Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

З. Коричи, М. Т. Мефтах, Изучение квантовых статистических систем в D -мерном пространстве с использованием дробной производной, *ТМФ*, 2016, том 186, номер 3, 433–442

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8824>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.59.107

26 апреля 2023 г., 15:06:34

© 2016 г.

З. Коричи*, М. Т. Мефтах*

ИЗУЧЕНИЕ КВАНТОВЫХ СТАТИСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ В D -МЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ

Изучаются термодинамические свойства некоторых квантовых статистических систем, представленных дробным гамильтонианом в D -мерном пространстве. Вычислены статистическая сумма системы, состоящей из N дробных квантовых осцилляторов, и связанные с ней термодинамические величины. Термические и критические свойства бозе-газа и ферми-газа рассматриваются в контексте дробной энергии и описываются дробной производной.

Ключевые слова: квантовая система, статистическая сумма, дробная производная, осциллятор, бозе-система, конденсация, критическая температура, ферми-система, термодинамические свойства.

DOI: 10.4213/tmf8824

1. ВВЕДЕНИЕ

Дробная производная является обобщением обычной производной на случай произвольного нецелого порядка. Это понятие является давно известным, поскольку классическое исчисление целого порядка восходит к временам Ньютона и Лейбница. В своей переписке с Лейбницем Лопиталь задал ему вопрос о значении выражения $d^n y/dx^n$, если $n = 1/2$: “Что если n является дробным числом?”. Лейбниц ответил, что это приведет к парадоксу, который когда-нибудь будет иметь полезные последствия. Это письмо Лейбница рассматривается как момент рождения дробного исчисления [1], [2].

С момента своего появления дробная производная не переставала находить многочисленные применения в различных областях физики [3], включая классическую механику [4]–[6], хаотическую динамику [7], классический электромагнетизм [8], механику фрактальных сред [9], [10], физику плазмы [11], [12], физическую кинетику [13]–[15], теорию далекодействующих взаимодействий [16], [17] и теорию переноса [18]. Недавно авторы работ [19]–[23] применили это понятие в квантовой физике и разработали новую дробную квантовую механику. Уравнение Шредингера – уравнение в частных производных целочисленного порядка. Интересно, что мы получим,

*University Kasdi Mehbah Ouargla, Ouargla, Algeria.
E-mail: zinebkorichid02@gmail.com, mewalid@yahoo.com

если это уравнение будет содержать дробные производные. Результаты квантовой механики, полученные из понятия дробной производной, обсуждались некоторыми авторами [19], [21], [22]. В последние годы авторы работ [24], [25] обсуждали возможности введения этого понятия в квантовую статистическую физику и его физическую интерпретацию. Они также изучали некоторые проблемы теории квантовых статистических систем с энергетическим спектром дробно-степенного типа. Однако использование дробной производной в статистической физике не было изучено достаточно для того, чтобы показать, как скажется учет дробного гамильтониана на термодинамических свойствах некоторой квантовой статистической системы.

Цель настоящей работы заключается в том, чтобы изучить термодинамические свойства некоторых квантовых статистических систем в контексте дробного квантового гамильтониана в случае D -мерного пространства. Статья имеет следующую структуру. Раздел 2 посвящен определению дробного гамильтониана для D -мерных независимых квантовых осцилляторов. Используя канонический ансамбль, мы вычисляем статистическую сумму и некоторые термодинамические свойства для таких осцилляторов. В разделе 3 мы изучаем идеальные газы (бозе-газы и ферми-газы) в потенциальной ловушке в большом каноническом ансамбле и получаем термодинамические свойства и критические свойства. Переходя к пределу $\alpha = \nu = 2$, мы вновь получаем хорошо известные результаты для стандартного случая (определенного для целочисленной производной). В разделе 4 приводятся выводы.

2. ДРОБНЫЕ КВАНТОВЫЕ ОСЦИЛЛЯТОРЫ

Дробный квантовый осциллятор, введенный Ласкиным [26], является дробной квантово-механической моделью с гамильтонианом

$$H_{\alpha,\nu} = D_{\alpha}|p|^{\alpha} + q^2|x|^{\nu} \equiv D_{\alpha}(-\hbar^2\Delta)^{\alpha/2} + q^2|x|^{\nu}, \quad (1)$$

где D_{α} – обобщенный коэффициент, физическая размерность которого $[\text{Energy}]^{1-\alpha} \times [\text{Length}]^{\alpha} \times [\text{Time}]^{1-\alpha}$, q^2 – константа с размерностью $[\text{Energy}]^{1/2} \times [\text{Length}]^{-\nu/2}$ (для $1 < \alpha \leq 2$, $1 < \nu \leq 2$), а $(-\hbar^2\Delta)^{\alpha/2}$ – квантовый дробный оператор Риза. При $\alpha = \nu = 2$ соотношение (1) должно представлять гамильтониан гармонического осциллятора, тогда $D_2 = (2m)^{-1}$, $q^2 = m\omega^2/2$.

