Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. С. Ефремова, В. Ж. Сакбаев, Понятие взрыва множества решений дифференциальных уравнений и усреднение случайных полугрупп, *ТМФ*, 2015, том 185, номер 2, 252–271

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8835>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.67.100

26 апреля 2023 г., 17:55:50

© 2015 г.

Л. С. Ефремова*, В. Ж. Сакбаев†

ПОНЯТИЕ ВЗРЫВА МНОЖЕСТВА РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И УСРЕДНЕНИЕ СЛУЧАЙНЫХ ПОЛУГРУПП

Предложен единый подход к изучению нарушения корректности начально-краевых задач для дифференциальных уравнений. Взрыв множества решений задачи для дифференциального уравнения определен как разрыв многозначного отображения, сопоставляющего начально-краевой задаче множество решений этой задачи. Показано, что такое определение не только охватывает эффекты разрушения решения или его неединственности, но и дает возможность задать процедуру продолжения решения через момент возникновения особенности с помощью подходящего случайного процесса. Рассмотрение начально-краевых задач, допускающих особенности типа взрыва множества решений, вместе с некоторой их окрестностью в пространстве задач позволяет сопоставить исходной задаче множество предельных точек последовательности решений аппроксимирующих задач. Наделение пространства задач структурой пространства с мерой приводит к возникновению случайной полугруппы, порождаемой исходной задачей. Изучены свойства математических ожиданий случайной полугруппы и их эквивалентность по Чернову полугруппам с усредненными генераторами.

Ключевые слова: краевая задача, blow up, динамическая система, Ω -взрыв, полугруппа, случайная динамическая система, теорема Чернова, усреднение.

DOI: 10.4213/tmf8835

Результаты разделов 1, 2 получены Л. С. Ефремовой, разделов 3, 4 – В. Ж. Сакбаевым. Исследование Л. С. Ефремовой выполнено за счет гранта № 10-14 Министерства образования и науки РФ. Исследование В. Ж. Сакбаева выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 14-11-00687) в Математическом институте им. В.А. Стеклова Российской академии наук.

*Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского, Нижний Новгород, Россия. E-mail: lefunn@gmail.com

†Московский физико-технический институт (государственный университет), Долгопрудный, Московская обл., Россия. E-mail: fumi2003@mail.ru

1. ВВЕДЕНИЕ

Статья посвящена исследованию явления взрыва решения начально-краевой задачи для дифференциального уравнения. С идейной точки зрения предлагаемый подход восходит к классической теории динамических систем, в которой с момента становления гиперболической теории в 60-е годы традиционно изучается явление Ω -взрыва (см., например, [1]–[7]). Под Ω -взрывом в динамической системе (с непрерывным или дискретным временем) понимается отсутствие полунепрерывности сверху у отображения, сопоставляющего каждой точке рассматриваемого пространства систем неблуждающее множество соответствующей динамической системы (см. [4]).

В теории дифференциальных уравнений явлением взрыва принято считать, прежде всего, явление blow up, т.е. неограниченный рост решения на конечном временном промежутке [8]. К тому же кругу явлений относится и влияние топологии области на отсутствие решения нелинейных краевых задач эллиптического типа [9]. С другой стороны, к явлению взрыва в теории дифференциальных уравнений естественно отнести и скачкообразное изменение мощности множества решений краевой задачи.

Будем считать, что задача Коши для дифференциального уравнения проявляет свойство взрыва, если имеет место один из следующих эффектов:

- 1) промежуток существования решения задачи Коши является ограниченным;
- 2) норма решения в банаховом пространстве значений решения задачи Коши неограниченно возрастает на ограниченном промежутке;
- 3) интегральная кривая задачи Коши содержит точки неединственности ее решений.

Традиционно под явлением взрыва (blow up), или режима с обострением, понимается эффект 2, но, как будет показано ниже (см. примеры 3, 4, а также работы [10], [11]), все три эффекта могут сопутствовать одной задаче Коши при различных модификациях ее постановки.

Мы даем определение явления взрыва решения задачи Коши для дифференциального уравнения, охватывающее эффекты 1–3, как наличие разрыва у разрешающего отображения, сопоставляющего каждой точке z топологического пространства Z задач Коши точку $G(z)$ в топологическом пространстве 2^Y подмножеств банахова пространства Y решений задач Коши, являющуюся множеством решений данной задачи Коши z (точное определение разрешающего отображения см. ниже в п. 2.1).

Мы приводим примеры, показывающие, каким образом введенное определение охватывает описание режимов с обострением и точек неединственности решения на интегральной кривой. Дается классификация явлений взрыва по типу точки разрыва разрешающего отображения: точки разрыва устранимого типа (если разрешающее отображение имеет предел), точки разрыва полярного типа (если для любой последовательности аппроксимирующих задач последовательность норм их решений стремится к бесконечности) и точки разрыва существенного типа (все остальные случаи, в которых непременно имеются различные предельные точки последовательности решений аппроксимирующих задач). Имеет место зависимость явления

взрыва и его типа от выбора норм в банаховых пространствах, в которых задача Коши формулируется в форме абстрактного уравнения (см. [10]–[13]). Подобное явление сходно с явлением Ω -взрыва в гладких динамических системах. Так, например, в работах [6], [7] указаны пространства гладких динамических систем, допускающих C^0 - Ω -взрыв и не допускающих C^1 - Ω -взрыва.

В рамках полученной классификации предлагается процедура продолжения решения через момент возникновения особенности – однозначное продолжение в случае взрыва устранимого типа, продолжение в форме случайного отображения или в форме математического ожидания случайного отображения в случае взрыва существенного типа. В случае взрыва типа полюса продолжение решения через момент возникновения взрыва затруднительно реализовать через предельный переход или усреднение по пространству задач. Наличие взрыва типа полюса указывает на несоответствие выбора норм и топологий при постановке задачи описываемому этой задачей процессу или явлению. Существуют примеры изменения топологии постановки задачи таким образом, что тип разрыва множества решений на исследуемой задаче меняется с полярного на устранимый [12] или существенный [11], [14].

Изучение задач, являющихся точками существенного разрыва разрешающего отображения, приводит к необходимости рассмотрения случайных величин со значениями в пространстве решений изучаемой задачи. Поскольку решения корректных задач для эволюционных уравнений порождают полугруппы или однопараметрические семейства отображений, то возникает необходимость в изучении случайных полугрупп и случайных отображений.

Мы приводим примеры случайных полугрупп, возникающих при исследовании задачи Коши для дифференциальных уравнений с особенностями, приводящими к нарушению корректности – нарушению существования или единственности решения. Вместе с задачей Коши рассматривается некоторая ее окрестность в пространстве задач Коши, снабженная структурой измеримого пространства с мерой. Если мера сосредоточена на множестве задач Коши, порождающих полугруппу, то возникает случайная полугруппа. Если мера на пространстве задач Коши сосредоточена в произвольной проколотой окрестности исследуемой задачи, то в случае корректности последней значения случайной полугруппы сосредоточены в произвольной окрестности полугруппы, порождаемой исследуемой задачей Коши. В противном случае исходной задаче Коши сопоставляется не порождаемая ею полугруппа (которой не существует), а случайная полугруппа и, в частности, математическое ожидание случайной полугруппы и его итерации.

Заметим, что иной причиной для изучения случайных полугрупп и случайных операторов является неоднозначность в выборе граничных условий при рассмотрении линейных дифференциальных уравнений в ограниченной области [15]. В работах [15], [16] дано описание множества всех граничных условий, которые могут быть поставлены для заданного дифференциального уравнения в заданной области. Наделение этого множества структурой измеримого пространства с мерой позволяет определить случайную величину со значениями в пространстве операторов, представляющих краевые задачи. В частности, это возможно при изучении эволюционных уравнений – со значениями в множестве однопараметрических полугрупп.

Случайная полугруппа определяется как случайная величина со значениями в множестве однопараметрических полугрупп преобразований банаховых пространств.

Математическое ожидание $\mathbf{F}(t)$, $t \geq 0$, случайной полугруппы определяется с помощью интеграла Петтиса. В общем случае математическое ожидание случайной полугруппы полугруппой не является. В работе приведены примеры сохранения полугруппового свойства при усреднении значений случайной полугруппы.

Хотя математическое ожидание не является полугруппой, но его итерации (т.е. последовательности $\{(\mathbf{F}(t))^n\}$) как функции переменной $n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ являются полугруппой. Связь введенных нами случайных полугрупп со случайными динамическими системами (см. [17], [18]) состоит в том, что итерации $\{(\mathbf{F}(t))^n\}$, $n \in \mathbb{N}$, являются математическими ожиданиями случайной динамической системы (см. [18], [19]). При этом возникает двухпараметрическое семейство операторов, параметры (вещественный и натуральный) которого играют роль времени, причем оператор-функция $\mathbf{G}(t, n) = (\mathbf{F}(t))^n$, $t \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$, обладает полугрупповым свойством по натуральному параметру, а по вещественному, вообще говоря, нет.

