Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. П. Величева, А. А. Сузько, Точные решения нестационарного уравнения Шредингера, *ТМФ*, 1998, том 115, номер 3, 410–418

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf883>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.156.22

26 апреля 2023 г., 13:56:57

© 1998 г.

Е. П. Величева*, А. А. Сузько†

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ НЕСТАЦИОНАРНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА

Разрабатывается процедура решения в явном аналитическом виде нестационарного уравнения Шредингера на основе точно решаемых стационарных задач. Рассмотрено образование неадиабатической геометрической фазы при циклической эволюции квантовой системы.

1. ВВЕДЕНИЕ

Предположим, что состояние $|\Psi(t)\rangle$ системы эволюционирует в соответствии с уравнением Шредингера

$$i\hbar \frac{d|\Psi(t)\rangle}{dt} = H(t)|\Psi(t)\rangle. \quad (1)$$

Решение этого уравнения с помощью оператора эволюции $U(t) = U(t, 0)$ можно представить в виде

$$|\Psi(t)\rangle = U(t)|\Psi(0)\rangle. \quad (2)$$

Для оператора эволюции получаем уравнение

$$i\hbar \frac{dU(t)}{dt} = H(t)U(t),$$

решение которого обычно записывают в символической форме

$$U(t) = T \exp \left[\left(-\frac{i}{\hbar} \right) \int_0^t H(t') dt' \right],$$

где T — хронологический оператор. Решение нестационарного уравнения (1) можно также представить с помощью общего унитарного преобразования $\hat{S}^\dagger(t) = \hat{S}^{-1}(t)$:

$$|\Psi(t)\rangle = \hat{S}(t)|\hat{\psi}(t)\rangle. \quad (3)$$

* Гомельский государственный университет, Гомель, Беларусь

† Институт радиационных физико-химических проблем Академии наук Беларуси, Минск, Беларусь

Из того что это преобразование унитарно и сохраняет вид уравнения (1), следуют формулы преобразования исходных гамильтониана и оператора эволюции

$$H(t) \rightarrow \hat{H}(t) = \hat{S}^\dagger(t) H(t) \hat{S}(t) - i\hbar \hat{S}^\dagger(t) \frac{d}{dt} \hat{S}(t), \quad (4)$$

$$U(t) \rightarrow \hat{U}(t) = \hat{S}^\dagger(t) U(t) \hat{S}(0). \quad (5)$$

Легко видеть, что квантовые унитарные преобразования $\hat{S}(t)$ действуют аналогично неабелевым калибровочным преобразованиям физики частиц. Чем же могут быть полезны эти квантовые калибровочные преобразования для решения уравнения (1)? Удобно ввести такое калибровочное преобразование $\hat{S}(t) = S(t)$, чтобы в полученном из (1) с его помощью уравнении

$$i\hbar \frac{d|\Phi(t)\rangle}{dt} = \overline{H}|\Phi(t)\rangle \quad (6)$$

гамильтониан $\overline{H}(t)$, определяемый соотношением (4), не зависел от времени, т.е. $(d/dt)\overline{H} = 0$ (см., например, [1, 2]). Отсюда следует уравнение для оператора $S(t)$:

$$\dot{S}^\dagger H S + S^\dagger \frac{\partial H}{\partial t} S + S^\dagger H \dot{S} - i\hbar \dot{S}^\dagger \dot{S} - i\hbar S^\dagger \ddot{S} = 0, \quad (7)$$

где принято обозначение $\dot{S} = (d/dt)S$.

Решение уравнения (6) с не зависящим от времени гамильтонианом

$$|\Phi(t)\rangle = \hat{U}(t, 0)|\Phi(0)\rangle \equiv \exp(-i\overline{H}t/\hbar)|\Phi(0)\rangle \quad (8)$$

может быть записано в виде

$$|\Phi(t)\rangle = \exp\left(-\frac{i\mathcal{E}t}{\hbar}\right)|\varphi(\mathcal{E})\rangle \quad (9)$$

и, по сути дела, сводится к решению стационарной задачи

$$\overline{H}|\varphi(\mathcal{E})\rangle = \mathcal{E}|\varphi(\mathcal{E})\rangle, \quad (10)$$

