, p) \rightarrow (Q, P), \quad P_{1,2} = \frac{p_{v_1} \pm p_{v_2}}{\sqrt{2}}, \quad Q_{1,2} = \frac{v_1 \pm v_2}{\sqrt{2}}, \quad (21)$$

приводит этот гамильтониан к гамильтониану третьей системы Энона–Эйлеса

$$\hat{H}_1 = P_1^2 + P_2^2 - 2aQ_2(3Q_1^2 + Q_2^2).$$

Согласно [14], [16] каноническое преобразование (21) является конечномерным аналогом калибровочной эквивалентности уравнений Каупа–Купершмидта и Савады–Котера.

Итак, уравнения Гамильтона–Якоби для всех трех интегрируемых систем Энона–Эйлеса на плоскости (12)–(14) одновременно допускают разделение переменных в v -переменных. Мы можем трактовать этот факт как существование конечномерного аналога общего преобразования Беклунда, связывающего различные системы уравнений Гамильтона–Якоби.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Для систем Энона–Эйлеса (12)–(14) аналог общего преобразования Беклунда состоит из того же самого канонического преобразования параболических координат на плоскости и сопряженных им моментов*

$$(u_1, u_2, p_{u_1}, p_{u_2}) \rightarrow (v_1, v_2, p_{v_1}, p_{v_2})$$

соотношений $\Phi(\lambda, \mu)$ (19) и двух дополнительных соотношений

$$\tilde{H}_{1,2} = \Phi(v_1, p_{v_1}) \pm \Phi(v_2, p_{v_2}),$$

позволяющих построить две различные системы уравнений Гамильтона–Якоби

$$H_{1,2} \left(u, \frac{\partial S}{\partial u} \right) = \alpha_{1,2}, \quad \tilde{H}_{1,2} \left(v, \frac{\partial \tilde{S}}{\partial v} \right) = \tilde{\alpha}_{1,2},$$

полные интегралы которых аддитивно разделяются в v -переменных.

Этот аналог общего преобразования Беклунда связывает две различные совместные поверхности уровня интегралов движения $H_{1,2}$ и $\tilde{H}_{1,2}$. Аналогичные связи между различными абелевыми многообразиями также возникают и в теории суперинтегрируемых систем.

2.3. Интегрируемая система с потенциалом, зависящим от скорости линейно. Если предположить, что в определении (7) функции $U_{1,2}(u)$ являются одинаковыми однородными полиномами N -й степени, то можно выписать явное выражение для гамильтониана, допускающего разделение в параболических координатах на плоскости [21]:

$$H_1 = p_1^2 + p_2^2 + V_N(q_1, q_2), \quad V_N = 4a \sum_{k=0}^{[N/2]} 2^{1-2k} \binom{N-k}{k} q_1^{2k} q_2^{N-2k}. \quad (22)$$

При $N = 3$ мы получим гамильтониан для системы Энона–Эйлеса (12), а при $N = 4$ – гамильтониан так называемой системы “(1:12:16)”

$$H_1 = p_1^2 + p_2^2 - 4a(q_1^4 + 12q_1^2q_2^2 + 16q_2^4). \quad (23)$$

Соответствующая матрица Лакса

$$L(\lambda) = \begin{pmatrix} \frac{p_2}{2} + \frac{p_1q_1}{2\lambda} & \lambda - 2q_2 - \frac{q_1^2}{\lambda} \\ a\lambda^3 + 2aq_2\lambda^2 + a(q_1^2 + 4q_2^2)\lambda + 4aq_2(q_1^2 + 2q_2^2) + \frac{p_1^2}{4\lambda} & -\frac{p_2}{2} - \frac{p_1q_1}{2\lambda} \end{pmatrix} \quad (24)$$

после преобразования подобия с матрицей V (17), где

$$\hat{L}_{11}(\lambda) = \sqrt{a}\lambda^2 - \frac{4\sqrt{a}q_2q_1 - p_1}{2q_1}\lambda - \frac{2\sqrt{a}q_1^3 + 2p_1q_2 - p_2q_1}{2q_1},$$

переходит в матрицу $\hat{L}$, у которой два внедиагональных элемента $\hat{L}_{12}(\lambda)$ и $\hat{L}_{21}(\lambda)$ порождают два семейства переменных разделения. Соответствующие им моменты по-прежнему порождаются значениями диагонального элемента матрицы $\hat{L}$.