Исследование итераций математического ожидания $\{(\mathbf{F}(t/n))^n\}$ позволяет установить условия их эквивалентности по Чернову полугруппе, генератором которой является среднее значение генератора случайной полугруппы. Введенная таким образом процедура усреднения генераторов полугрупп (см. [20]) позволяет задать процедуру суммирования неограниченных операторов, обобщающую процедуру суммирования операторов в смысле квадратичных форм. Исследование итераций по Чернову математических ожиданий случайных полугрупп показывает, что двухпараметрическое семейство операторов $\mathbf{G}(t, n)$ превращается в усредненную однопараметрическую полугруппу $\mathbf{U}$ операторов в процессе специального предельного перехода

$$\mathbf{U}(\tau) = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty, t \rightarrow 0, \\ nt = \tau}} \mathbf{G}(t, n).$$

Подобные предельные переходы по специальным кривым в пространстве параметров возникают в статистической и квантовой статистической механике – это термодинамический предел [21], стохастический предел [22], пределы малой плотности и слабой константы взаимодействия [22], [23]. В монографии [22] показано (см. п. 1.16), что стохастический предел в задачах квантовой статистической механики возникает как обобщение функциональной центральной предельной теоремы. В то же время, как отмечено в монографии [24], центральная предельная теорема является одним из способов определения псевдомер Фейнмана.

2. РАЗРЕШАЮЩЕЕ ОТОБРАЖЕНИЕ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Рассмотрим задачу Коши для дифференциального уравнения как абстрактное уравнение (см. [11], [13], [25]–[27])

$$\mathbf{A}u = f, \quad f \in X, \quad u \in Y, \quad \mathbf{A} \in B(Y, X), \quad (1)$$

где X , Y – банаховы пространства, а $B(Y, X)$ – некоторое банахово пространство операторов, действующих из области определения $D(\mathbf{A}) \subset Y$ в пространство X , наделенное нормой $\| \cdot \|_B$ (либо $B(Y, X)$ – некоторое топологическое пространство операторов, действующих из области определения $D(\mathbf{A}) \subset Y$ в пространство X , наделенное топологией τ_B).

Задача Коши (1) определяет многозначное отображение

$$G: X \times B(Y, X) \rightarrow 2^Y,$$

заданное на множестве $X \times B(Y, X)$ и принимающее значение в множестве 2^Y всех подмножеств пространства Y , определяемое формулой

$$G(f, \mathbf{A}) = M_{f, \mathbf{A}} \equiv \mathbf{A}^{-1}(f).$$

Заметим, что отображение G определено в любой точке пространства $X \times B(Y, X)$, в некоторых точках которого значением отображения G может быть пустое множество.

Цель настоящей работы – показать, что известные примеры начально-краевых задач, допускающих явления взрыва (режим с обострением, blow up, нарушение единственности), являются примерами точек разрыва многозначного отображения G , рассматриваемого как отображение топологического пространства $Z = X \times B(Y, X)$ в топологическое пространство 2^Y (топологии, которыми снабжаются пространства Z и 2^Y , введены ниже), тогда как корректные начально-краевые задачи являются точками непрерывности отображения G как отображения одного топологического пространства в другое. Далее с помощью отображения G производится классификация явлений взрыва в терминах характера разрыва отображения G .

Доопределение отображения G в точке разрыва $(f_0, \mathbf{A}_0)$ значением верхнего топологического предела $\text{Ls}_{(f, \mathbf{A}) \rightarrow (f_0, \mathbf{A}_0)} G(f, \mathbf{A})$ отображения G при $(f, \mathbf{A}) \rightarrow (f_0, \mathbf{A}_0)$ задает полунепрерывное сверху (т.е. такое, что для любой окрестности $\mathcal{U}$ точки $(G(f_0, \mathbf{A}_0))$ в топологическом пространстве 2^Y найдется такая окрестность точки $(f_0, \mathbf{A}_0)$ в топологическом пространстве Z , что для любого $(f, \mathbf{A})$ из этой окрестности значение $G(f, \mathbf{A})$ лежит в окрестности $\mathcal{U}$) многозначное отображение G и определяет процедуру продолжения динамического преобразования, порождаемого начально-краевой задачей, через момент возникновения взрыва посредством равенства $G(f_0, \mathbf{A}_0) = \text{Ls}_{(f, \mathbf{A}) \rightarrow (f_0, \mathbf{A}_0)} G(f, \mathbf{A})$.

Задание меры μ на множестве начально-краевых задач Z позволяет доопределить процедуру продолжения динамического преобразования в форме случайного процесса ξ , множество значений которого определяется значениями отображения G на проколотой окрестности точки $(f_0, \mathbf{A}_0)$. Тем самым задача Коши, допускающая явление взрыва, задает не динамическую систему (т.е. не полугруппу преобразований пространства начальных данных), но случайную полугруппу (т.е. измеримое отображение пространства с мерой в линейное топологическое пространство оператор-функций, значениями которого являются полугруппы операторов).

В настоящей работе установлена связь между продолжениями отображения G в точку $(f_0, \mathbf{A}_0)$ посредством верхнего топологического предела при $(f, \mathbf{A}) \rightarrow (f_0, \mathbf{A}_0)$ и посредством случайного процесса ξ .

Наконец, для поставленной задачи продолжения динамических преобразований, порождаемых начально-краевыми задачами, через момент взрыва эффективно представление динамических преобразований с помощью псевдомер на пространстве

отображений временного промежутка в соответствующее задаче банахово пространство. При такой постановке динамическое преобразование является условным ожиданием псевдомеры на подалгебру, порождаемую специальным классом цилиндрических функционалов. Корректность задачи означает представимость условного ожидания в специальном виде атомарных мер.

В заключение заметим, что в теории дифференциальных уравнений с частными производными изучается непрерывность зависимости от параметра при старшей производной не только таких характеристик динамической системы, порождаемой задачей Коши, как множество решений, но и таких, как аттрактор, неблуждающее множество, инвариантное множество, инвариантная мера. Так, в работе [28] установлены условия, достаточные для непрерывности многозначного отображения $\mathcal{A}$, сопоставляющего каждой задаче Коши ее аттрактор в пространстве начальных данных.

2.1. Определение явления взрыва и классификация взрывов. Если $B(Y, X)$ – банахово пространство, то множество $Z = X \times B(Y, X)$ является банаховым пространством, снабженным нормой $\|(f, \mathbf{A})\| = \|f\|_X + \|\mathbf{A}\|_{B(Y, X)}$. Если $B(Y, X)$ – топологическое пространство, то множество $Z = X \times B(Y, X)$ является топологическим пространством, наделенным топологией τ_Z прямого произведения двух топологических пространств. Банахово пространство Y будем называть пространством решений задачи Коши, а топологическое пространство Z – пространством задач Коши.

Множество $(2^Y, \tau)$ является топологическим пространством с топологией τ , генерируемой псевдометрикой, заданной на множестве 2^Y посредством равенств

$$r_H(A, B) = \max\left\{\sup_{x \in A} \rho_Y(x, B), \sup_{x \in B} \rho_Y(x, A)\right\}, \quad \text{если } A, B \neq \emptyset;$$

$$r_H(A, \emptyset) = r_H(\emptyset, A) = +\infty, \quad \text{если } A \neq \emptyset; \quad r_H(\emptyset, \emptyset) = 0.$$

Функция r_H является псевдометрикой, так как она неотрицательна, симметрична и удовлетворяет неравенству треугольника на $2^Y \times 2^Y$. Но из равенства $\rho(A, B) = 0$ не следует, что $A = B$ (например, если A – открытый шар в Y , а B – его замыкание). В связи с этим топология, порождаемая псевдометрикой ρ_H , не является хаусдорфовой.

ЛЕММА 1. *Равенство $r_H(A, B) = 0$ выполняется для некоторых $A, B \in 2^Y$ тогда и только тогда, когда замыкания множеств A и B в пространстве Y совпадают.*

Для доказательства леммы достаточно показать, что если точка M принадлежит множеству A , но не принадлежит множеству B , то она принадлежит замыканию B . Действительно, из равенства $r_H(A, B) = 0$ следует, что $\rho_Y(M, B) = 0$. Поэтому если $M \notin B$, то M лежит в замыкании множества B , откуда и следует утверждение леммы.

Заметим, что сужение функции ρ_H на совокупность 2_c^Y замкнутых подмножеств множества 2^Y является метрикой Хаусдорфа на 2_c^Y .

Рассмотрим отображение G как отображение топологического пространства (Z, τ_Z) в топологическое пространство $(2^Y, \tau)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Будем говорить, что задача Коши (1) проявляет *свойство взрыва*, если точка $(f, \mathbf{A}) \in Z$ является точкой разрыва отображения G .

Обратим внимание на то, что возможность (или отсутствие) Ω -взрыва существенно зависит от пространства рассматриваемых систем (см. [6], [7]).

Пусть S является подмножеством топологического пространства Z , и топология на множестве S индуцирована из пространства Z , а точка $(f, \mathbf{A}) \in S$ является предельной точкой множества S . При рассмотрении отображения G не на всем пространстве Z , а лишь на его части S , множество S будем называть топологическим пространством задач Коши.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Будем говорить, что задача Коши (1) проявляет *свойство взрыва относительно топологического пространства задач Коши S* , если точка $(f, \mathbf{A})$ является точкой разрыва отображения $G: S \rightarrow 2^Y$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть топологическое пространство $B(Y, X)$ является линейно связным подмножеством в линейном нормированном пространстве. Точка $(f, \mathbf{A}) \in Z = X \times B(Y, X)$ является точкой разрыва отображения $G: Z \rightarrow 2^Y$ тогда и только тогда, когда существует кривая $\Gamma \subset Z$ такая, что $(f, \mathbf{A}) \in \Gamma$ и $(f, \mathbf{A})$ является точкой разрыва отображения $G|_{\Gamma}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если точка $(f_0, \mathbf{A}_0) \in Z$ является точкой непрерывности отображения $G: Z \rightarrow 2^Y$ (это означает, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что из $\|f - f_0\|_X + \|\mathbf{A} - \mathbf{A}_0\|_B < \delta$ следует, что $\rho_H(G(f, \mathbf{A}), G(f_0, \mathbf{A}_0)) < \varepsilon$), то она будет тем более точкой непрерывности сужения G на кривую Γ , содержащую точку $(f_0, \mathbf{A}_0)$.