В этом разделе мы вычисляем статистическую сумму и статистические свойства системы, состоящей из N независимых дробных квантовых осцилляторов, описываемых следующим гамильтонианом:

$$\begin{aligned} H_{\alpha,\nu} &= \sum_{i=1}^N (D_{\alpha}|p_i|^{\alpha} + q^2|x_i|^{\nu}) \equiv \\ &\equiv \sum_{i=1}^N \left[D_{\alpha} \left(-\hbar^2 \sum_{k=1}^D \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} \right)^{\alpha/2} + q^2 \left(\sum_{k=1}^D x_k^2 \right)^{\nu/2} \right], \end{aligned} \quad (2)$$

где $p_i = (p_1, p_2, \dots, p_D)$ и $x_i = (x_1, x_2, \dots, x_D)$ – D -мерные импульс и координата.

В случае D измерений энергетические уровни дробного квантового осциллятора в полуклассической теории записываются следующим образом [27]:

$$E_{n_1, \dots, n_D} = a^{\sigma} (n_1 + n_2 + \dots + n_D + d)^{\sigma}, \quad (3)$$

где $n_i = 0, 1, 2, \dots$ и

$$a = \frac{\pi \hbar \nu D_\alpha^{1/\alpha} q^{2/\nu}}{2B(1/\nu, 1 + 1/\alpha)}, \quad \sigma = \frac{\alpha \nu}{\alpha + \nu}, \quad d = \frac{D}{2}, \quad (4)$$

$B(x, y)$ – хорошо известная бета-функция (интеграл Эйлера первого рода). Заметим, что автор работы [27] вычислил собственную энергию только для одного измерения ($D = 1$).

Если мы описываем систему, используя канонический ансамбль, то термодинамику можно изучать исходя из статистической суммы

$$Z_N = \frac{Z_1^N}{N!}, \quad (5)$$

где Z_1 – индивидуальная каноническая статистическая сумма,

$$\begin{aligned} Z_1 &= \sum_{n_1, \dots, n_D=0}^{\infty} e^{-\beta E_{n_1, \dots, n_D}} = \sum_{n_1, \dots, n_D=0}^{\infty} e^{-\beta a^\sigma (n_1 + \dots + n_D + d)^\sigma} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n + D - 1)!}{n!(D - 1)!} e^{-\beta a^\sigma (n + d)^\sigma}. \end{aligned} \quad (6)$$

Последнее равенство появляется из-за вырождения собственной энергии D -мерного квантового осциллятора. С помощью введения δ -представления ($\delta(x)$ – распределение Дирака) соотношение (6) может быть записано следующим образом:

$$Z_1 = \frac{1}{(D - 1)!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n + D - 1)!}{n!} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-\beta a^\sigma k} \delta(k - (n + d)^\sigma), \quad (7)$$

или, эквивалентно,

$$Z_1 = \frac{1}{(D - 1)!} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-\beta a^\sigma k} \frac{\Gamma(k^{1/\sigma} - d + D)}{\Gamma(k^{1/\sigma} - d + 1)} \theta(k^{1/\sigma} - d), \quad (8)$$

где функция Хевисайда $\theta(x)$ появляется в результате суммирования по δ -распределению. Оценивая функцию Хевисайда, мы получаем

$$\begin{aligned} Z_1 &= \frac{1}{(D - 1)!} \sum_{k=d^\sigma}^{\infty} e^{-\beta a^\sigma k} \frac{\Gamma(k^{1/\sigma} - d + D)}{\Gamma(k^{1/\sigma} - d + 1)} = \\ &= \frac{1}{(D - 1)!} \sum_{k=d^\sigma}^{\infty} e^{-\beta a^\sigma k} (k^{1/\sigma} + d - 1) \dots (k^{1/\sigma} - (d - 1)) = \\ &= \frac{1}{(D - 1)!} \sum_{m=0}^{D-1} S_{D-1}^{(m)} \sum_{k=d^\sigma}^{\infty} e^{-\beta a^\sigma k} (k^{1/\sigma} + (d - 1))^m, \end{aligned} \quad (9)$$

где $S_{D-1}^{(m)}$ – коэффициенты Стирлинга первого рода [28]. Чтобы оценить последнюю сумму в (9), мы используем биномиальное разложение

$$(k^{1/\sigma} + (d - 1))^m = (d - 1)^m \sum_{p=0}^m \frac{C_p^m}{(d - 1)^p} (k^{1/\sigma})^p, \quad (10)$$