т.е. функции $|\varphi(\mathcal{E})\rangle = |\Phi(t=0)\rangle$ являются собственными функциями оператора $\overline{H}$ и в то же время функциями начального состояния для уравнения (6). Как легко видеть из (8), учет оператора эволюции

$$\hat{U}(t) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\overline{H}t\right)$$

для $\Phi(t)$ в (5) позволяет записать следующее соотношение между оператором эволюции $U(t)$ и преобразованием $S(t)$:

$$U(t) = S(t) \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\overline{H}t\right) S^\dagger(0). \quad (11)$$

Используя преобразование $\mathcal{S}(t)$ в уравнении (4) при $t = 0$, легко установить связь между не зависящим от времени гамильтонианом $\overline{H}$ и гамильтонианом $H(t)$ в начальный момент времени $H_0 \equiv H(0)$:

$$\overline{H} = \mathcal{S}^\dagger(0)H_0\mathcal{S}(0) - i\hbar\mathcal{S}^\dagger(0)\dot{\mathcal{S}}(0). \quad (12)$$

Учет соотношения (5) дает связь между гамильтонианом в начальный и произвольный моменты времени

$$H(t) = \mathcal{S}(t)\mathcal{S}^\dagger(0)H_0\mathcal{S}(0)\mathcal{S}^\dagger(t). \quad (13)$$

Итак, использование унитарных преобразований, ведущих к не зависящему от времени гамильтониану, сводит решение уравнения (1) к решению уравнения (10) относительно $|\varphi(\mathcal{E})\rangle$ и решению уравнения (7) относительно $\mathcal{S}(t)$. Решение квантовых задач рассеяния традиционно связано с решением одноканальных или многоканальных систем уравнений (10), описывающих стационарные процессы. Однако решение уравнения (7) относительно $\mathcal{S}(t)$ при заданном $H(t)$ в общем случае является едва ли не более сложной задачей, чем решение исходного уравнения (1).

Мы предлагаем поступить иначе [3] – использовать в качестве исходных широкий класс не зависящих от времени гамильтонианов, для которых решения стационарного уравнения Шредингера (10) могут быть получены аналитически. Тогда при заранее заданных в определенном виде операторах $\mathcal{S}(t)$ можно найти соответствующие зависящие от времени гамильтонианы и найти точные решения нестационарного уравнения Шредингера (1).

2. ГАМИЛЬТониАНЫ, ДОПУСКАЮЩИЕ ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ НЕСТАЦИОНАРНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА

Рассмотрим задачу по восстановлению в явном виде изменяющегося со временем гамильтониана

$$H(t) = (\hat{p}_x^2 + q(x))\hat{I} + \mathbf{B}(t, x) \cdot \mathbf{j}, \quad (14)$$

используя не зависящие от времени гамильтонианы, допускающие аналитические решения стационарного уравнения (10). Здесь $q(x)$ – стационарный потенциал, $\mathbf{B}(t, x)$ – изменяющийся со временем потенциал, который часто можно трактовать как магнитное поле, $\mathbf{j} = (\hat{j}_1, \hat{j}_2, \hat{j}_3)$ – оператор спина и $\hat{j}_i$ – соответствующие ему $(2j + 1) \times (2j + 1)$ -матричные компоненты, $\hat{p}_x = -i\hbar\nabla_x$ – оператор импульса, $\hat{I}$ – единичная матрица.

Рассмотрим в качестве модельной стационарной задачи двухканальное уравнение Шредингера с действительной и симметричной потенциальной матрицей $V(x)$ ($V_{12}(x) = V_{21}(x)$):

$$\overline{H}(x)|\Phi(x)\rangle = \mathcal{E}|\Phi(x)\rangle, \quad \overline{H}(x) = \hat{p}_x^2 + V(x). \quad (15)$$