Если же точка $(f_0, \mathbf{A}_0) \in Z$ является точкой разрыва отображения $G: Z \rightarrow 2^Y$, то существует такое $\varepsilon > 0$, что для любого $\delta > 0$ найдется $(f, \mathbf{A}) \in O_{\delta}(f_0, \mathbf{A}_0)$ такое, что $\rho_H(G(f, \mathbf{A}), G(f_0, \mathbf{A}_0)) > \varepsilon$. Следовательно, найдется последовательность точек $\{M_k\} = \{(f_k, \mathbf{A}_k)\}$, сходящаяся к точке $M_0 = (f_0, \mathbf{A}_0)$ в пространстве Z и такая, что $\rho_H(G(f_k, \mathbf{A}_k), G(f_0, \mathbf{A}_0)) > \varepsilon$ при всех $k \in \mathbb{N}$. Тогда в силу линейной связности множества Z существует кривая $\Gamma \subset Z$, содержащая точки $\{M_1, M_2, \dots, M_k, \dots, M_0\}$, сужение отображения G на которую терпит разрыв в точке M_0 . Теорема доказана.

Определение взрыва множества решений позволяет предложить следующую классификацию явлений взрыва, которая задает процедуру доопределения решения задачи в случаях, когда в исходной постановке задачи имеет место отсутствие решения или его неединственность. Заметим, что для предлагаемого подхода тип исследуемого уравнения не имеет значения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. 1. Точка $(f_0, \mathbf{A}_0) \in Z$ разрыва отображения G называется *точкой устранимого относительно множества S взрыва решения задачи (1)*, если существует предел $\lim_{(f, \mathbf{A}) \rightarrow (f_0, \mathbf{A}_0)} G(f, \mathbf{A})$. В противном случае точка $(f_0, \mathbf{A}_0) \in Z$ разрыва отображения G называется *точкой неустраанимого относительно множества S взрыва решения задачи (1)*.

2. Точка $(f_0, \mathbf{A}_0) \in Z$ неустраанимого относительно множества S взрыва решения задачи (1) называется *точкой взрыва типа полюса*, если существует предел $\lim_{(f, \mathbf{A}) \rightarrow (f_0, \mathbf{A}_0)} \inf_{u \in G(f, \mathbf{A})} \|u\|_Y = +\infty$.

3. Точка $(f_0, \mathbf{A}_0) \in Z$ неустраанимого относительно множества S взрыва решения задачи (1) называется *точкой существенного взрыва*, если она не является точкой взрыва типа полюса.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если верхний предел $\overline{\lim}_{(f, \mathbf{A}) \rightarrow (f_0, \mathbf{A}_0)} \sup_{u \in G(f, \mathbf{A})} \|u\|_Y < +\infty$ конечен, а верхний топологический предел $\text{Ls}_{(f, \mathbf{A}) \rightarrow (f_0, \mathbf{A}_0)} G(f, \mathbf{A})$ (т.е. множество $M(f_0, \mathbf{A}_0) = \{y \in Y : \exists (f_k, \mathbf{A}_k) : (f_k, \mathbf{A}_k) \rightarrow (f_0, \mathbf{A}_0), \exists y_k \in G(f_k, \mathbf{A}_k) : \lim_{k \rightarrow \infty} y_k = y\}$) состоит более чем из одной точки, то точка $(f_0, \mathbf{A}_0)$ является точкой существенного взрыва.

Определим многозначное отображение, сопоставляющее каждой задаче $(f_0, \mathbf{A}_0) \in Z$ множество предельных точек в пространстве решений

$$M(f_0, \mathbf{A}_0) = \text{Ls}_{(f, \mathbf{A}) \rightarrow (f_0, \mathbf{A}_0)} G(f, \mathbf{A}).$$

3. ПРИМЕРЫ ЯВЛЕНИЙ ВЗРЫВА ДЛЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

3.1. Примеры и классификация взрывов решений. Проиллюстрируем определения 1–3 на примерах некорректных задач Коши для дифференциальных уравнений, не имеющих решения, допускающих нарушение существования или единственности решения на конечном промежутке.

ПРИМЕР 1 (отсутствие взрыва множества решений). Рассмотрим задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения

$$y' - f(y) = g(t), \quad t \in (0, +\infty); \quad y(0) = y_0, \quad y_0 \in \mathbb{R}, \quad g \in C([0, T]), \quad (2)$$

решением которой на промежутке $[0, T]$, $T > 0$, будем называть функцию $y \in C^1([0, T])$, удовлетворяющую дифференциальному уравнению и начальному условию. Предположим, что функция $f_0 \in C^1(\mathbb{R})$ (где $C^1(\mathbb{R})$ – банахово пространство непрерывно дифференцируемых функций на вещественной прямой $\mathbb{R}$ со стандартной нормой), $y_0 = y_0^* \in \mathbb{R}$ и $g \in C([0, T])$. Тогда найдется такое число $\sigma > 0$, что задача Коши (2) имеет единственное решение в линейном пространстве $C^1([0, T])$ при любом $y_0 \in O_\sigma(y_0^*)$, при любом $g \in [0, T]$ и для любой функции $f \in O_\sigma(f_0)$. Причем если последовательность (g_n, y_{0n}, f_n) элементов банахова пространства $C([0, T]) \times \mathbb{R} \times C^1(\mathbb{R})$ сходится к элементу (g_n, y_n^*, f_n) при $n \rightarrow \infty$, а функция y_n является решением задачи (2) с начальным условием y_{0n} , правой частью g_n и функцией f_n при каждом значении $n \in \mathbb{N}$, то последовательность $\{y_n\}$ сходится при $n \rightarrow \infty$ равномерно на отрезке $[0, T]$ к решению y задачи (2) с начальным условием y_0^* , правой частью g и функцией f_0 .

Таким образом, если положить $X = C([0, T]) \times \mathbb{R}$ и $Y = C^1([0, T])$, то задача Коши (2) принимает вид (1) при $(g, y_0) \in X$ и $\mathbf{A}(u) = \mathbf{D}(u) - \mathbf{F}_f(u)$, где $\mathbf{D}(u) = u'$ и $\mathbf{F}_f(u)(t) = f(u(t))$, $t \in (0, T)$, $f \in C^1(\mathbb{R})$. Тогда выберем множество $S = \{((g, y_0), \mathbf{A}) = ((g, y_0), \mathbf{D} - \mathbf{F}_f), (g, y_0, f) \in C([0, T]) \times \mathbb{R} \times C^1(\mathbb{R})\}$, зададим на S топологию, порожденную нормой банахова пространства $C([0, T]) \times \mathbb{R} \times C^1(\mathbb{R})$, и рассмотрим отображение $G: S \rightarrow 2^{C^1([0, T])}$ такое, что $G(g, y_0, f) = M_{g, y_0, f}$, где $M_{g, y_0, f}$ – множество решений задачи Коши (2).

Тогда согласно классической теореме о существовании, единственности и непрерывной зависимости решения задачи Коши от данных задачи множество $M_{g, y_0, f}$ является одноточечным и отображение G является непрерывным отображением топологического пространства S в топологическое пространство 2^Y (в силу одноточечности отображения – в банахово пространство Y).

ПРИМЕР 2 (взрыв устранимого типа). Пусть $f_0(y) = (y^2)^{1/3} \in C(\mathbb{R})$, $g \equiv 0$ и $y_0 \leq 0$. Тогда задача Коши (2) имеет единственное решение на промежутке $[0, T)$ при $T \leq T_* = 3|y_0|^{1/3}$, но для всякого $T > T_*$ она имеет однопараметрическое континуальное семейство решений, причем множеством точек ветвления интегральных кривых решений служит промежуток $\{(t, y) = (t, 0); t \in [T_*, T)\}$. Момент времени T_* служит моментом нарушения единственности решения задачи Коши. Для задачи Коши (2) на полуоси $\mathbb{R}_+$ множество решений континуально и неограниченно в пространстве $C^1(\mathbb{R})$. Однако это свойство задачи Коши не является устойчивым по отношению к малым в пространстве $C^1(\mathbb{R})$ возмущениям функции f_0 из некоторой окрестности функции $f_0 \in C(\mathbb{R})$. Рассмотрим, например, возмущение функции f_0 вдоль кривой $\gamma = \{f_\varepsilon = f_0 + \varepsilon^{2/3}, \varepsilon \in (-1, 1)\}$ в пространстве $C(\mathbb{R})$. Для любой функции $f_\varepsilon \in \gamma$, $\varepsilon \neq 0$, уравнение (1) имеет единственное решение $y_\varepsilon \in C([0, +\infty)) \cap C^1(0, +\infty)$, причем функция $y_\varepsilon(x)$, $x \in \mathbb{R}$, однозначно определяется равенством: $y_\varepsilon^{1/3} - \varepsilon \operatorname{arctg}(y_\varepsilon^{1/3}/\varepsilon) = x/3 + C(y_0, \varepsilon)$. Поэтому семейство y_ε сходится к функции $u = (x/3 + y_0^{1/3})^3$ на промежутке $[0, +\infty)$ равномерно на любом отрезке $[0, T]$.