где C_p^m – биномиальные коэффициенты. Следовательно, индивидуальная статистическая сумма принимает новый вид:

$$Z_1 = \frac{1}{(D-1)!} \sum_{m=0}^{D-1} S_{D-1}^{(m)} (d-1)^m \sum_{p=0}^m \frac{C_p^m}{(d-1)^p} \sum_{k=d^\sigma}^{\infty} e^{-\beta a^\sigma k} k^{p/\sigma}. \quad (11)$$

Заметим, что мы вновь получили стандартный результат для статистической суммы осциллятора в одном измерении, положив $D = 1$, $S_0^{(0)} = 1$, $C_0^0 = 1$ и $\sigma = 1$.

Используя обозначения $B = p/\sigma$ и $b = \beta a^\sigma$, последнюю сумму в (11) можно записать следующим образом:

$$\sum_{k=d^\sigma}^{\infty} e^{-\beta a^\sigma k} k^{p/\sigma} = \frac{\partial^B}{\partial(-b)^B} \sum_{k=d^\sigma}^{\infty} e^{-bk} = \left(\frac{\partial^{1/\sigma}}{\partial(-b)^{1/\sigma}} \right)^p \frac{e^{-bd^\sigma}}{1 - e^{-b}}, \quad (12)$$

и индивидуальная статистическая сумма приобретает вид

$$\begin{aligned} Z_1 &= \frac{1}{(D-1)!} \sum_{m=0}^{D-1} S_{D-1}^{(m)} (d-1)^m \sum_{p=0}^m \frac{C_p^m}{(d-1)^p} \left(\frac{\partial^{1/\sigma}}{\partial(-b)^{1/\sigma}} \right)^p \frac{e^{-bd^\sigma}}{1 - e^{-b}} = \\ &= \frac{1}{(D-1)!} \left[\sum_{m=0}^{D-1} S_{D-1}^{(m)} \hat{Y}^m \right] \frac{e^{-bd^\sigma}}{1 - e^{-b}} = \\ &= \frac{1}{(D-1)!} \hat{Y} (\hat{Y} - 1) (\hat{Y} - 2) \dots (\hat{Y} - D + 2) \frac{e^{-bd^\sigma}}{1 - e^{-b}}, \end{aligned} \quad (13)$$

где $\hat{Y}$ – оператор, задающийся выражением

$$\hat{Y} = d - 1 + \frac{\partial^{1/\sigma}}{\partial(-b)^{1/\sigma}} = \frac{D}{2} - 1 + \frac{\partial^{1/\sigma}}{\partial(-b)^{1/\sigma}}. \quad (14)$$

Последнее равенство в (13) возникает благодаря разложению Стирлинга, определяемому коэффициентами $S_{D-1}^{(m)}$, которые удовлетворяют рекуррентной формуле

$$\begin{aligned} S_{n+1}^{(m)} &= S_n^{(m-1)} - n S_n^{(m)}, & S_n^{(0)} &= \delta_{n,0}, & S_n^{(n)} &= 1, & n &= 0, 1, \dots, \\ S_1^{(1)} &= 1, & S_2^{(1)} &= -S_1^{(1)} = -1 & \text{и т. д.} \end{aligned} \quad (15)$$

Разложения (13) вычисляются систематически следующим образом: для $D = 2$

$$\begin{aligned} Z_1 &= \frac{1}{(D-1)!} \left[\sum_{m=0}^{D-1} S_{D-1}^{(m)} \hat{Y}^m \right] \frac{e^{-bd^\sigma}}{1 - e^{-b}} = [S_1^{(0)} + S_1^{(1)} \hat{Y}] \frac{e^{-bd^\sigma}}{1 - e^{-b}} \hat{Y} \frac{e^{-bd^\sigma}}{1 - e^{-b}}, \\ \hat{Y} &= \frac{\partial^s}{\partial(-b)^s}, \quad s = \sigma^{-1}, \end{aligned} \quad (16)$$

для $D = 3$

$$\begin{aligned} Z_1 &= \frac{1}{2} [S_2^{(0)} + S_2^{(1)} \hat{Y} + S_2^{(2)} \hat{Y}^2] \frac{e^{-bd^\sigma}}{1 - e^{-b}} = \frac{1}{2!} \hat{Y} (\hat{Y} - 1) \frac{e^{-bd^\sigma}}{1 - e^{-b}}, \\ \hat{Y} &= \frac{1}{2} + \frac{\partial^s}{\partial(-b)^s}, \end{aligned} \quad (17)$$