Как хорошо известно, по спектральным характеристикам в обратной задаче рассеяния определяют потенциал и соответствующие ему решения. В качестве спектральных данных служат матрица рассеяния $\mathcal{S}(k)$ и характеристики связанных состояний $\{\mathcal{E}_\nu, \gamma_\nu^2\}$ – значения их энергий и нормировок. Гамильтониан (15) может быть представлен как сумма диагональной и бесследовой матриц

$$\begin{aligned} \overline{H}(x) = & \left(\hat{p}_x^2 + \frac{V_{11}(x) + V_{22}(x)}{2} \right) \hat{I} + \\ & + \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(V_{11}(x) - V_{22}(x)) & V_{12}(x) \\ V_{21}(x) & -\frac{1}{2}(V_{11}(x) - V_{22}(x)) \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (16)$$

что позволяет представить его в виде

$$\overline{H}(x) = h(x)\hat{I} + \overline{\mathbf{B}}(x) \cdot \boldsymbol{\sigma} = h(x) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \overline{\Omega}(x) \begin{pmatrix} \cos \bar{\theta}(x) & \sin \bar{\theta}(x) \\ \sin \bar{\theta}(x) & -\cos \bar{\theta}(x) \end{pmatrix}. \quad (17)$$

Здесь

$$h(x) = \hat{p}_x^2 + \frac{1}{2}(V_{11}(x) + V_{22}(x)), \quad \boldsymbol{\sigma} = (\hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_2, \hat{\sigma}_3),$$

$\hat{\sigma}_i$ – матрицы Паули,

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{B}}(x) &= \overline{\Omega}(x)(\sin \bar{\theta}(x), 0, \cos \bar{\theta}(x)), \\ \overline{\Omega}(x) &= \frac{1}{2} \sqrt{(V_{11}(x) - V_{22}(x))^2 + 4V_{12}(x)^2}, \\ \sin \bar{\theta}(x) &= \frac{V_{12}(x)}{\overline{\Omega}(x)}, \quad \cos \bar{\theta}(x) = \frac{V_{11}(x) - V_{22}(x)}{2\overline{\Omega}(x)}. \end{aligned} \quad (18)$$

Очевидно, что гамильтониан двухканальной задачи соответствует трехмерной задаче с координатами, зависящими от параметра x . В качестве этих координат можно выбрать, например, коллективные координаты $B_i(x)$, зависящие от внутренних координат x (в данном случае компонента $\bar{B}_2(x) = 0$). Такой гамильтониан может отвечать проблеме двухуровневого атома или движению частицы спина $1/2$ в переменном магнитном поле $\overline{\mathbf{B}}(x)$.

Осуществим унитарное преобразование стационарного уравнения Шредингера, используя изменяющийся со временем оператор

$$\mathcal{S}(t) = \exp(-i\hat{\sigma}_3\omega t), \quad (19)$$

который соответствует вращению на угол ωt вокруг оси z . Из уравнения (4) получим соотношение связи между не зависящим от времени гамильтонианом $\overline{H}(x)$ и гамильтонианом $H(t)$, изменяющимся со временем,

$$H(t) = \mathcal{S}(t)\overline{H}(x)\mathcal{S}^\dagger(t) + \omega\hat{\sigma}_3. \quad (20)$$

Гамильтониан $H(t)$ может быть переписан в виде

$$\begin{aligned} H(t) &= h(x) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \overline{\Omega}(x) \begin{pmatrix} \cos \bar{\theta}(x) + \frac{\omega}{\overline{\Omega}(x)} & \sin \bar{\theta}(x) \exp(2i\omega t) \\ \sin \bar{\theta}(x) \exp(-2i\omega t) & -\left(\cos \bar{\theta}(x) + \frac{\omega}{\overline{\Omega}(x)}\right) \end{pmatrix} = \\ &= h(x) \hat{I} + \mathbf{B}(t, x) \cdot \boldsymbol{\sigma}. \end{aligned} \quad (21)$$

Ему можно поставить в соответствие гамильтониан (14) с нестационарным полем

$$\mathbf{B}(t, x) = \Omega(x) (\sin \theta(x) \cos(2\omega t), \sin \theta(x) \sin(2\omega t), \cos \theta(x)), \quad (22)$$