Положим $X = C(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}$ и $Y = C([0, T)) \cap C^1((0, T))$, тогда задача Коши (2) принимает вид (1) при $(g, y_0) = (0, 0) \in X$ и $\mathbf{A}(u) = \mathbf{D}(u) - \mathbf{F}_f(u)$, где $\mathbf{D}(u) = u'$ и $\mathbf{F}_f(u)(t) = f(u(t))$, $t \in (0, T)$; $f \in C(\mathbb{R})$. Рассмотрим кривую $\Gamma = \{((g, y_0), \mathbf{A}_\varepsilon) = ((0, 0), \mathbf{D} - \mathbf{F}_{f_\varepsilon}), \varepsilon \in (-1, 1)\}$ в пространстве задач Коши. Тогда отображение $G: \Gamma \rightarrow 2^Y$, сопоставляющее элементу $f_\varepsilon \in \gamma$ множество M_f решений задачи Коши (2), имеет точку устранимого разрыва f_0 , поскольку существует предел $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} M_{f_\varepsilon} = \{u\}$, не совпадающий с континуальным множеством M_{f_0} .

ПРИМЕР 3 (взрыв типа полюса в одной постановке задачи и устранимый взрыв в другой). Задача Коши для уравнения Хопфа имеет вид

$$u'_t - uu'_x = f, \quad (t, x) \in (0, T) \times \mathbb{R}, \quad u|_{t=+0} = u_0. \quad (3)$$

Здесь $T \in (0, +\infty)$, $(f, u_0) \in C((0, T) \times \mathbb{R}) \times C^1(\mathbb{R}) \equiv X$; пространство $C(G)$ является банаховым пространством непрерывных числовых функций на области G конечномерного евклидова пространства, норма элементов которого определена равенством $\|u\|_{C(G)} = \sup_{x \in G} |u(x)|$. Положим $f = \theta \equiv 0$ и фиксируем оператор $\mathbf{A}u = (u'_t - uu'_x, \lim_{t \rightarrow +0} u)$, действующий из банахова пространства Y в банахово пространство X . Свойства отображения G зависят от выбора пространства Y .

А. Если $Y_1 = C^1((0, T) \times \mathbb{R}) \cap C([0, T], C^1(\mathbb{R}))$, то множество $M_{(0, u_0), \mathbf{A}}$ решений задачи Коши (3) может быть пустым при некоторых $u_0 \in C^1(\mathbb{R})$ (см. [10], [12]).

Б. Если $Y_2 = L_{1, \text{loc}}((0, T) \times \mathbb{R})$, то множество $M_{(0, u_0), \mathbf{A}}$ является континуальным при любом $u_0 \in C^1(\mathbb{R})$ (см. примеры О. А. Олейник в [10]).

В терминах предложенной классификации любая задача из примера 1 не проявляет свойство взрыва, задача из примера 2 проявляет свойства взрыва, устранимого вдоль рассматриваемой в примере кривой в пространстве начальных данных, задача Коши из примера 3 с пространством решений Y_1 проявляет свойство неустраанимого взрыва типа полюса, а задача Коши из примера 3 с пространством решений Y_2 проявляет свойство взрыва, устранимого вдоль множества регуляризаций равномерно эллиптическими линейными дифференциальными операторами второго порядка.

Рассмотрим подробнее пример 3. Фиксируем некоторую финитную функцию $u_0 \in C^1(\mathbb{R})$. В пространстве задач Коши выберем кривую $\Gamma = \{((0, u_0), \mathbf{A}_\epsilon), \epsilon \in [0, 1)\}$, где $\mathbf{A}_\epsilon u = u'_t - uu'_x - \epsilon u''_{xx}$. При каждом $\epsilon \in (0, 1)$ множество $M_{((0, u_0), \mathbf{A}_\epsilon)}$ состоит из одной точки $u_\epsilon = \mathbf{A}_\epsilon^{-1}((0, u_0)) \in Y_1 \cap Y_2$. Тогда справедливы следующие утверждения.

1. Точка $((0, u_0), \mathbf{A}_0)$ является точкой устранимого разрыва для отображения $G: \Gamma \rightarrow 2^{Y_2}$, поскольку последовательность $\{u_\epsilon\}$, $\epsilon \in (0, 1)$, $\epsilon \rightarrow +0$, имеет предел в пространстве Y_2 при $\epsilon \rightarrow +0$. Действительно, согласно результатам работы [12] последовательность сходится в топологическом векторном пространстве $L_{1, \text{loc}}((0, T) \times \mathbb{R})$.

2. Точка $((0, u_0), \mathbf{A}_0)$ является точкой неустраняемого разрыва типа полюса для отображения $G: \Gamma \rightarrow 2^{Y_1}$ (поскольку в пространстве Y_1 последовательность $\{u_\epsilon\}$ расходится и $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \|u_\epsilon\|_{Y_1} = +\infty$, см. [10], [12]).

Эффекты неустраняемого взрыва решений нелинейных уравнений с частными производными типа полюса, подобные эффекту, рассмотренному в примере 3 в пространстве Y_1 , изучались в работах [12], [29]–[32] и ряде других.

Существует ряд примеров задач Коши для дифференциальных уравнений, в которых имеет место явление разрушения решения (подобно случаям в примере 3А, см. [11], [29], [32]) или явление нарушения единственности решения (подобно случаям в примерах 2, 3Б, см. [11], [33], [34]), которые иллюстрируют явление взрыва в смысле определения 1.

Эффективным методом исследования таких задач является метод исчезающей вязкости и подобные ему аппроксимационные методы (см. [11], [28], [32], [34]–[36]), которые основаны на устранимости точки разрыва сужения отображения G на специальное (соответствующее методу регуляризации) множество S из определения 2.

3.2. Приложения классификации явлений взрыва к определению процедуры продолжения решения. Классификация явлений взрыва множества решений дифференциального уравнения позволяет определить следующие три ситуации, возникающие при исследовании начально-краевых задач, допускающих явление взрыва множества решений.

1. Если задача $z_0 \in Z$ является точкой устранимого разрыва отображения G , то отображение G определяется в точке z_0 по непрерывности. Для ряда задач такое переопределение отображения G задает однозначное продолжение решения через момент возникновения взрыва (см. примеры 1 и 3Б) и составляет цель методов регуляризации (см. [10], [12], [28], [34], [35]).

2. Если задача $z_0 \in Z$ является точкой существенного разрыва отображения G , то продолжение решения через момент возникновения взрыва будет определено как случайный процесс, значения которого лежат в множестве предельных при $z \rightarrow z_0$ значений отображения G . Динамическое преобразование пространства начальных данных задачи при этом утрачивает свойства однозначности и обратимости и становится случайным отображением. В таком подходе проявляется связь явлений случайности, необратимости и неоднозначности.

3. Если задача $z_0 \in Z$ является точкой разрыва отображения G типа полюса, то в некоторых случаях отображение G имеет единственную предельную бесконечно удаленную точку и потому допускает однозначное продолжение через момент

возникновения взрыва как функция, значения которой могут быть бесконечными (см. [37]). Однако в общем случае значения отображения G устремляются при $z \rightarrow z_0$ к бесконечности бесконечномерного пространства Y по различным кривым, и тогда динамическое преобразование трудно определить и как случайный процесс, поскольку его значения не укладываются в рамки связанных с постановкой задачи пространств. Это свидетельствует о целесообразности расширения функциональных пространств для продолжения решения через взрыв. В таком случае для продолжения решения через момент возникновения взрыва предлагается метод (см. [10], [12]), связанный с изменением выбора банаховых пространств X , Y и топологического пространства $B(Y, X)$ таким образом, чтобы значения отображения G в окрестности точки z_0 оставались ограниченными. При таком выборе топологий и норм точка z_0 из точки типа полюса может перейти в точку устранимого взрыва (см. [10], [12], [35]) или в точку существенного взрыва (см. [11], [14], [34]).

Далее мы продолжим исследования случайных динамических преобразований, возникающих в случае существенного взрыва множества решений начально-краевой задачи. Случай устранимого взрыва является случаем достаточно регулярным и связанным с изучением корректных начально-краевых задач. Случай же взрыва типа полюса требует изменения постановки задачи, которое изменит характер особенности либо на устранимый взрыв, либо на существенный.

Следующий пример показывает, как явление взрыва в задачах Коши для одного и того же уравнения может проявлять любой из трех типов в зависимости от выбора пространства решений Y .