для $D = 4$

$$Z_1 = \frac{1}{3!} [S_3^{(0)} + S_3^{(1)} \hat{Y} + S_3^{(2)} \hat{Y}^2 + S_3^{(3)} \hat{Y}^3] \frac{e^{-bd^\sigma}}{1 - e^{-b}} = \frac{1}{3!} \hat{Y} (\hat{Y} - 1) (\hat{Y} - 2) \frac{e^{-bd^\sigma}}{1 - e^{-b}}, \quad (18)$$

$$\hat{Y} = 1 + \frac{\partial^s}{\partial(-b)^s},$$

и т. д. Остается обсудить дробную производную, появившуюся в этих формулах. Чтобы получить производную такого типа, мы воспользуемся формулой [2]

$$\frac{\partial^s}{\partial x^s} e^{\lambda x} \equiv D^s e^{\lambda x} = x^{-s} E_{1,1-s}(\lambda x), \quad (19)$$

где $E_{1,1-s}(\lambda x)$ – функция Миттаг-Леффлера.

Наконец, мы можем написать индивидуальную статистическую сумму (13) с помощью символа Похгаммера в более компактной форме:

$$Z_1 = \frac{(\hat{Y} - D + 2)_{D-1}}{(D-1)!} \frac{e^{-bd^\sigma}}{1 - e^{-b}}. \quad (20)$$

Теперь можно убедиться в том, что при $D = 2$, $d = 1$ и $\sigma = 1$, $\hat{Y} = -\partial/\partial b$ мы вновь получаем стандартный случай гармонического осциллятора в двух измерениях:

$$Z_1 = -\frac{\partial}{\partial b} \left(\frac{e^{-b}}{1 - e^{-b}} \right) = \frac{1}{e^{b/2} - e^{-b/2}} \frac{1}{e^{b/2} - e^{-b/2}}. \quad (21)$$

В случае больших измерений ($D > 4$) мы следуем той же подробной процедуре в формулах (16)–(18).

Знание статистической суммы Z_N позволяет определить все термодинамические величины. Формально энергия Гельмгольца, внутренняя энергия и энтропия даются следующими выражениями:

$$F = -k_B T \ln Z_N, \quad U = -\frac{\partial \ln Z_N}{\partial \beta}, \quad S = -\frac{\partial F}{\partial T}. \quad (22)$$

3. КОНФАЙНМЕНТ ИДЕАЛЬНЫХ БОЗЕ-ГАЗА И ФЕРМИ-ГАЗА

Одной из важных проблем статистической физики является проблема системы квантового газа. В настоящем разделе в контексте дробного гамильтониана в D -мерном пространстве мы изучаем статистические свойства идеального квантового газа, удерживаемого внешним дробным потенциалом.

3.1. Система бозонов. В D -мерном пространстве рассмотрим N частиц идеального бозе-газа, заключенных в объеме V и удерживаемых внешним дробным потенциалом $V(\vec{x}) = q^2 |\vec{x}|^\nu$. Мы полагаем, что спектральная энергия частицы этой системы определяется следующим образом:

$$\varepsilon = D_\alpha |\vec{p}|^\alpha + q^2 |\vec{x}|^\nu. \quad (23)$$

Естественный способ рассмотрения этой системы (системы бозонов) заключается в использовании большой канонической статистической суммы $D(z, V, T)$ [29], задаваемой выражением

$$D(z, V, T) = \prod_k \frac{1}{1 - z e^{-\beta \varepsilon_k}}, \quad (24)$$

где ε_k – энергия k -го одночастичного состояния, z – летучесть газа, которая связана с химическим потенциалом μ с помощью формулы

$$z = e^{\beta\mu}. \quad (25)$$

Заметим, что с помощью соотношений (23) и (24) большая каноническая статистическая сумма может быть записана следующим образом:

$$D(z, V, T) = \prod_{\alpha} \frac{1}{1 - ze^{-\beta(D_{\alpha}|p|^{\alpha} + q^2|x|^{\nu})}}. \quad (26)$$

Согласно (26) все термодинамические величины системы могут быть получены непосредственно.

3.1.1. Уравнения состояния. Для большого канонического ансамбля равновесной статистической механики уравнения состояния имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{PV}{KT} &= \ln(D(z, V, T)) = - \sum_{\alpha} \ln(1 - ze^{-\beta(D_{\alpha}|p|^{\alpha} + q^2|x|^{\nu})}) - \ln(1 - z), \\ N &= z \frac{\partial}{\partial z} \ln(D(z, V, T)) = \sum_{\alpha} \frac{ze^{-\beta(D_{\alpha}|p|^{\alpha} + q^2|x|^{\nu})}}{1 - ze^{-\beta(D_{\alpha}|p|^{\alpha} + q^2|x|^{\nu})}} + \frac{z}{1 - z}, \end{aligned} \quad (27)$$