компоненты которого определяются с помощью соотношений

$$\begin{aligned} \Omega(x) &= \overline{\Omega}(x) \left(1 + \frac{\omega^2}{\overline{\Omega}^2(x)} + 2 \frac{\omega}{\overline{\Omega}(x)} \cos \bar{\theta}(x) \right)^{1/2}, \\ \sin \theta(x) &= \frac{\overline{\Omega}(x) \sin \bar{\theta}(x)}{\Omega(x)}, \quad \cos \theta(x) = \frac{\overline{\Omega}(x) \cos \bar{\theta}(x)}{\Omega(x)} + \frac{\omega}{\Omega(x)}. \end{aligned} \quad (23)$$

Легко видеть из соотношений (21) и (22), что в результате унитарного преобразования (19) возникла отличная от нуля составляющая вектора $\mathbf{B}(t, x)$ вдоль оси y . Из соотношения (20) при $t = 0$ получаем выражение для начального гамильтониана

$$H_0(x) = \overline{H}(x) + \omega \hat{\sigma}_3,$$

которое удобно переписать в виде

$$H_0(x) = (\hat{p}_x^2 + q(x)) \hat{I} + \mathbf{B}_0(x) \cdot \boldsymbol{\sigma}, \quad (24)$$

где поле $\mathbf{B}_0$ определяется следующим образом:

$$\mathbf{B}_0(x) = \Omega(x) (\sin \theta(x), 0, \cos \theta(x)). \quad (25)$$

Итак, построен гамильтониан

$$\begin{aligned} H(t) &= \left(\hat{p}_x^2 + \frac{V_{11}(x) + V_{22}(x)}{2} \right) \hat{I} + \\ &+ \begin{pmatrix} \frac{V_{11}(x) - V_{22}(x)}{2} + \omega & V_{12}(x) \exp(2i\omega t) \\ V_{21}(x) \exp(-2i\omega t) & -\left(\frac{V_{11}(x) - V_{22}(x)}{2} + \omega \right) \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (26)$$

который допускает представление в явном виде решений нестационарного уравнения Шредингера (1):

$$|\Psi(t, x)\rangle = \exp(-i\hat{\sigma}_3\omega t) \exp\left(-\frac{i\overline{H}t}{\hbar}\right) |\Phi(x)\rangle. \quad (27)$$

Действительно, собственные значения $\mathcal{E}$ стационарного уравнения Шредингера с гамильтонианом $\bar{H}$ известны, поскольку они являются исходными данными в обратной задаче. Используя процедуру алгебраических преобразований Баргмана или Дарбу, по спектральным характеристикам в явном виде восстанавливаются потенциал и решения $|\Phi\rangle$.

Пусть $V(x)$ – баргмановская потенциальная матрица, позволяющая находить в явном аналитическом виде решение уравнения (15). В качестве примера приведем явный вид для матричных элементов безотражательного потенциала и соответствующих ему решений Йоста [4]:

$$V_{ij}(x) = 2 \frac{d}{dx} \sum_{\nu, \lambda} \exp(-\kappa_i^\nu x) \gamma_i^\nu P_{\nu\lambda}^{-1}(x) \gamma_j^\lambda \exp(-\kappa_j^\lambda x), \quad (28)$$

$$F_{jj'}^\pm(k, x) = \exp(\pm i k_j x) \delta_{jj'} - \sum_{\nu, \lambda} \gamma_j^\nu \exp(-\kappa_j^\nu x) P_{\nu\lambda}^{-1}(x) \int_x^\infty \gamma_{j'}^\lambda \exp(-(\kappa_{j'}^\lambda \pm i k_{j'}) x') dx', \quad (29)$$

где

$$P_{\nu\lambda} = \delta_{\nu\lambda} + \sum_{j'} \frac{\gamma_{j'}^\nu \gamma_{j'}^\lambda}{\kappa_{j'}^\nu + \kappa_{j'}^\lambda} \exp(-(\kappa_{j'}^\nu + \kappa_{j'}^\lambda) x).$$

Нормированное решение для векторной функции связанного состояния выражается через матрицу решений Йоста (29), взятую при энергии связанного состояния $k_\nu^2 = -\mathcal{E}_\nu$, и имеет вид

$$|\varphi_i(\mathcal{E}_\nu, x)\rangle = \sum_j^m F_{ij}(\mathcal{E}_\nu, x) \gamma_j^\nu, \quad i, j = 1, 2.$$