ПРИМЕР 4 (вырожденный максимальный симметрический оператор). Пусть в гильбертовом пространстве $H = L_2(\mathbb{R})$ вырождающийся дифференциальный оператор второго порядка $\mathbf{L}$ задан дифференциальным выражением

$$\mathbf{L}v(x) = \frac{\partial}{\partial x} \left(g(x) \frac{\partial}{\partial x} v(x) \right) + \frac{i}{2} \left[a(x) \frac{\partial}{\partial x} v(x) + \frac{\partial}{\partial x} (a(x)v(x)) \right], \quad x \in \mathbb{R},$$

в котором коэффициенты $g = \chi_{(-\infty, 0)}$ и $a\chi_{(0, +\infty)}$ являются индикаторными функциями полуосей. В таком случае оператор $\mathbf{L}$, определенный дифференциальным выражением на области определения

$$D(\mathbf{L}) = \left\{ u \in W_2^1(\mathbb{R}) : u|_{(-\infty, 0)} \in W_2^2(-\infty, 0); u'(-0) = \frac{i}{2}u(0) \right\},$$

является замкнутым и максимальным симметрическим, а сопряженный оператор имеет более широкую область определения

$$D(\mathbf{L}^*) = \left\{ u \in L_2(\mathbb{R}) : u_{(0, +\infty)} \in W_2^1(0, +\infty); u|_{(-\infty, 0)} \in W_2^2(-\infty, 0); u'(-0) = \frac{i}{2}u(0) \right\}.$$

Максимальный симметрический оператор $\mathbf{L}$ рассматривается в работе [11] как пример вырождающегося на полуоси оператора Шредингера. Такой оператор не является генератором полугруппы $e^{-it\mathbf{L}}$, $t \geq 0$, в пространстве H , но его сопряженный оператор является генератором сжимающей полугруппы $e^{-it\mathbf{L}^*}$, $t \geq 0$, в H (см. [11]).

Регуляризацией такого оператора $\mathbf{L}$ является однопараметрическое семейство самосопряженных операторов, задаваемых дифференциальным выражением

$$\mathbf{L}_\varepsilon v(x) = \frac{\partial}{\partial x} \left(g_\varepsilon(x) \frac{\partial}{\partial x} v(x) \right) + \frac{i}{2} \left[a(x) \frac{\partial}{\partial x} v(x) + \frac{\partial}{\partial x} (a(x)v(x)) \right],$$

где $g_\varepsilon(x) = g(x) + \varepsilon$, $x \in \mathbb{R}$, $\varepsilon \in E = (0, 1]$, на области определения

$$D(\mathbf{L}) = \left\{ u \in W_2^1(\mathbb{R}) : u|_{(-\infty, 0)} \in W_2^2(-\infty, 0); \right. \\ \left. u|_{(0, +\infty)} \in W_2^2(0, +\infty); (1 + \varepsilon)u'(-0) = \varepsilon u'(+0) + \frac{i}{2}u(0) \right\}.$$

Самосопряженные операторы $\mathbf{L}_\varepsilon$ являются генераторами унитарных групп $e^{-it\mathbf{L}_\varepsilon}$, $t \geq 0$, при $\varepsilon \in (0, 1]$. Тогда, как установлено в работах [11], [32], задача Коши

$$\begin{aligned} i \frac{d}{dt} u(t) &= \mathbf{L}u(t), & t > 0, \\ u(+0) &= u_0, \end{aligned} \quad (4)$$

допускает явление взрыва вдоль однопараметрического семейства задач Коши

$$\begin{aligned} i \frac{d}{dt} u(t) &= \mathbf{L}_\varepsilon u(t), & t > 0, & \varepsilon \in [0, 1], \\ u(+0) &= u_0, \end{aligned}$$

при всех u_0 , лежащих в бесконечномерном подпространстве $H_1 = \bigcup_{t \geq 0} \text{Ker}(e^{-it\mathbf{L}^*}) \subset L_2(\mathbb{R})$.

Важно указать, что если в качестве пространства решений Y выбрано пространство $C_w([0, +\infty), H)$ слабо непрерывных отображений полуоси $[0, +\infty)$ в пространство H , наделенное топологией равномерной на каждом отрезке $[0, T]$, $T > 0$, слабой сходимости в пространстве H , то задача Коши допускает явление устранимого взрыва, а обобщенная последовательность $\{e^{-it\mathbf{L}_\varepsilon}u_0, \varepsilon \rightarrow +0\}$ решений регуляризованных задач сходится в пространстве $C_w([0, +\infty), H)$ к функции $e^{-it\mathbf{L}^*}u_0$, $t \geq 0$.

Если в качестве пространства решений Y выбрано пространство $C([0, +\infty), H)$ непрерывных отображений полуоси $[0, +\infty)$ в пространство H , наделенное топологией равномерной на каждом отрезке $[0, T]$, $T > 0$, сходимости в пространстве H , то задача Коши допускает явление существенного взрыва, а обобщенная последовательность $\{e^{-it\mathbf{L}_\varepsilon}u_0, \varepsilon \rightarrow +0\}$ решений регуляризованных задач не содержит сходящихся в пространстве $C([0, +\infty), H)$ подпоследовательностей, оставаясь ограниченной в этом банаховом пространстве.

Если выполняется условие $u_0 \in W_2^1(\mathbb{R})$ и в качестве пространства решений Y выбрано пространство $C([0, +\infty), W_2^1(\mathbb{R}))$ непрерывных отображений полуоси $[0, +\infty)$ в пространство $W_2^1(\mathbb{R})$, наделенное топологией равномерной на каждом отрезке $[0, T]$, $T > 0$, сходимости в пространстве $W_2^1(\mathbb{R})$, то задача Коши допускает явление взрыва типа полюса, а обобщенная последовательность $\{e^{-it\mathbf{L}_\varepsilon}u_0, \varepsilon \rightarrow +0\}$ решений регуляризованных задач удовлетворяет условию

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \|e^{-it\mathbf{L}_\varepsilon}u_0\|_{C([0, +\infty), W_2^1(\mathbb{R}))} = +\infty.$$

Таким образом, задачи Коши для одного и того же дифференциального уравнения (4) могут проявлять все возможные типы взрыва решений в зависимости от выбора пространств, в которых ставится задача для уравнения (4).

ПРИМЕР 5 (существенный взрыв и многозначное отображение). В некоторых случаях задача Коши $(f, \mathbf{A})$ как точка в области определения разрешающего отображения G является существенно особой точкой отображения G , которое имеет в этой точке некоторое множество частичных пределов $Ls_{(f,A) \rightarrow (f_0, A_0)} G(f, A)$ (см. [11], [34], [35]). В таком случае задаче Коши $(f, \mathbf{A})$ сопоставляется не единственное решение, а либо множество $Ls_{(f,A) \rightarrow (f_0, A_0)} G(f, A)$, либо (если множество частичных пределов снабжено структурой измеримого пространства с мерой) случайная величина, множество значений которой совпадает с множеством $M(f_0, \mathbf{A}_0) = Ls_{(f,A) \rightarrow (f_0, A_0)} G(f, A)$.

Приведем пример задачи, допускающей явление существенного взрыва. Напомним, что множество $\Gamma \subset H \times H$ называется сильным (или слабым) граф-пределом последовательности $\{\mathbf{L}_n\}$ со значениями в множестве $Cl(H)$ замкнутых линейных операторов в гильбертовом пространстве H , если $(u, v) \in \Gamma$, тогда и только тогда, когда существует такая последовательность $\{u_n\}$ элементов пространства H , что $u_n \in D(\mathbf{L}_n)$ при каждом $n \in \mathbb{N}$, $\|u_n - u\| \rightarrow 0$ и $\|\mathbf{L}_n u_n - v\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ (или последовательность $\{\mathbf{L}_n u_n\}$ сходится слабо в пространстве H к вектору v при $n \rightarrow \infty$).

Для каждого замкнутого оператора $\mathbf{A}$ в гильбертовом пространстве H определим на множестве $Cl(H)$ замкнутых операторов функцию

$$\delta_{\mathbf{A}}(\mathbf{L}) = \sup_{u \in \Gamma_{\mathbf{A}}, \|u\|=1} \text{dist}(u, \Gamma_{\mathbf{L}}),$$

где $\Gamma_{\mathbf{A}}, \Gamma_{\mathbf{L}}$ – замкнутые подпространства пространства $\mathcal{H} = H \times H$, являющиеся графиками операторов $\mathbf{A}$ и $\mathbf{L}$ (см. [38]). Для каждого $\varepsilon > 0$ назовем ε -окрестностью оператора $\mathbf{A} \in Cl(H)$ множество операторов $\mathbf{L} \in Cl(H)$ таких, что $\delta_{\mathbf{A}}(\mathbf{L}) < \varepsilon$. Через τ_{Γ} обозначим наименьшую топологию в $Cl(H)$, содержащую все такие окрестности.

Последовательность $\{\mathbf{L}_n\}$ самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве H назовем самосопряженной регуляризацией симметрического оператора $\mathbf{L}$, если сильный граф-предел этой последовательности содержит график оператора $\mathbf{L}$ (всякая такая последовательность сходится к оператору $\mathbf{L}$ в топологии τ_{Γ}).

ТЕОРЕМА 2. Пусть оператор $\mathbf{L}$ является симметрическим оператором в гильбертовом пространстве H с конечными индексами (n_-, n_+) : $n_- = n_+ = n \in \mathbb{N}$. Тогда для любой самосопряженной регуляризации $\{\mathbf{L}_n\}$ оператора $\mathbf{L}$ в топологии τ_{Γ} выполняется условие

$$G(u_0, \mathbf{L}) = Ls_{\mathbf{L}_\varepsilon \rightarrow \mathbf{L}}(e^{-i\mathbf{L}_\varepsilon t} u_0) = \bigcup_{L_\sigma \in \Sigma(\mathbf{L})} e^{-i\mathbf{L}_\sigma t} u_0,$$

где $\Sigma(\mathbf{L})$ является множеством самосопряженных расширений оператора $\mathbf{L}$.