Как и для системы Энона–Эйлеса, первое семейство – это параболические координаты на плоскости $u_{1,2}$, а второе семейство состоит из координат $v_{1,2}$, являющихся нулями полинома

$$\begin{aligned} \hat{L}_{21} = & \frac{4(4aq_1q_2 - \sqrt{a}p_1)}{q_1}\lambda^2 + \frac{8aq_1^2(q_1^2 + 2q_2^2) + 4\sqrt{a}q_1(2p_1q_2 - p_2q_1) - p_1^2}{q_1^2}\lambda + \\ & + \frac{16aq_1^2q_2(q_1^2 + 2q_2^2) + 2p_1(p_1q_2 - p_2q_1)}{q_1^2} = \frac{4(4aq_1q_2 - \sqrt{a}p_1)}{q_1}(\lambda - v_1)(\lambda - v_2). \end{aligned}$$

Каноническое преобразование между этими двумя семействами переменных разделения является автопреобразованием Беклунда для системы “(1:12:16)”. Как и ранее, мы можем рассматривать это преобразование как общее преобразование Беклунда, если добавим правило (11) для определения второй системы уравнений Гамильтона–Якоби.

В нашем случае вторая динамическая система задается интегрируемым гамильтонианом (11) с потенциалом, зависящим линейно от скоростей:

$$\tilde{H}_1 = \frac{p_1^2}{2} + p_2^2 + 4\sqrt{a}p_1q_1q_2 - 2\sqrt{a}p_2q_1^2 - 8aq_2^2(5q_1^2 + 8q_2^2).$$

Используя канонические преобразования, можно переписать этот гамильтониан в более симметричной форме:

$$\tilde{H}_1 = p_1^2 + p_2^2 - 3\sqrt{a}p_2q_1^2 + 2a(q_1^4 - 12q_1^2q_2^2 - 32q_2^4). \quad (25)$$

Соответствующий второй интеграл

$$\begin{aligned} \tilde{H}_2^2 = & p_1^4 + 4q_1^4(q_1^4 - 8q_1^2q_2^2 - 112q_2^4)a^2 + 4q_1^3(64p_1q_2^3 - p_2q_1^3 - 12p_2q_1q_2^2)a^{3/2} + \\ & + q_1^2(4p_1^2q_1^2 - 48p_1^2q_2^2 + 32p_1p_2q_1q_2 + p_2^2q_1^2)a - 6a^{1/2}p_1^2p_2q_1^2 \end{aligned}$$

является полиномом четвертой степени по импульсам. Физический смысл подобных гамильтонианов обсуждается, например, в работе [22], в которой можно найти также подробный список необходимых ссылок.

Заметим, что, используя аналог общего преобразования Беклунда, мы не только нашли выражения для новых интегралов движения, но и построили переменные разделения и разделенные уравнения. Более того, используя весьма нетривиальные канонические преобразования (21), мы можем доказать, что интегрируемая система с потенциалом (25), зависящим линейно от скоростей, эквивалентна системе с гамильтонианом

$$\hat{H}_1 = P_1^2 + P_2^2 - a(Q_1^4 + 6Q_1^2Q_2^2 + Q_2^4),$$

аналогично связи между второй и третьей системой Энона–Эйлеса.

При $N \geq 5$ в соотношениях (22), т. е. для потенциалов пятой степени и выше, род спектральной кривой соответствующей матрицы Лакса больше числа степеней свободы и аналогичных преобразований подобия для матриц Лакса не найдено.

3. ИНТЕГРИРУЕМЫЕ СИСТЕМЫ НА СФЕРЕ

На двумерной сфере имеются две системы ортогональных криволинейных координат – сферические и эллиптические (сфероконические) координаты. Далее мы ограничимся рассмотрением динамических систем, допускающих разделение в эллиптических координатах, и их преобразованиями Беклунда.