В приведенных формулах индексы ν и λ отвечают связанным состояниям, характеризующимся энергиями $\mathcal{E}_\nu$ и нормировочными матрицами $|\gamma_i^\nu\rangle\langle\gamma_j^\nu|$, в то время как для обозначения каналовых индексов использованы индексы i, j . Следует отметить, что класс точно решаемых многоканальных задач далеко не ограничивается приведенным примером. Использование техники вырожденных ядер при решении интегральных уравнений обратной задачи рассеяния как на всей оси, так и на полуоси, а также радиальной задачи в подходах Гельфанда–Левитана и Марченко дает многочисленные примеры точно решаемых стационарных задач, которые могут быть использованы для исследования задач нестационарных.

3. НЕАДИАБАТИЧЕСКИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ФАЗЫ

Осуществим процедуру унитарных преобразований $\bar{\mathcal{S}}(x)$ и $\mathcal{S}(x)$, устранивающих составляющие $\bar{B}_1(x)$ и $B_1(x)$ полей $\bar{\mathbf{B}}(x)$ и $\mathbf{B}_0(x)$. Она реализуется помощью $SU(2)$ -операторов

$$\bar{\mathcal{S}}(x) = \exp(-i\bar{\theta}(x)\hat{j}_2) \quad \text{и} \quad \mathcal{S}(x) = \exp(-i\theta(x)\hat{j}_2), \quad (30)$$

соответственно, $\mathbf{j} = (1/2)\boldsymbol{\sigma}$. Поскольку справедливы соотношения

$$\bar{\mathbf{B}}(x) \cdot \boldsymbol{\sigma} = \bar{\Omega}(x) \exp(-i\bar{\theta}(x)\hat{j}_2)\hat{\sigma}_3 \exp(i\bar{\theta}(x)\hat{j}_2), \quad (31)$$

$$\mathbf{B}_0(x) \cdot \boldsymbol{\sigma} = \Omega(x) \exp(-i\theta(x)\hat{j}_2)\hat{\sigma}_3 \exp(i\theta(x)\hat{j}_2), \quad (32)$$

то в результате действия преобразований $\bar{\mathcal{S}}(x)$ и $\mathcal{S}(x)$ системы уравнений для гамильтонианов (15) и (24) сводятся [5] к уравнениям калибровочного вида

$$[-(\nabla_x \hat{I} + \bar{A}(x))^2 + q(x)\hat{I} + \bar{\Omega}(x) \cdot \hat{\sigma}_3 - P^2]\Phi'(x) = 0, \quad (33)$$

$$[-(\nabla_x \hat{I} + A(x))^2 + q(x)\hat{I} + \Omega(x) \cdot \hat{\sigma}_3 - P^2]\Psi'_0(x) = 0, \quad (34)$$

где $P = \text{diag}(p_n)$, для новых функций

$$\Phi'(x) = \exp(-i\bar{\theta}(x)\hat{j}_2)\Phi(x), \quad \Psi'_0(x) = \exp(-i\theta(x)\hat{j}_2)\Psi_0(x). \quad (35)$$

Связь между каналами в уравнениях (33), (34) осуществляется матричными элементами операторов $\bar{A}(x)$ и $A(x)$, которые действуют как эффективные векторные потенциалы и генерируются процедурой калибровочного преобразования (30):

$$\begin{aligned} \bar{A}(x) &= \exp(i\bar{\theta}(x)\hat{j}_2) \frac{d}{dx} \exp(-i\bar{\theta}(x)\hat{j}_2), \\ A(x) &= \exp(i\theta(x)\hat{j}_2) \frac{d}{dx} \exp(-i\theta(x)\hat{j}_2). \end{aligned} \quad (36)$$

Отметим, что элементы оператора

$$\bar{\mathcal{S}}(x) = \exp(-i\bar{\theta}(x)\hat{j}_2) = \begin{pmatrix} \frac{\cos \bar{\theta}(x)}{2} & \frac{\sin \bar{\theta}(x)}{2} \\ -\frac{\sin \bar{\theta}(x)}{2} & \frac{\cos \bar{\theta}(x)}{2} \end{pmatrix}$$