Утверждение теоремы следует из теоремы 9.5 (см. также следствие 9.5) работы [11]. Теорема 2 дает достаточные условия того, что задача Коши (4) является точкой разрыва существенного типа для разрешающего отображения.

4. УСРЕДНЕНИЕ АППРОКСИМИРУЮЩИХ РЕГУЛЯРИЗАЦИЙ И ПРОДОЛЖЕНИЕ РЕШЕНИЯ

В случае задач для дифференциальных уравнений, единственность решения которых либо отсутствует, либо не установлена, было предложено (см. [39], [40]) понятие статистического решения. В этом случае вместо задачи Коши для функции на промежутке со значениями в некотором банаховом пространстве задачи H рассматривается задача Коши для функции на промежутке, принимающей значения в пространстве мер на пространстве H , либо задача для меры на пространстве отображений промежутка в пространство H . Мы используем иной подход, в котором сама задача Коши рассматривается как случайная величина со значениями в пространстве $B(Y, X)$. В некоторых случаях удастся усреднить случайные решения и определить продолжение решения посредством их среднего значения. Метод усреднения случайных величин со значениями в множестве однопараметрических полугрупп был разработан в статье [20]. Для того чтобы применить этот метод к дифференциальным уравнениям, допускающим существенный взрыв решений, приведем необходимые определения и утверждения из этой статьи.

4.1. Случайные решения и множества решений. Пусть E – топологическое пространство, 2^E – алгебра всех подмножеств множества E . Для каждой точки $\varepsilon_0 \in E$ обозначим через $W(E, \varepsilon_0)$ множество всех неотрицательных нормированных конечно-аддитивных мер на измеримом пространстве $(E, 2^E)$, сосредоточенных в произвольной окрестности точки ε_0 в том смысле, что для любого $\mu \in W(E, \varepsilon_0)$ равенство $\mu(A) = 0$ выполняется для любого множества $A \subset E$, для которого точка ε_0 не является предельной, и, кроме того, $\mu(\{\varepsilon_0\}) = 0$.

Введем следующее расширение определения случайной величины. Случайной величиной будем называть измеримое отображение пространства с конечно-аддитивной неотрицательной нормированной мерой $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ в измеримое пространство $(T, \mathcal{A})$ (т.е. прообразом любого элемента алгебры $\mathcal{A}$ является элемент алгебры $\mathcal{F}$; при этом алгебра $\mathcal{A}$ не является сигма-алгеброй, а мера μ не является сигма-аддитивной). Говоря о случайной величине со значениями в топологическом пространстве (T, τ) , будем полагать, что пространство T снабжено алгеброй подмножеств $\mathcal{A}_\tau$, порожденной топологией τ – наименьшей алгеброй, содержащей топологию τ (т.е. содержащей все открытые множества пространства (T, τ) ; при этом, возможно, не все борелевские множества входят в алгебру $\mathcal{A}_\tau$, поскольку последняя не является сигма-алгеброй).

Пусть 2^Z – сигма-алгебра всех подмножеств топологического пространства задач Z . Пусть $W(Z)$ есть множество неотрицательных нормированных конечно-аддитивных мер на измеримом пространстве $(Z, 2^Z)$, а для каждого $z_0 \in Z$ обозначим через $W(Z, z_0)$ множество таких мер $\mu \in W(Z)$, что $\mu(\{z_0\}) = 0$ и $\mu(A) = 0$ для любого множества $A \in 2^Z$, от которого точка z_0 является изолированной в топологии τ_Z .

В топологическом пространстве $(2^Y, \tau_H)$ определим алгебру $\mathcal{A}_Y$ как наименьшую, содержащую все ε -окрестности всех точек пространства 2^Y в псевдометрике ρ_H .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Случайным множеством решений задачи $z_0 \in Z$ называется случайная величина G на измеримом пространстве с мерой $(Z, 2^Z, \mu)$ со значениями в измеримом пространстве $(2^Y, \mathcal{A}_Y)$ такая, что $\mu \in W(Z, z_0)$.

Данное определение является расширением традиционного определения решения задачи (1) (как частного прообраза вектора f при отображении $\mathbf{A}$) в следующем смысле.

ТЕОРЕМА 3. Пусть отображение G непрерывно в точке $z_0 \in Z$ и $G(z_0) = y_0 \in Y$. Тогда для любого $\mu \in W(Z, z_0)$ и для любого $\varepsilon > 0$ выполнено равенство

$$\mu(\{z \in Z: \rho_H(G(z), \{y_0\}) > \varepsilon\}) = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу непрерывности отображения G в точке z_0 прообраз любой ε -окрестности точки y_0 в пространстве 2^Y лежит в топологии τ_Z и содержит точку z_0 как предельную в топологии τ_Z точку множества $G^{-1}(O_\varepsilon(\{y_0\}))$. При этом прообраз любой окрестности $O_\varepsilon(A)$, $\varepsilon > 0$, $A \in 2^Y$, из пространства 2^Y измерим в пространстве $(Z, 2^Z)$, причем мера прообраза любой ε -окрестности точки $A \in 2^Y$ равна единице, если эта окрестность содержит точку $\{y_0\}$, или нулю, если окрестность изолирована от точки y_0 . Поэтому в силу определения множества $W(Z, z_0)$ мера любого такого прообраза ε -окрестности точки $\{y_0\} \in 2^Y$ равна единице, что и доказывает утверждение теоремы.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Таким образом, случайная величина G на измеримом пространстве с мерой $(Z, 2^Z, \mu)$ со значениями в измеримом пространстве $(2^Y, \mathcal{A}_Y)$ с вероятностью единица принимает значения в произвольной ε -окрестности точки y_0 . В этом смысле введенное определение является расширением понятия решения задачи $z_0 \in Z$.

Если же исходная задача $z_0 \in Z$ не имеет решения (см. примеры 3, 4), то роль решения возлагается на случайное множество решений с выбором меры из класса $W(Z, z_0)$.

Далее мы подробно исследуем случайные множества решений и их усреднение в следующей ситуации. Пусть $z_0 \in Z$ – задача для эволюционного уравнения, а $E \subset Z$ – такое множество задач, что $z_0 \in E$ и для каждого $z \in E \setminus z_0$ задача z определяет сильно непрерывную полугруппу преобразований гильбертова пространства H (см. пример 4). Тогда если носитель меры μ лежит на множестве E , то случайное множество решений G становится случайным решением. В этом случае имеет смысл рассмотреть случайную величину $\xi: E \rightarrow C(\mathbb{R}_+, B(H))$ со значениями в множестве полугрупп ограниченных преобразований пространства H (см. пример 4). Изучению случайных полугрупп и их математических ожиданий посвящен п. 4.2.

4.2. Случайные полугруппы, их математические ожидания и итерации.

Пусть Y – некоторое банахово пространство, $\Lambda_s = C_s(\mathbb{R}_+, B(Y))$ – топологическое векторное пространство сильно непрерывных операторнозначных отображений полуоси $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$ в банахово пространство $B(Y)$ ограниченных всюду определенных линейных операторов в банаховом пространстве Y . На пространстве Λ_s определим семейство функционалов, действующих на произвольный элемент $z \in \Lambda$ по правилу $\Phi_{t,A,g}(z) = \sup_{s \in [0,t]} \|z(t)A\|$, $t \in \mathbb{R}_+$, $A \in Y$. Рассмотрим на пространстве Λ_s топологию τ_s , порожденную семейством функционалов $\Phi_{t,A}$, $t \in \mathbb{R}_+$, $A \in Y$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Случайной полугруппой будем называть измеримое отображение ξ некоторого пространства с мерой в линейное топологическое пространство $C_s(\mathbb{R}_+, B(Y))$, значениями которого являются однопараметрические полугруппы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Математическим ожиданием случайной полугруппы ξ назовем операторнозначную функцию параметра полугруппы, значение которой в каждой точке t равно интегралу Петтиса по мере μ от отображения $E \rightarrow B(Y)$, действующего по правилу $\varepsilon \rightarrow \xi_\varepsilon(t)$, $\varepsilon \in E$:

$$\mathbf{F}_\mu(t) = \mathbf{M}[\xi](t) \equiv \int_E \xi_\varepsilon(t) d\mu. \quad (5)$$

В случае изучения задачи Коши z_0 для эволюционного дифференциального уравнения, представленного в виде (1) и допускающего явление существенного взрыва, роль множества E играет проколота окрестность в топологическом пространстве S задач Коши, для которого задача z_0 является точкой замыкания, а для каждого $z \in S \setminus z_0$ задача Коши z имеет единственное решение Y . Если мера μ на измеримом пространстве $(S, 2^S)$ принадлежит множеству $W(S, z_0)$, то случайная величина $\xi: E \rightarrow Y$ является продолжением решения через момент возникновения взрыва задачи z_0 в смысле определения 4.