Если q_1, q_2, q_3 – декартовы координаты трехмерного евклидова пространства $\mathbb{R}^3$, в котором расположена двумерная сфера $\mathbb{S}^2$, то эллиптические координаты u_1, u_2 на сфере определяются стандартным образом:

$$\frac{(\lambda - u_1)(\lambda - u_2)}{(\lambda - a_1)(\lambda - a_2)(\lambda - a_3)} = \frac{q_1^2}{\lambda - a_1} + \frac{q_2^2}{\lambda - a_2} + \frac{q_3^2}{\lambda - a_3}, \quad a_i \in \mathbb{R}, \quad (26)$$

где a_i – параметры, задающие область определения координат:

$$a_1 < u_1 < a_2 < u_2 < a_3.$$

Сопреженные моменты p_u являются значениями функции

$$h(\lambda) = \frac{1}{2} \left(\frac{p_1q_1}{\lambda - a_1} + \frac{p_2q_2}{\lambda - a_2} + \frac{p_3q_3}{\lambda - a_3} \right) \quad (27)$$

при $\lambda = u_{1,2}$. Как обычно, на входящие в эти определения избыточные координаты $q_k \in \mathbb{R}^3$ и моменты $p_k \in T^*\mathbb{R}^3$ налагаются связи

$$q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1, \quad p_1q_1 + p_2q_2 + p_3q_3 = 0,$$

определяющие вложение сферы и ее кокасательного расслоения в евклидово пространство и его кокасательное расслоение соответственно.

Если уравнение Гамильтона–Якоби, определяемое гамильтонианом натурального вида

$$H = \sum g_{ij}(q)p_i p_j + V(q),$$

допускает разделение переменных в эллиптических координатах на сфере, то соответствующие разделенные уравнения (5) имеют следующий вид:

$$p_{u_i}^2 + U_i(u_i) = \frac{K_1}{u_i - a_1} + \frac{K_2}{u_i - a_1} + \frac{K_3}{u_i - a_1}, \quad i = 1, 2,$$

где K_j – три функционально независимых интеграла движения в инволюции. Нам будет удобнее переписать эти уравнения в следующем виде:

$$(u_i + a_1)(u_i + a_2)p_{u_i}^2 + U_i(u_i) = H + \frac{H_2}{u_i - a_3}, \quad i = 1, 2, \quad (28)$$

где H и H_2 – два функционально независимых интеграла движения в инволюции.

Как и для систем на плоскости, мы можем складывать и вычитать эти разделенные уравнения для того, чтобы получить новую интегрируемую систему. После этого мы ищем такое автопреобразование Беклунда $(u, p_u) \rightarrow (v, p_v)$, которое придаст гамильтонианам

$$\tilde{H} = H + \frac{H_2}{2} \left(\frac{1}{v_1 - a_3} + \frac{1}{v_2 - a_3} \right), \quad \tilde{H}_2 = H_2 \left(\frac{1}{v_1 - a_3} - \frac{1}{v_2 - a_3} \right) \quad (29)$$

физический смысл в исходных переменных (q, p) . Если такое автопреобразование существует, то именно это преобразование мы и будем называть аналогом общего преобразования Беклунда, связывающего различные уравнения Гамильтона–Якоби.

3.1. Системы Неймана и Чаплыгина. Возьмем матрицу Лакса для системы Неймана на сфере

$$L(\lambda) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 \frac{q_k p_k}{\lambda - a_k} & \sum_{k=1}^3 \frac{q_k^2}{\lambda - a_k} \\ -\frac{1}{4} \left(1 + \sum_{i=1}^3 \frac{p_i^2}{\lambda - a_i} \right) & -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 \frac{q_k p_k}{\lambda - a_k} \end{pmatrix}. \quad (30)$$

В уравнение

$$C: 4(\lambda - a_1)(\lambda - a_2)\mu^2 + \lambda - H_1 - \frac{H_2}{\lambda - a_3} = 0,$$

определяющее спектральную кривую данной матрицы, входит функция Гамильтона

$$-H_1 = J_1^2 + J_2^2 + J_3^2 + a_1 q_1^2 + a_2 q_2^2 + a_3 q_3^2, \quad (31)$$

где J_k – компоненты вектора углового момента $J = q \times p$.