где P и N – давление и полное среднее число частиц в системе соответственно. В термодинамическом пределе они могут быть записаны следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{PV}{KT} &= \frac{-4\pi^D}{\Gamma^2(D/2)h^D} \int p^{D-1} dp \int_0^{\infty} x^{D-1} \ln(1 - ze^{-\beta(D_{\alpha}p^{\alpha} + q^2x^{\nu})}) dx - \ln(1 - z), \\ N &= \frac{4\pi^D}{\Gamma^2(D/2)h^D} \int p^{D-1} dp \int_0^{\infty} x^{D-1} \frac{ze^{-\beta(D_{\alpha}p^{\alpha} + q^2x^{\nu})}}{1 - ze^{-\beta(D_{\alpha}p^{\alpha} + q^2x^{\nu})}} dx + \frac{z}{1 - z}. \end{aligned}$$

Вычисляя эти интегралы, мы окончательно получаем

$$\begin{aligned} \frac{PV}{KT} &= \frac{4\pi^D \Gamma(D/\alpha) \Gamma(D/\nu)}{\Gamma^2(D/2) h^D \nu \alpha (\beta)^{D/\nu + D/\alpha} q^{2D/\nu} D_{\alpha}^{D/\alpha}} g_{D/\alpha + D/\nu + 1}(z) - \ln(1 - z), \\ N &= \frac{4\pi^D \Gamma(D/\alpha) \Gamma(D/\nu)}{\Gamma^2(D/2) h^D \nu \alpha (\beta)^{D/\nu + D/\alpha} q^{2D/\nu} D_{\alpha}^{D/\alpha}} g_{D/\alpha + D/\nu}(z) + \frac{z}{1 - z}, \end{aligned} \quad (28)$$

где $g_l(z) = \sum_{k=1}^{\infty} z^k / k^l$ – функция Бозе.

С помощью введения параметров (виртуальное измерение)

$$D' = D + \frac{D\alpha}{\nu}$$

и

$$V^* = \left(\frac{D_{\alpha} h^{\alpha}}{q^2 \left(\frac{2\pi^{D/2} \Gamma(D/\alpha)}{\alpha \Gamma(D/2)} \right)^{\alpha/D}} \right)^{D/\nu} \frac{2\pi^{D/2} \Gamma(D/\nu + 1)}{D \Gamma(D/2)}$$

система (28) может быть записана следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{PV}{KT} &= \frac{V^*}{\lambda_g^{D'}} g_{D'/\alpha + 1}(z) - \ln(1 - z), \\ N &= \frac{V^*}{\lambda_g^{D'}} g_{D'/\alpha}(z) + \frac{z}{1 - z}, \end{aligned} \quad (29)$$

где

$$\lambda_g = \left(\frac{\Gamma(D/2)h^D \alpha(\beta D_\alpha)^{D/\alpha}}{2\pi^{D/2}\Gamma(D/\alpha)} \right)^{1/D} \quad (30)$$

– обобщенная термическая длина волны [30].

Сравнение системы уравнений (29) с уравнением состояния свободного идеального бозе-газа [24]

$$\begin{aligned} \frac{PV}{KT} &= \frac{V}{\lambda_g^D} g_{D/\alpha+1}(z) - \ln(1-z), \\ N &= \frac{V}{\lambda_g^D} g_{D/\alpha}(z) + \frac{z}{1-z} \end{aligned} \quad (31)$$

показывает, что уравнение состояния, описывающее удерживаемые бозоны, имеет вид, аналогичный уравнению свободного бозе-газа, когда $D' = D + D\alpha/\nu$ – размерность пространства, V^* – объем. В этом смысле можно сказать, что удерживаемая бозе-система эквивалентна свободной бозе-системе [31].

3.1.2. Температура перехода. По аналогии со свободным газом максимальное число частиц на возбужденных уровнях может быть получено исходя из предела $z \downarrow 1$, так что мы получаем

$$N_{\epsilon>0}^{\max} = \frac{4\pi^D \Gamma(D/\alpha) \Gamma(D/\nu)}{\Gamma^2(D/2) h^D \nu \alpha(\beta)^{D/\nu+D/\alpha} q^{2D/\nu} D_\alpha^{D/\alpha}} g_{D/\alpha+D/\nu}(1) = \frac{V^*}{\lambda_g^{D'}} g_{D'/\alpha}(1). \quad (32)$$

Отсюда получаем критическую температуру

$$T_B = \frac{1}{k_B} \left(\frac{\nu \alpha \Gamma^2(D/2) h^D q^{2D/\nu} D_\alpha^{D/\alpha} N}{4\pi^D \Gamma(D/\alpha) \Gamma(D/\nu) g_{D/\alpha+D/\nu}(1)} \right)^{\alpha\nu/D(\alpha+\nu)}, \quad (33)$$