определяются элементами известной потенциальной матрицы $V_{ij}(x)$ по формулам (18). Учитывая оператор преобразования (19) в операторе эволюции (11):

$$U(t) = \exp(-i\hat{\sigma}_3\omega t) \exp\left(-\frac{i\bar{H}t}{\hbar}\right),$$

представим решение (27) уравнения (1) с гамильтонианом (21) в виде

$$|\Psi(t, \mathcal{E}_\nu)\rangle = \exp(\mp i\omega t) \exp\left(-\frac{i\mathcal{E}_\nu t}{\hbar}\right) |\Psi(0, \mathcal{E}_\nu)\rangle.$$

Собственные значения и собственные функции оператора $\bar{H}(x)$ — это $\mathcal{E}_\nu$ и $|\varphi_\alpha(\mathcal{E}_\nu)\rangle$, где индекс канала $\alpha = 1, 2$ принимает два значения в соответствии с постановкой задачи. В момент времени $T = \pi/\omega$ имеем

$$|\Psi_\alpha(T, \mathcal{E}_\nu)\rangle = \exp(\mp i\pi) \exp\left(-\frac{i\mathcal{E}_\nu T}{\hbar}\right) |\Psi_\alpha(0, \mathcal{E}_\nu)\rangle. \quad (37)$$

Тогда полная фаза определится соотношением

$$\delta_\nu = \pm\pi + \frac{\mathcal{E}_\nu T}{\hbar}. \quad (38)$$

Чтобы найти динамическую фазу, вычислим среднее значение $H(t)$, используя соотношения (20) и (27). Получим, что

$$\begin{aligned} \langle \Psi_\alpha(t, \mathcal{E}_\nu) | H(t) | \Psi_\alpha(t, \mathcal{E}_\nu) \rangle &= \langle \varphi_\alpha(\mathcal{E}_\nu) | \mathcal{S}^\dagger(t) | H(t) | \mathcal{S}(t) | \varphi_\alpha(\mathcal{E}_\nu) \rangle = \\ &= \langle \varphi_\alpha(\mathcal{E}_\nu) | \bar{H}(x) | \varphi_\alpha(\mathcal{E}_\nu) \rangle + \langle \varphi_\alpha(\mathcal{E}_\nu) | \omega \hat{\sigma}_3 | \varphi_\alpha(\mathcal{E}_\nu) \rangle = \mathcal{E}_\nu + \omega \bar{\sigma}_3^\nu. \end{aligned} \quad (39)$$

С использованием выражений (35) для собственных функций $\bar{H}(x)$ среднее значение проекции спина перепишется следующим образом:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_3^\nu &= \langle \Psi_\alpha(t, \mathcal{E}_\nu) | \hat{\sigma}_3 | \Psi_\alpha(t, \mathcal{E}_\nu) \rangle = \langle \varphi_\alpha(\mathcal{E}_\nu) | \hat{\sigma}_3 | \varphi_\alpha(\mathcal{E}_\nu) \rangle = \\ &= \langle \varphi'_\alpha(\mathcal{E}_\nu) | \exp(i\bar{\theta}(x)\hat{j}_2) \hat{\sigma}_3 \exp(-i\bar{\theta}(x)\hat{j}_2) | \varphi'_\alpha(\mathcal{E}_\nu) \rangle = \\ &= \langle \varphi'_\alpha(\mathcal{E}_\nu) | -\sin(\bar{\theta}(x))\hat{\sigma}_1 + \cos(\bar{\theta}(x))\hat{\sigma}_3 | \varphi'_\alpha(\mathcal{E}_\nu) \rangle. \end{aligned} \quad (40)$$