Согласно [11] существует единственное преобразование подобия $\hat{L} = VLV^{-1}$ с матрицей V (17), которое позволяет получить одновременно два семейства переменных разделения из внедиагональных элементов матрицы

$$\hat{L} = \begin{pmatrix} \frac{(p_1q_3 - p_3q_1)q_1}{2q_3(\lambda - a_1)} + \frac{(p_2q_3 - p_3q_2)q_2}{2q_3(\lambda - a_2)} & \frac{1}{4} \left(\sum_{i=1}^n \frac{q_i^2}{\lambda - a_i} \right) \\ -1 - \frac{(p_1q_3 - p_3q_1)^2}{q_3^2(\lambda - a_1)} - \frac{(p_2q_3 - p_3q_2)^2}{q_3^2(\lambda - a_2)} & -\frac{(p_1q_3 - p_3q_1)q_1}{2q_3(\lambda - a_1)} - \frac{(p_2q_3 - p_3q_2)q_2}{2q_3(\lambda - a_2)} \end{pmatrix}.$$

Первое семейство – это эллиптические координаты на сфере $u_{1,2}$, а второе семейство состоит из координат $v_{1,2}$, являющихся нулями второго внедиагонального элемента $\hat{L}_{21}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Для системы Неймана (31) автопреобразование Беклунда состоит из канонического преобразования эллиптических координат на сфере и сопряженных им моментов

$$(u_1, u_2, p_{u_1}, p_{u_2}) \rightarrow (v_1, v_2, p_{v_1}, p_{v_2})$$

и соотношений

$$\Phi(\lambda, \mu) = 4(\lambda - a_1)(\lambda - a_2)\mu^2 + \lambda = H_1 + \frac{H_2}{\lambda - a_3}, \quad (32)$$

позволяющих построить уравнения Гамильтона–Якоби

$$H_{1,2} \left(\lambda, \frac{\partial S}{\partial \lambda} \right) = \alpha_{1,2}, \quad \lambda = u, v,$$

которые имеют одну и ту же форму в (u, p_u) - и в (v, p_v) -переменных.

Как и ранее, добавляя к этому автопреобразованию Беклунда дополнительное правило для нахождения других уравнений Гамильтона–Якоби, мы можем получить аналог общего преобразования Беклунда. Действительно, подставляя переменные $v_{1,2}$ в определение $\tilde{H}_{1,2}$ (29), мы получим функцию Гамильтона

$$\tilde{H}_1 = J_1^2 + J_2^2 + 2J_3^2 - 2a_1q_2^2 - 2a_2q_1^2 - (a_1 + a_2)q_3^2, \quad (33)$$

которая задает известную систему Чаплыгина [23], описывающую движение твердого тела в идеальной несжимаемой жидкости.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Системы Неймана (31) и Чаплыгина (33) связывает аналог общего преобразования Беклунда, который состоит из канонического преобразования эллиптических координат и сопряженных им моментов

$$(u_1, u_2, p_{u_1}, p_{u_2}) \rightarrow (v_1, v_2, p_{v_1}, p_{v_2}),$$

соотношений $\Phi(\lambda, \mu)$ (32) и двух дополнительных соотношений

$$\tilde{H}_{1,2} = \Phi(v_1, p_{v_1}) \pm \Phi(v_2, p_{v_2}),$$

позволяющих построить две различные системы уравнений Гамильтона–Якоби

$$H_{1,2}\left(u, \frac{\partial S}{\partial u}\right) = \alpha_{1,2}, \quad \tilde{H}_{1,2}\left(v, \frac{\partial \tilde{S}}{\partial v}\right) = \tilde{\alpha}_{1,2},$$

полные интегралы которых аддитивно разделяются в v -переменных.