а температурная зависимость фракции конденсата имеет вид

$$N_0 = N \left(1 - \left(\frac{T}{T_B} \right)^{D(\alpha+\nu)/\alpha\nu} \right). \quad (34)$$

3.1.3. Термодинамические свойства. Используя статистические выражения термодинамических величин, можно без труда получить термодинамические величины системы из соотношения (26). Например, внутренняя энергия этой системы записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} U &= - \frac{\partial \ln(D(z, V, T))}{\partial \beta} = \\ &= \begin{cases} \left(\frac{D}{\nu} + \frac{D}{\alpha} \right) N k_B T \frac{g_{D/\alpha+D/\nu+1}(z)}{g_{D/\alpha+D/\nu}(z)}, & T > T_B, \\ N K T_B \left(\frac{D}{\alpha} + \frac{D}{\nu} \right) \frac{g_{D/\alpha+D/\nu+1}(1)}{g_{D/\alpha+D/\nu}(1)} \left(\frac{T}{T_B} \right)^{D/\alpha+D/\nu+1}, & T \leq T_B, \end{cases} \end{aligned} \quad (35)$$

и удельная теплоемкость для $T > T_B$ дается выражением

$$\begin{aligned} \frac{C_V}{N k_B} &= \left(\frac{D}{\alpha} + \frac{D}{\nu} \right) \left(\left(\frac{D}{\alpha} + \frac{D}{\nu} \right) + 1 \right) \frac{g_{D/\alpha+D/\nu+1}(z)}{g_{D/\alpha+D/\nu}(z)} - \\ &\quad - \left(\frac{D}{\alpha} + \frac{D}{\nu} \right)^2 \frac{g_{D/\alpha+D/\nu}(z)}{g_{D/\alpha+D/\nu-1}(z)}, \end{aligned} \quad (36)$$

а для $T \leq T_B$

$$\frac{C_V}{Nk_B} = \left(\frac{D}{\alpha} + \frac{D}{\nu} \right) \left(\left(\frac{D}{\alpha} + \frac{D}{\nu} \right) + 1 \right) \frac{g_{D/\alpha+D/\nu+1}(1)}{g_{D/\alpha+D/\nu}(1)} \left(\frac{T}{T_B} \right)^{D/\alpha+D/\nu}. \quad (37)$$

Энергия Гельмгольца записывается как

$$F = N\mu - PV = \begin{cases} Nk_B T \left(\ln z - \frac{g_{D/\alpha+D/\nu+1}(z)}{g_{D/\alpha+D/\nu}(z)} \right), & T > T_B, \\ -Nk_B T_B \frac{g_{D/\alpha+D/\nu+1}(1)}{g_{D/\alpha+D/\nu}(1)} \left(\frac{T}{T_B} \right)^{D/\alpha+D/\nu+1}, & T \leq T_B, \end{cases} \quad (38)$$

и энтропия системы бозонов дается выражением

$$S = \frac{U - F}{T} = \begin{cases} Nk_B \left(\left(\frac{D}{\alpha} + \frac{D}{\nu} + 1 \right) \frac{g_{D/\alpha+D/\nu+1}(z)}{g_{D/\alpha+D/\nu}(z)} - \ln z \right), & T > T_B, \\ Nk_B \left(\frac{D}{\alpha} + \frac{D}{\nu} + 1 \right) \frac{g_{D/\alpha+D/\nu+1}(1)}{g_{D/\alpha+D/\nu}(1)} \left(\frac{T}{T_B} \right)^{D/\alpha+D/\nu}, & T \leq T_B. \end{cases} \quad (39)$$

Если положить $\alpha = 2$, то мы приходим к результатам, полученным в работе [32]. С этой точки зрения наша работа является обобщением этой работы для степенных потенциалов и импульса в выражении для гамильтониана.

3.2. Система фермионов. В случае ферми-газа большая статистическая сумма дается выражением

$$D(z, V, T) = \prod_k (1 + ze^{-\beta \varepsilon_k}) = \prod_{\alpha} (1 + ze^{-\beta(D_{\alpha}|p|^{\alpha} + q^2|x|^{\nu})}). \quad (40)$$

Отсюда следует, что давление газа и среднее число частиц N могут быть записаны следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{PV}{k_B T} &= \ln D(z, V, T) = \sum_{\alpha} \ln(1 + ze^{-\beta(D_{\alpha}|p|^{\alpha} + q^2|x|^{\nu})}), \\ N &= z \frac{\partial}{\partial z} \ln D(z, V, T) = \sum_{\alpha} \frac{ze^{-\beta(D_{\alpha}|p|^{\alpha} + q^2|x|^{\nu})}}{1 + ze^{-\beta(D_{\alpha}|p|^{\alpha} + q^2|x|^{\nu})}}. \end{aligned} \quad (41)$$