Тогда для динамической фазы δ_ν^d получим выражение

$$\begin{aligned} \delta_\nu^d &= \int_0^T \langle \Psi_\alpha(t) | H(t) | \Psi_\alpha(t) \rangle_\nu dt = \\ &= \frac{\mathcal{E}_\nu T}{\hbar} + \pi \langle \varphi'_\alpha(\mathcal{E}_\nu) | -\sin(\bar{\theta}(x))\hat{\sigma}_1 + \cos(\bar{\theta}(x))\hat{\sigma}_3 | \varphi'_\alpha(\mathcal{E}_\nu) \rangle. \end{aligned} \quad (41)$$

Учитывая (38) и (41), неадиабатическая геометрическая фаза δ_ν^g в нашем случае должна определяться из соотношения

$$\begin{aligned} \delta_\nu^g &= (\delta_\nu - \delta_\nu^d) = \pi \langle \varphi'_\alpha(\mathcal{E}_\nu) | \sin(\bar{\theta}(x))\hat{\sigma}_1 + \\ &+ [\pm 1 - \cos(\bar{\theta}(x))\hat{\sigma}_3] | \varphi'_\alpha(\mathcal{E}_\nu) \rangle = \pi(\pm 1 - \bar{\sigma}_3^\nu). \end{aligned} \quad (42)$$

По сути дела, геометрическая фаза задается средним значением проекции спина, полученным из (40). Это соответствует неадиабатической геометрической фазе Агаронова–Анандана [6]

$$\delta^g = \int_0^T \left\langle \Psi(t) \left| \frac{d}{dt} \Psi(t) \right. \right\rangle = \int_0^T \langle \Phi_\alpha(x) | \mathcal{S}^\dagger(t) \dot{\mathcal{S}}(t) | \Phi_\alpha(x) \rangle = \pi \bar{\sigma}_3.$$

Совершенно очевидно, что при отсутствии зависимости от x задача упрощается и переходит в задачу для частицы спина $1/2$ в изменяющемся со временем, но однородном в пространстве магнитном поле [7]. В адиабатическом пределе, когда $\omega/\Omega \rightarrow 0$, как видно из формул (23), $\Omega \rightarrow \bar{\Omega}$, $\cos \theta \rightarrow \cos \bar{\theta}$ и геометрическая фаза (42) становится фазой Берри [8]

$$\delta^g = \pi(1 - \cos \theta).$$

Итак, мы детально рассмотрели двухканальную точно решаемую нестационарную задачу, используя достаточно простой оператор канонического калибровочного преобразования $S(t)$. Ясно, как предлагаемый подход обобщается на случаи других выборов операторов $S(t)$ и классов стационарных точно решаемых задач.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложена процедура построения зависящих от времени гамильтонианов, допускающих точные решения нестационарного уравнения Шредингера. Подход основан на точно решаемых моделях стационарного уравнения Шредингера и на специальном выборе операторов $S(t)$ канонического калибровочного преобразования. Детально рассмотрена двухканальная задача, для которой приведено выражение в случае фазы Берри.

Авторы признательны докторам ф.-м. наук А. Жеданову и Б. Самсонову за проявленный интерес к работе.

Список литературы

- [1] *Shun-Jin Wang*. Phys. Rev. A. 1990. V. 42. P. 5107.
- [2] *Lian-Ao Wu, J. Sun, Ji-Yu Zhong*. Phys. Lett. A. 1993. V. 183. P. 257.
- [3] *A. A. Suzko, E. P. Velicheva*. Exact Solutions of Nonstationary Schrödinger Equations and Geometric Phase. In: Proc. Int. Conf. on Symmetry Methods in Physics, Dubna, July 1997; Препринт ОИЯИ Р4-97-311. Дубна: ОИЯИ, 1997.
- [4] *B. N. Zakhariev, A. A. Suzko*. Direct and inverse problems. In: Potentials in quantum scattering, 2-nd ed. Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 1990.
- [5] *А. А. Сузько, Е. П. Величева*. ЭЧАЯ. 1996. Т. 27. С. 924.
- [6] *Y. Aharonov, J. Anandan*. J. Phys. Rev. Lett. 1987. V. 58. P. 1593.
- [7] *M. Stone*. Phys. Rev. D. 1987. V. 33. P. 1191.
- [8] *M. Berry*. Proc. R. Soc. London. A. 1984. V. 392. P. 45.

Поступила в редакцию 14.I.1998 г.