Как и для систем Энона–Эйлеса, этот аналог общего преобразования Беклунда связывает две различные совместные поверхности уровня интегралов движения $H_{1,2}$ и $\tilde{H}_{1,2}$.

3.2. Интегрируемая система с потенциалом, зависящим от скорости линейно. Для систем на сфере, как и для систем на плоскости (22), существует общее выражение для однородных полиномиальных потенциалов

$$V_N = \frac{P_N(u_1) - P_N(u_2)}{u_1 - u_2},$$

которое может быть переписано в терминах избыточных переменных q_i [24]. При $N = 2$ мы получаем систему Неймана (31), при $N = 3$ получаем систему с потенциалом четвертой степени. Однородные потенциалы можно складывать друг с другом и добавлять к ним сингулярные слагаемые.

Рассмотрим матрицу Лакса для одной из таких систем:

$$L(\lambda) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 \frac{q_k p_k}{\lambda - a_k} & \sum_{k=1}^3 \frac{q_k^2}{\lambda - a_k} \\ \frac{1}{4} \left(a\lambda - a(a_1 q_1^2 + a_2 q_2^2 + a_3 q_3^2) - b - \sum_{i=1}^3 \frac{p_i^2}{\lambda - a_k} \right) & -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 \frac{q_k p_k}{\lambda - a_k} \end{pmatrix},$$

построенную по стандартным правилам [19], [20]. Уравнение, определяющее спектральную кривую этой матрицы Лакса,

$$4(\lambda - a_1)(\lambda - a_2)\mu^2 - \lambda(a\lambda - a(a_1 + a_2) - b) = H_1 + \frac{H_2}{\lambda - a_3}$$

содержит функцию Гамильтона

$$H_1 = J_1^2 + J_2^2 + J_3^2 - a(a_1 q_1^2 + a_2 q_2^2 + a_3 q_3^2)^2 + a(a_1^2 q_1^2 + a_2^2 q_2^2 + a_3^2 q_3^2) - b(a_1 q_1^2 + a_2 q_2^2 + a_3 q_3^2)$$

и второй интеграл движения H_2 , который мы для краткости не будем выписывать явно.

Как и ранее, в этом случае существует единственное преобразование подобия с матрицей V (17), где

$$\hat{L}_{11} = \frac{\sqrt{a}}{2} + \frac{q_1^2(a_1 - a_3)\sqrt{a} + (q_3 p_1 - q_1 p_3)q_1/q_3}{2(\lambda - a_1)} + \frac{q_2^2(a_2 - a_3)\sqrt{a} + (q_3 p_2 - q_2 p_3)q_2/q_3}{2(\lambda - a_2)},$$

позволяющее получить матрицу Лакса, внедиагональные элементы которой порождают два семейства переменных разделения.

Первое семейство – это эллиптические координаты на сфере $u_{1,2}$, а второе семейство состоит из координат $v_{1,2}$, являющихся нулями второго внедиагонального элемента

$$\hat{L}_{21} = \frac{2\sqrt{a}p_3}{q_3} - 2a(a_1q_1^2 + a_2q_2^2 - a_3(q_1^2 + q_2^2)) - \frac{\delta_1}{\lambda - a_1} - \frac{\delta_2}{\lambda - a_2},$$

где

$$\delta_i = a(a_i - a_3)^2q_i^2 + \frac{2\sqrt{a}q_i(q_3p_i - q_ip_3)(a_i - a_3)}{q_3} + \frac{(q_3p_i - q_ip_3)^2}{q_3^2}, \quad i = 1, 2.$$

Подставляя переменные $v_{1,2}$ в определение $\tilde{H}_{1,2}$ (29) и применяя канонические преобразования

$$J_1 = J_1 + \sqrt{a}(a_2 - a_3)q_2q_3, \quad J_2 = J_2 - \sqrt{a}(a_1 - a_3)q_1q_3, \quad J_3 = J_3 + \sqrt{a}(a_1 - a_2)q_1q_2$$