Используя тот же метод, что и в случае бозе-газа, мы записываем уравнения состояния следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{PV}{KT} &= \frac{4\pi^D \Gamma(D/\alpha) \Gamma(D/\nu)}{\Gamma^2(D/2) h^D \nu \alpha (\beta)^{D/\nu+D/\alpha} q^{2D/\nu} D_{\alpha}^{D/\alpha}} f_{D/\alpha+D/\nu+1}(z), \\ N &= \frac{4\pi^D \Gamma(D/\alpha) \Gamma(D/\nu)}{\Gamma^2(D/2) h^D \nu \alpha (\beta)^{D/\nu+D/\alpha} q^{2D/\nu} D_{\alpha}^{D/\alpha}} f_{D/\alpha+D/\nu}(z), \end{aligned} \quad (42)$$

где $f^l(z) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} (z^k/k^l)$ – функция Ферми.

Все термодинамические свойства можно найти без труда: внутренняя энергия

$$U = \left(\frac{D}{\alpha} + \frac{D}{\nu} \right) Nk_B T \frac{f_{D/\alpha+D/\nu+1}(z)}{f_{D/\alpha+D/\nu}(z)}, \quad (43)$$

удельная теплоемкость для постоянного объема

$$\begin{aligned} \frac{C_V}{Nk_B} = & \left(\frac{D}{\alpha} + \frac{D}{\nu} \right) \left(\left(\frac{D}{\alpha} + \frac{D}{\nu} \right) + 1 \right) \frac{f_{D/\alpha+D/\nu+1}(z)}{f_{D/\alpha+D/\nu}(z)} - \\ & - \left(\frac{D}{\alpha} + \frac{D}{\nu} \right)^2 \frac{f_{D/\alpha+D/\nu}(z)}{f_{D/\alpha+D/\nu-1}(z)}, \end{aligned} \quad (44)$$

энергия Гельмгольца

$$F = Nk_B T \left(\ln z - \frac{f_{D/\alpha+D/\nu+1}(z)}{f_{D/\alpha+D/\nu}(z)} \right), \quad (45)$$

энтропия

$$S = Nk_B \left(\left(\frac{D}{\alpha} + \frac{D}{\nu} + 1 \right) \frac{f_{D/\alpha+D/\nu+1}(z)}{f_{D/\alpha+D/\nu}(z)} - \ln z \right). \quad (46)$$

Замечание, касающееся эквивалентности между ферми-газом в потенциальной ловушке и свободным ферми-газом, справедливо и в этом случае. Также, если мы положим $\alpha = 2$, $\nu = 2$, мы вновь получаем все стандартные результаты.

Кстати, авторы работы [33] рассматривали идеальный газ в потенциальной ловушке, экстраполируя пространственное измерение с двух до любого другого измерения. Наша работа выполнена в рамках дробной квантовой механики [19], [26], [27]. Мы также показали, что наша система с идеальным газом в потенциальной ловушке эквивалентна системе свободных бозонов; это задача, которая не рассматривается в работе [33].

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе мы применили дробное исчисление к статистической механике в D -мерном пространстве. Мы сосредоточили наше внимание на том, чтобы показать, как меняются термодинамические свойства некоторой статистической системы, описываемой дробным гамильтонианом. Другой интересный и фундаментальный вопрос заключается в том, чтобы вновь получить стандартные результаты статистической механики при переходе от дробных показателей к целым. Действительно, мы обнаружили, что статистическая сумма системы, состоящей из N дробных квантовых осцилляторов, модифицирована и термодинамические свойства этой системы также меняются. Для подтверждения справедливости наших вычислений мы сравнили наши результаты с результатами в стандартном случае. Это мы проделали, сделав дробные показатели целыми ($\alpha = \nu = 2$). Еще одна система была нам интересна, а именно квантовый газ Бозе–Эйнштейна. В частности, мы исследовали проблему конденсации, которая является особым свойством этого газа. Мы обнаружили, что газ в потенциальной ловушке испытывает фазовый переход второго порядка при температуре T_B в зависимости от дробных показателей. Если показатели целые, то мы получаем стандартный случай. Такой же подход был применен к другой фундаментальной системе – к квантовому газу Ферми–Дирака. В этом случае мы также показали, что квантовый газ в потенциальной ловушке эквивалентен свободному квантовому газу.