В качестве множества E выберем множество $G(X)$ всех генераторов сильно непрерывных полугрупп, действующих в пространстве X , снабженное топологией τ_s на множестве порожденных ими сильно непрерывных полугрупп (см. [11], п.9). Рассмотрим случайную величину, определенную на измеримом пространстве $(E, 2^E, \mu)$ с мерой $\mu \in W(E)$, принимающую значения в пространстве $\Lambda_w = C_w(\mathbb{R}_+, B(X))$ слабо непрерывных отображений полуоси $\mathbb{R}_+$ в банахово пространство $B(X)$ линейных ограниченных преобразований банахова пространства X , являющегося сопряженным к банахову пространству X_* . На пространстве Λ_w зададим семейство функционалов, действующих на произвольный элемент $z \in \Lambda_w$ по правилу $\varphi_{t,A,g}(z) = \langle z(t)A, g \rangle$, $t \in \mathbb{R}_+$, $A \in X$, $g \in X_*$, и определим топологию τ_w , порожденную семейством функционалов $\varphi_{t,A,g}$, $t \in \mathbb{R}_+$, $A \in X$, $g \in X_*$. Тогда пространство Λ_w , снабженное структурой минимальной алгебры $\mathcal{A}_w$ подмножеств, содержащей топологию τ_w , является измеримым пространством, а отображение $\xi: E \rightarrow \Lambda_w$ является случайной величиной. Математическим ожиданием случайной величины $\xi: E \rightarrow \Lambda_w$ называется интеграл Петтиса (5), т.е. такой элемент $M\xi \in \Lambda_w$, что для любых $t \in \mathbb{R}_+$, $A \in X$, $g \in X_*$ выполняется равенство

$$\langle M\xi(t)A, g \rangle = \int_E \langle \xi_\varepsilon(t)A, g \rangle d\mu(\varepsilon). \quad (6)$$

Если значения отображения ξ ограничены равномерно по (ε, t) на множестве $E \times \mathbb{R}_+$, то последний интеграл – интеграл Радона от ограниченной числовой функции по конечно-аддитивной мере. В этом случае он корректно определен, а равенство (6) при каждом $t \in \mathbb{R}_+$ определяет линейное ограниченное преобразование $M\xi(t) \in B(X)$.

ТЕОРЕМА 4. Если существует такое плотное в пространстве X линейное подпространство D , что для каждого $A \in D$ семейство отображений $\xi_\varepsilon(t)A \in C(\mathbb{R}_+, X)$, $\varepsilon \in E$, является слабо (или сильно) равномерно липшицевым и семейство отображений ξ является равномерно ограниченным, то $M\xi(t) \in C_w(\mathbb{R}_+, B(X))$ (или $M\xi(t) \in C_s(\mathbb{R}_+, B(X))$).

Доказательство теоремы 4 опубликовано в работе [20].

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Математическое ожидание случайной полугруппы может не быть полугруппой. Тривиальный пример составляет усреднение множества из двух унитарных полугрупп e^{-it} , $t \geq 0$, и e^{it} , $t \geq 0$, действующих в одномерном гильбертовом пространстве $\mathbf{C}$. Полусумма этих двух полугрупп является однопараметрическим семейством $F(t)$, $t \geq 0$, преобразований пространства $\mathbf{C}$, действующих как оператор умножения на число $\cos t$. Но поскольку $\cos(t+s) \neq (\cos t)(\cos s)$, то семейство усредненных преобразований $F(t)$, $t \geq 0$, не является полугруппой.

4.3. Усреднение случайных полугрупп с помощью итераций Чернова. Следуя работе [41], используем следующее отношение эквивалентности операторнозначных функций на пространстве Π сильно непрерывных операторнозначных функций $\mathbf{F}: [0, +\infty) \rightarrow B(X)$, удовлетворяющих условию $\mathbf{F}(0) = \mathbf{I}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7 [20]. Будем говорить, что операторнозначные функции $\mathbf{F}$, $\mathbf{G}$, действующие из некоторой замкнутой правой полуокрестности нуля на числовой оси в банахово пространство $B(X)$ ограниченных линейных операторов, действующих в некотором банаховом пространстве X , эквивалентны по Чернову, если для каждого $T > 0$ и каждого $u \in X$ выполняется условие

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \in [0, T]} \left\| \left(\left(\mathbf{G} \left(\frac{t}{n} \right) \right)^n - \left(\mathbf{F} \left(\frac{t}{n} \right) \right)^n \right) u \right\| = 0.$$

ТЕОРЕМА 5 [20]. Пусть $\{\mathbf{L}_n\}$ – последовательность генераторов сильно непрерывных сжимающих полугрупп в банаховом пространстве X . Пусть $\{\mu_n\}$ – последовательность неотрицательных чисел, сумма ряда из которых равна единице. Пусть существует линейное подпространство $D \subset H$, являющееся существенной областью определения каждого из операторов $\mathbf{L}_n$, $n \in \mathbb{N}$, и такое, что для любого $x \in D$ числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n \|\mathbf{L}_n x\|$ сходится. Тогда если определенный на пространстве D равенством $\mathbf{S}x = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k \mathbf{L}_k x$ оператор $\mathbf{S}$ замыкаем и его замыкание является генератором сильно непрерывной полугруппы $e^{t\mathbf{S}}$, $t \geq 0$, то математическое ожидание случайной полугруппы $\mathbf{F}_\mu(t) = \sum_{n \in \mathbb{N}} e^{t\mathbf{L}_n} \mu_n$, $t \geq 0$, эквивалентно по Чернову полугруппе $e^{t\mathbf{S}}$, $t \in \mathbb{R}_+$.

СЛЕДСТВИЕ 1 [20]. Если $\{\mathbf{L}_j\}$ – равномерно ограниченная последовательность операторов из пространства $B(X)$, то выполняется утверждение теоремы 5.

Таким образом, согласно следствию 1 определяемая теоремой 5 операция усреднения генераторов полугрупп является расширением операции усреднения ограниченных линейных операторов в банаховом пространстве $B(X)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. Будем говорить, что генератор сильно непрерывной полугруппы $\mathbf{L}$ является интегралом от функции $\mathbf{L}(\varepsilon)$, $\varepsilon \in E$, принимающей значения в множестве генераторов сильно непрерывных полугрупп, по неотрицательной нормированной мере μ на алгебре 2^E в экспоненциальном смысле, если операторнозначная функция (где интеграл понимается в смысле Петтиса) $\mathbf{G}(t) = \int_E e^{t\mathbf{L}(\varepsilon)} d\mu(\varepsilon)$, $t \geq 0$, эквивалентна по Чернову полугруппе $e^{t\mathbf{L}}$.

Будем говорить, что генератор сильно непрерывной полугруппы $\mathbf{L}$ является суммой генераторов сильно непрерывных полугрупп $p_1 \mathbf{L}_1$ и $p_2 \mathbf{L}_2$ при произвольных

$p_1 \geq 0, p_2 \geq 0, p_1 + p_2 = 1$, в экспоненциальном смысле, если операторнозначная функция $\mathbf{G}(t) = p_1 e^{t\mathbf{L}_1} + p_2 e^{t\mathbf{L}_2}, t \geq 0$, эквивалентна по Чернову полугруппе $e^{t\mathbf{L}}$.

Сумма операторов коммутативна, и нулевой оператор является нулевым элементом. Ассоциативность операции суммирования нуждается в исследовании; следствие 1 дает достаточные условия для ассоциативности $p_1\mathbf{L}_1 + (p_2\mathbf{L}_2 + p_3\mathbf{L}_3) = (p_1\mathbf{L}_1 + p_2\mathbf{L}_2) + p_3\mathbf{L}_3$.

СЛЕДСТВИЕ 2 [20]. Пусть последовательность итераций $\mathbf{G}_n(t) = [\mathbf{F}_\mu(t/n)]^n, n \in \mathbb{N}$, математического ожидания $\mathbf{F}_\mu$ случайной полугруппы $\mathbf{U}_\varepsilon, \varepsilon \in E$, сходится равномерно на каждом отрезке полупрямой $\mathbb{R}_+$. Тогда математическое ожидание случайной полугруппы $\mathbf{F}_\mu(\cdot)$ эквивалентно по Чернову полугруппе $\mathbf{V}(\cdot)$, генератор которой является обобщенным экспоненциальным средним генераторов $\mathbf{L}_\varepsilon, \varepsilon \in E$, случайной полугруппы.

4.4. Примеры применения усреднения случайных полугрупп к аппроксимации начально-краевых задач, допускающих явление существенного взрыва. Рассмотрение задачи Коши как точки z_0 в топологическом векторном пространстве Z и выбор меры на топологическом пространстве Z позволяют сопоставить задаче Коши, допускающей явление существенного взрыва множества решений, следующие объекты:

- 1) случайное преобразование пространства начальных данных;
- 2) усредненное преобразование пространства начальных данных;
- 3) итерации Фейнмана–Чернова усредненного преобразования;
- 4) предел (или множество предельных точек) итераций Фейнмана–Чернова усредненного преобразования.

Например, задаче Коши для уравнения Шредингера с вырождением на одной полупрямой (см. пример 4) выбор меры на пространстве аппроксимирующих операторов из класса $W(E, 0)$ (см. п. 4.1) сопоставляет такое случайное решение, что его математическим ожиданием является решение задачи Коши с сопряженным оператором. Задаче Коши для уравнения Шредингера на двух полупрямых выбор меры на пространстве аппроксимирующих операторов из класса $W(E)$ сопоставляет случайное решение, математическим ожиданием которого является решение задачи Коши для уравнения Шредингера с производящим оператором, совпадающим с одним из самосопряженных расширений оператора $\mathbf{L}$.

Таким образом, задача Коши, допускающая взрыв решений существенного типа, порождает случайное преобразование пространства начальных данных, усреднение которого может быть произведено в соответствии с определением 6, производящий оператор которого может быть усреднен в соответствии с определением 8, а результат усреднения может быть проиллюстрирован приведенным ниже примером 6.