и

$$q_k = \frac{q_k}{\sqrt{a_1 - a_2}}, \quad k = 1, 2, 3,$$

мы получим следующие выражения для функции Гамильтона и второго интеграла движения:

$$\begin{aligned} \tilde{H} &= J_1^2 + J_2^2 + 2J_3^2 - 2\sqrt{a}(q_2q_3J_1 + q_1q_3J_2 - 2q_1q_2J_3) + b(q_1^2 - q_2^2), \\ \tilde{H}_2^2 &= (J_1^2 - J_2^2 - 2\sqrt{a}q_3(q_2J_1 + q_1J_2) + bq_3^2)^2 + 4J_1^2J_2^2. \end{aligned} \quad (34)$$

Еще раз подчеркнем, что мы одновременно получили и интегралы движения, и переменные разделения, и разделенные уравнения. Аналогично [11] мы можем построить различные дополнительные интегрируемые возмущения этой системы, изменяя соответствующим образом разделенные уравнения.

Напомним, что Соколов [25], [26] нашел аналогичное интегрируемое возмущение для гамильтониана Ковалевской

$$\tilde{H} = J_1^2 + J_2^2 + 2J_3^2 + a(q_1J_3 - q_3J_1) + bq_2 \quad (35)$$

с потенциалом, зависящим от скоростей. Для системы Горячева–Чаплыгина аналогичное интегрируемое возмущение

$$\tilde{H} = J_1^2 + J_2^2 + 4J_3^2 + a(2q_1J_3 - q_3J_1) + bq_2 \quad (36)$$

обсуждается в работах [27], [28]. В этих же работах можно найти и обсуждение физического смысла подобных интегрируемых систем с потенциалами, зависящими от скоростей, и соответствующие ссылки.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе мы обсуждаем возможные аналоги общих преобразований Беклунда, связывающих различные уравнения Гамильтона–Якоби. По сути идея таких преобразований была сформулирована еще Якоби [29]: “Главная трудность при интегрировании данных дифференциальных уравнений состоит в введении удобных переменных, для поиска которых нет никакого общего правила. Поэтому мы

должны идти обратным путем и, найдя какую-нибудь замечательную подстановку, разыскивать задачи, в которых она может быть с успехом применена". То есть подставляя найденные каким-либо образом переменные разделения в произвольные разделенные уравнения, мы получим семейство интегрируемых гамильтонианов, которые одновременно допускают аддитивное разделение в полном интеграле соответствующих уравнений Гамильтона–Якоби. Однако получаемая таким образом теория одновременно разделяющихся систем будет слишком общей теорией, так как получаемые в большинстве случаев интегрируемые гамильтонианы не будут иметь никакого физического смысла.

Мы предлагаем немного сузить общую теорию Якоби, получая новые разделенные уравнения из старых уравнений (9) и одновременно с этим применяя сдвиг координат на якобиане соответствующей алгебраической кривой. Геометрический смысл такого сложения и вычитания разделенных уравнений, определяющих якобиан гиперэллиптической кривой рода $g = n = 2$, пока не ясен, но очевидным образом эта конструкция новых разделенных уравнений допускает обобщение на n -мерный случай.

Другая часть налагаемых ограничений состоит в использовании автопреобразования Беклунда (сдвига координат на якобиане) для придания физического смысла возмущенному гамильтониану $\tilde{H}$. Если при дискретизации мы рассматриваем v -переменные как исходные u -переменные в следующий момент некоторой новой переменной времени $\tilde{t}$, то в нашем случае мы предлагаем рассматривать v -переменные как переменные разделения для некоторой новой интегрируемой системы с гамильтонианом $\tilde{H}$. То есть мы предлагаем использовать преобразования Беклунда в качестве источника новых систем координат, построенных из классических ортогональных систем координат. Эта гораздо более сложная для n -мерного обобщения часть конструкции также требует дополнительного изучения.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 13-01-00061) и СПбГУ (грант № 11.38.664.2013).