Благодарности. Авторы выражают признательность лаборатории LRPPS и ее директору за поддержку, содействие и некоторые предоставленные технические материалы для проведения этой работы. Мы также благодарим Prof. M. Naoua (English Department, El-Oued University) за помощь в улучшении английского языка этой статьи. Особую благодарность мы выражаем Prof. E. Koelink (Mathematics Department, Radboud University, Nijmegen, Netherlands), который сообщил нам некоторые подробности, касающиеся коэффициентов Стирлинга.

Список литературы

- [1] K. S. Miller, B. Ross, *An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations*, John Wiley and Sons, New York, 1993.
- [2] I. Podlubny, *Fractional Differential Equations. An Introduction to Fractional Derivatives, Fractional Differential Equations, to Methods of Their Solution and Some of Their Applications*, Mathematics in Science and Engineering, **198**, Academic Press, San Diego, CA, 1999.
- [3] R. Hilfer (ed.), *Applications of Fractional Calculus in Physics*, World Sci., Singapore, 2000.
- [4] K. S. Fa, *Physica A*, **350**:2 (2005), 199–206.
- [5] F. Riewe, *Phys. Rev. E*, **53**:2 (1996), 1890–1899.
- [6] F. Riewe, *Phys. Rev. E*, **55**:3 (1997), 3581–3592.
- [7] G. M. Zaslavsky, *Hamiltonian Chaos and Fractional Dynamics*, Oxford Univ. Press, Oxford, 2005.
- [8] A. Hussain, S. Ishfaq, Q. A. Naqvi, *Prog. Electromagn. Res.*, **63** (2006), 319–335.
- [9] V. E. Tarasov, *Phys. Lett. A*, **336**:2–3 (2005), 167–174.
- [10] V. E. Tarasov, *Chaos*, **15**:2 (2005), 023102, 8 pp., arXiv: nlin/0602029.
- [11] B. A. Carreras, V. E. Lynch, G. M. Zaslavsky, *Phys. Plasmas*, **8**:12 (2001), 5096–5103.
- [12] V. E. Tarasov, *Phys. Plasmas*, **12**:8 (2005), 082106, 9 pp.
- [13] G. M. Zaslavsky, *Physica D*, **76**:1–3 (1994), 110–122.
- [14] R. Nigmatullin, *Physica A*, **363**:2 (2006), 282–298.
- [15] G. M. Zaslavsky, M. A. Edelman, *Physica D*, **193**:1–4 (2004), 128–147.
- [16] N. Laskin, G. M. Zaslavsky, *Physica A*, **368**:1 (2006), 38–54, arXiv: nlin/0512010.
- [17] V. E. Tarasov, G. M. Zaslavsky, *Chaos*, **16**:2 (2006), 023110, 13 pp.
- [18] B. В. Учайкин, *УФН*, **173**:8 (2003), 847–876.
- [19] N. Laskin, *Phys. Lett. A*, **268**:4–6 (2000), 298–305, arXiv: hep-ph/9910419; *Phys. Rev. E*, **62**:3 (2000), 3135–3145, arXiv: 0811.1769.
- [20] X. Guo, M. Xu, *J. Math. Phys.*, **47**:8 (2006), 082104, 9 pp.
- [21] J. Dong, M. Xu, *J. Math. Phys.*, **48**:7 (2007), 072105, 14 pp.
- [22] R. Herrmann, *Gam. Ori. Chron. Phys.*, **1**:1 (2013), 1–12, arXiv: 1210.4410.
- [23] R. Herrmann, *Cent. Eur. J. Phys.*, **11**:10 (2013), 1212–1220, arXiv: 1308.4587.
- [24] Z. Korichi, M. T. Meftah, *J. Math. Phys.*, **55**:3 (2014), 033302, 9 pp.
- [25] З. З. Алисултанов, Р. П. Мейланов, *ТМФ*, **171**:3 (2012), 404–416.
- [26] N. Laskin, *Phys. Rev. E*, **66**:5 (2002), 056108, 7 pp., arXiv: quant-ph/0206098.
- [27] N. Laskin, *Principles of fractional quantum mechanics*, arXiv: 1009.5533.
- [28] М. Абрамовиц, И. Стиган (ред.), *Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами*, Наука, М., 1979.
- [29] K. Huang, *Statistical Mechanics*, John Wiley and Sons, New York, 1963.
- [30] Z. Yan, *Eur. J. Phys.*, **21**:6 (2000), 625–631.
- [31] G. Su, Y. Cai, J. Chen, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **42**:12 (2009), 125003, 7 pp.
- [32] S. Luca, *J. Math. Phys.*, **41**:12 (2000), 8016–8024.
- [33] Z. Yan, M. Li, L. Chen, C. Chen, J. Chen, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **32**:22 (1999), 4069–4078.

Поступила в редакцию 23.11.2014,
после доработки 5.03.2015