Рассмотрим обобщенную последовательность гамильтонианов $\mathbf{L}_\varepsilon, \varepsilon \rightarrow +0$, сходящуюся в топологии сильной граф-сходимости к предельному гамильтониану $\mathbf{L}$ (такая последовательность рассмотрена в примере 4, см. также [11], [32]).

ПРИМЕР 6. Пусть $\mathbf{L}$ – максимальный симметрический оператор в гильбертовом пространстве H . Пусть на множестве $\mathbb{N}$ выбрана некоторая неотрицательная нормированная чисто конечно-аддитивная мера μ . Пусть последовательность самосопряженных операторов $\{\mathbf{L}_n\}$ такова, что ее сильный граф-предел Γ содержит график

$\Gamma_{\mathbf{L}}$ оператора $\mathbf{L}$ (как в примере 4). Тогда если индексы (n_-, n_+) оператора $\mathbf{L}$ удовлетворяют условию $n_+ = 0$, то последовательность полугрупп $e^{-it\mathbf{L}_n}$, $t \geq 0$, сходится в сильной операторной топологии к изометрической полугруппе $e^{-it\mathbf{L}}$, $t \geq 0$, равномерно на каждом отрезке; при этом справедливо равенство

$$e^{-it\mathbf{L}} = \int_{\mathbb{N}} e^{-it\mathbf{L}_n} d\mu(n), \quad t \geq 0.$$

А если $n_- = 0$ (как в примере 4), то последовательность полугрупп $e^{-it\mathbf{L}_n}$, $t \geq 0$, сходится в слабой операторной топологии к сжимающей полугруппе $e^{-it\mathbf{L}^*}$, $t \geq 0$, равномерно на каждом отрезке; при этом справедливо равенство

$$e^{-it\mathbf{L}^*} = \int_{\mathbb{N}} e^{-it\mathbf{L}_n} d\mu(n), \quad t \geq 0.$$

Поэтому при любом выборе неотрицательной нормированной чисто конечно-аддитивной меры μ на множестве $\mathbb{N}$ следующие равенства выполняются в смысле определения 8: $\mathbf{L} = \int_{\mathbb{N}} \mathbf{L}_n d\mu(n)$, если $n_+ = 0$, и $\mathbf{L}^* = \int_{\mathbb{N}} \mathbf{L}_n d\mu(n)$, если $n_+ > 0$.

Пример 6 показывает также, что тип взрыва решений задачи Коши для уравнения (4) зависит от спектральных свойств производящего оператора задачи Коши $\mathbf{L}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Если последовательность самосопряженных операторов $\{\mathbf{L}_n\}$ такова, что ее сильный граф-предел Γ содержит график $\Gamma_{\mathbf{L}}$ максимального симметрического оператора $\mathbf{L}$ (совпадает с ним), то это не означает, что общая область определения $D = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} D(\mathbf{L}_n)$ плотна в пространстве H , многообразие D может быть даже тривиальным.

Благодарности. Авторы выражают благодарность за плодотворные обсуждения и ценные советы В. В. Веденяпину, И. В. Воловичу, А. К. Гущину, Е. И. Зеленову, Ю. Н. Орлову, О. Г. Смолянову, Н. Н. Шамарову.

Список литературы

- [1] M. W. Hirsch, C. Pugh, “Stable manifolds and hyperbolic sets”, *Global Analysis* (University of California, Berkeley, CA, July 1–26, 1968), *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*, **14**, eds. S.-S. Chern, S. Smale, AMS, Providence, 1970, 133–164.
- [2] J. Palis, *Proc. Am. Math. Soc.*, **27**:1 (1971), 85–90.
- [3] M. Shub, S. Smale, *Ann. Math.*, **96**:3 (1972), 587–591.
- [4] И. У. Бронштейн, *Неавтономные динамические системы*, Штиинца, Кишинев, 1984.
- [5] Д. В. Аносов, С. Х. Арансон, В. З. Гринес, Р. В. Плыкин, Е. А. Сатаев, А. В. Сафронов, В. В. Солодов, А. Н. Старков, А. М. Степин, С. В. Шлячков, “Динамические системы с гиперболическим поведением”, *Динамические системы – 9*, *Итоги науки и техники. Современ. пробл. матем. Фундам. направл.*, **66**, ВИНТИ, М., 1991, 5–242.
- [6] Л. С. Ефремова, *Вестн. Нижегородского ун-та им. Н. И. Лобачевского*, 2012, № 3(1), 130–136.
- [7] Л. С. Ефремова, “Отсутствие C^1 - Ω -взрыва в пространстве гладких простейших ко-сых произведений”, *Труды VI Международной конференции по дифференциальным и функционально-дифференциальным уравнениям*, Ч. 4 (Москва, 14–21 августа, 2011), *СМФН*, **48**, РУДН, М., 2013, 36–50.
- [8] В. А. Галактионов, С. П. Курдюмов, А. Г. Михайлов, *Режимы с обострением*, Наука, М., 1986.

- [9] С. И. Похожаев, *Докл. АН СССР*, **165**:1 (1965), 36–39.
- [10] С. Н. Кружков, *Лекции по уравнениям с частными производными*, МГУ, М., 1970.
- [11] В. Ж. Сакбаев, “Задача Коши для линейного дифференциального уравнения с вырождением и усреднение аппроксимирующих ее регуляризаций”, *Уравнения в частных производных*, СМФН, **43**, РУДН, М., 2012, 3–172.
- [12] О. А. Олейник, *УМН*, **12**:3(75) (1957), 3–73.
- [13] В. Ж. Сакбаев, *Докл. РАН*, **419**:2 (2008), 174–178.
- [14] С. К. Годунов, Е. И. Роменский, *Элементы механики сплошных сред и законы сохранения*, Университетская серия, Новосибирск, 1998.
- [15] И. В. Волович, В. Ж. Сакбаев, *Тр. МИАН*, **285** (2014), 64–88, arXiv:1312.4302.
- [16] В. П. Бурский, *Методы исследования граничных задач для общих дифференциальных уравнений*, Наукова думка, Киев, 2002.
- [17] В. И. Оселедец, *ТВП*, **10**:3 (1965), 551–557.
- [18] L. Arnold, *Stochastic Differential Equations: Theory and Applications*, Wiley, New York, 1974.
- [19] М. Л. Бланк, *Устойчивость и локализация в хаотической динамике*, МЦНМО, М., 2001.
- [20] Ю. Н. Орлов, В. Ж. Сакбаев, О. Г. Смолянов, *Тр. МИАН*, **285** (2014), 232–243.
- [21] Н. Н. Боголюбов, *О некоторых статистических методах в математической физике*, Изд-во АН СССР, Киев, 1945.
- [22] L. Accardi, Y. G. Lu, I. V. Volovich, *Quantum Theory and Its Stochastic Limit*, Springer, Berlin, 2002.
- [23] L. Accardi, A. N. Pechen, I. V. Volovich, *J. Phys. A*, **35**:23 (2002), 4889–4902, arXiv: quant-ph/0108112.
- [24] О. Г. Смолянов, Е. Т. Шавгулидзе, *Континуальные интегралы*, МГУ, М., 2015.
- [25] В. К. Иванов, И. В. Мельникова, А. И. Филинков, *Дифференциально-операторные уравнения и некорректные задачи*, Физматлит, М., 1995.
- [26] А. Б. Бакушинский, М. Ю. Кокурин, *Итерационные методы решения некорректных операторных уравнений с гладкими операторами*, УРСС, М., 2002.
- [27] А. Н. Тихонов, В. Я. Арсенин, *Методы решения некорректных задач*, Наука, М., 1986.
- [28] М. И. Вишик, В. В. Чепыжев, *Матем. сб.*, **200**:4 (2009), 3–30.
- [29] Э. Митидиери, С. И. Похожаев, *Тр. МИАН*, **234** (2001), 3–383.
- [30] В. Ж. Сакбаев, *Тр. МИАН*, **283** (2013), 171–187.
- [31] V. A. Galaktionov, J. L. Vazquez, *Arch. Rational Mech. Anal.*, **129**:4 (1995), 225–244.
- [32] В. Ж. Сакбаев, *Фундамент. и прикл. матем.*, **12**:6 (2006), 157–174.
- [33] В. И. Богачев, Н. В. Крылов, М. Рёкнер, *УМН*, **64**:6(390) (2009), 5–116.
- [34] В. В. Жиков, *Функц. анализ и его прил.*, **35**:1 (2001), 23–39.
- [35] Е. Ю. Панов, *Матем. моделирование*, **14**:3 (2002), 17–26.
- [36] R. J. Di Perna, P. Lions, *Invent. Math.*, **98**:3 (1989), 511–547.
- [37] N. Mizoguchi, F. Quiros, J. L. Vazquez, *Math. Ann.*, **350**:4 (2011), 811–827.
- [38] Т. Като, *Теория возмущений линейных операторов*, Мир, М., 1972.
- [39] А. А. Арсеньев, *О существовании инвариантных мер на пространстве решений эволюционного уравнения*, Препринт ИПМ им. М. В. Келдыша РАН № 73, ИПМ, М., 1976.
- [40] А. М. Вершик, О. А. Ладыженская, *Докл. АН СССР*, **226**:1 (1976), 26–29.
- [41] O. G. Smolyanov, H. von Weizsäcker, O. Wittich, *Potential Anal.*, **26**:1 (2007), 1–29.