Список литературы

- [1] Y. C. Li, A. Yurov, *Lie–Bäcklund–Darboux Transformations, Surveys of Modern Mathematics, VIII*, International Press, Somerville, MA; Higher Education Press, Beijing, 2014.
- [2] C. Rogers, W. K. Schief, *Bäcklund and Darboux Transformations: Geometry and Modern Applications in Soliton Theory*, Cambridge Texts in Applied Mathematics, **30**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2002.
- [3] А. И. Бобенко, Ю. Б. Сурис, *Дискретная дифференциальная геометрия. Интегрируемая структура*, РХД, Ижевск, 2010.
- [4] F. W. Nijhoff, *Discrete Systems and Integrability*, Academic Lecture Notes, University of Leeds, Leeds, UK, 2006.
- [5] Yu. B. Suris, *The Problem of Integrable Discretization: Hamiltonian Approach*, Progress in Mathematics, **219**, Springer, Berlin, 2003.
- [6] М. Абловиц, Х. Сигур, *Солитоны и метод обратной задачи*, Мир, М., 1987.
- [7] S. Wojciechowski, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **15**:12 (1982), L653–L657.
- [8] V. Kuznetsov, P. Vanhaecke, *J. Geom. Phys.*, **44**:1 (2002), 1–40.
- [9] F. Zullo, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **46**:14 (2013), 145203, 16 pp., arXiv: 1207.0387.
- [10] W. Miller, S. Post, P. Winternitz, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **46**:42 (2013), 423001, 97 pp.

- [11] A. V. Tsiganov, *Reg. Chaotic Dyn.*, **20**:1 (2015), 74–93.
- [12] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теоретическая физика*, т. 1: *Механика*, Физматлит, М., 2004.
- [13] E. G. Kalnins, *Separation of Variables for Riemann Spaces of Constant Curvature. Longman Scientific & Technical*, Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics, **28**, Longman Scientific & Technical, Harlow; John Wiley & Sons, New York, 1986.
- [14] A. P. Fordy, *Phys. D*, **52**:2–3 (1991), 204–210.
- [15] R. Conte, M. Musette, C. Verhoeven, *J. Nonlinear Math. Phys.*, **12**, suppl. 1 (2005), 212–227, arXiv: nlin/0412057.
- [16] V. Ravoson, L. Gavrilov, R. Caboz, *J. Math. Phys.*, **34**:6 (1993), 2385–2393.
- [17] M. Salerno, V. Z. Enol'skii, D. V. Leykin, *Phys. Rev. E*, **49**:6 (1994), 5897–5899.
- [18] S. Rauch-Wojciechowski, A. V. Tsiganov, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **29**:23 (1996), 7769–7778.
- [19] A. V. Tsiganov, *J. Math. Phys.*, **40**:1 (1999), 279–298.
- [20] А. В. Цыганов, *ТМФ*, **139**:2 (2004), 225–244.
- [21] J. Hietarinta, *Phys. Rep.*, **147**:2 (1987), 87–154.
- [22] G. Pucacco, *Celestial Mech. Dynam. Astronomy*, **90**:1–2 (2004), 109–123.
- [23] С. А. Чаплыгин, “Новое частное решение задачи о движении твердого тела в жидкости”, Труды отделения физич. наук Общ. любит. естествознания, **XI**, Типо-литография Н. Н. Шарапова, М., 1902, 10–19.
- [24] О. И. Богоявленский, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **49**:5 (1985), 899–915.
- [25] В. В. Соколов, *ТМФ*, **129**:1 (2001), 31–37.
- [26] V. V. Sokolov, “Generalized Kowalevski top: new integrable cases on $e(3)$ and $so(4)$ ”, *The Kowalevski Property* (University of Leeds, April 12–15, 2000), CRM Proceedings and Lecture Notes, **32**, ed. V. B. Kuznetsov, AMS, Providence, RI, 2002, 307–313.
- [27] В. В. Соколов, А. В. Цыганов, *ТМФ*, **131**:1 (2002), 118–125.
- [28] В. В. Соколов, А. В. Цыганов, *ТМФ*, **133**:3 (2002), 485–500.
- [29] C. G. J. Jacobi, *Vorlesungen über Dynamik*, G. Reimer, Berlin, 1866.

Поступила в редакцию 17.11.2014,
после доработки 10.01.2015