Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. М. Локтев, В. М. Турковский, С. Г. Шарапов, К теории сверхпроводимости в двумерной модели Фрелиха с произвольной концентрацией носителей, *ТМФ*, 1998, том 115, номер 3, 419–436

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf884>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.12

26 апреля 2023 г., 06:32:35

© 1998 г. В. М. Локтев*, В. М. Турковский[†], С. Г. Шарапов*

К ТЕОРИИ СВЕРХПРОВОДИМОСТИ В ДВУМЕРНОЙ МОДЕЛИ ФРЕЛИХА С ПРОИЗВОЛЬНОЙ КОНЦЕНТРАЦИЕЙ НОСИТЕЛЕЙ

Исходя из гамильтониана Фрелиха получены самосогласованные уравнения для энергетической щели и химического потенциала, которые позволяют проанализировать сверхпроводящие свойства системы при произвольной концентрации носителей. Рассмотрены случаи слабой, промежуточной и сильной связей между фермионами, что позволило проследить переход от режима локальных пар к куперовскому спариванию в модели с косвенным взаимодействием.

1. ВВЕДЕНИЕ

Уже более десяти лет теоретическое описание высокотемпературных сверхпроводников (ВТСП) остается одной из актуальных проблем современной физики твердого тела. Сложность этой проблемы, по-видимому, связана с тем, что ВТСП обладают рядом специфических особенностей: слоистая кристаллическая структура, следствием которой является, в частности, квазидвумерный характер электронных и магнитных свойств, возможное наличие нескольких зон проводимости, относительно низкое значение концентрации носителей (дырок), зависимость от последней ряда экспериментально наблюдаемых характеристик этих соединений и др. Перечисленные особенности приводят к значительным трудностям в построении модели, которая могла бы все их учесть (см., например, обзор [1]).

Квазидвумерный характер электропроводимости, а также невысокая и достаточно легко изменяемая плотность носителей обуславливают то, что в ВТСП возможен переход от режима сверхпроводимости с куперовскими (сильноперекрывающимися) парами к режиму локальных (т.е. независимых) пар, идея существования которых была выдвинута Шафротом [2] еще до создания теории Бардина, Купера, Шриффера (БКШ). Эта идея была предложена с целью сведения непонятной тогда сверхпроводимости к сверхтекучести, микроскопическая теория которой уже была развита Боголюбовым [3].

* Институт теоретической физики им. Н. Н. Боголюбова НАН Украины, Киев, Украина

[†] Киевский государственный университет, Киев, Украина

При изучении ВТСП с помощью изменения количества свободных носителей удается экспериментально проследить переход сверхпроводящих свойств этих систем от значений концентраций, которым соответствуют локальные пары (составные бозоны, чьи волновые функции слабо перекрываются между собой), до значений, когда такие пары выделить невозможно и речь может идти лишь о плотностях ферми-газа, близких к плотностям металла. Таким образом, открытие ВТСП поставило задачу описания перехода (“кроссовера”) от сверхтекучести к сверхпроводимости (например, типа БКШ). К настоящему времени такой переход рассмотрен лишь в полевых моделях с локальным незапаздывающим четырехфермионным ($4F$) взаимодействием в приближении среднего поля [4, 5] (проблеме перехода в различных, включая многозонные [6], моделях с прямым межфермионным взаимодействием посвящены обзоры [7–9]).

Вместе с тем следует отметить, что упомянутое $4F$ -взаимодействие, хотя и допускает достаточно полное (в частности, с учетом гауссовых флуктуаций) описание перехода от сверхтекучести к сверхпроводимости практически без ограничений на входящие в задачу исходные параметры, является, вообще говоря, нереалистичным. Обычно оно может рассматриваться лишь как следствие более фундаментального косвенного взаимодействия, природа которого для ВТСП пока не установлена (см., например, [1]). Не исключено, что таким косвенным взаимодействием, подобно обычным сверхпроводникам, является электрон-фононное взаимодействие (модель Фрелиха) [10, 11] или благодаря необычным магнитным свойствам ВТСП электрон-спиновое взаимодействие, когда образование пар осуществляется как следствие обмена фермионов магнонами [1, 12, 13]. В любом случае представляется вероятным, что более реалистичной моделью для описания ВТСП была бы модель, в которой притяжение между носителями обеспечивается обменом элементарными возбуждениями какого-либо бозонного поля. В рамках модели с косвенным взаимодействием можно не только получить притяжение, но и оценить роль такого принципиально важного фактора, как запаздывание. Соответствующее обобщение вносит также в теорию дополнительный размерный параметр ω_0 – характерную частоту возбуждений бозе-типа. Как известно, в низкотемпературных сверхпроводниках ω_0 – это частота Дебая. Благодаря высокой плотности носителей в таких сверхпроводниках практически всегда выполняется неравенство $\omega_0 \ll \epsilon_F$, где ϵ_F – энергия Ферми. В ВТСП с их относительно низкой плотностью носителей (или, что одно и то же, малой ϵ_F), возможно, выполняется случай $\omega_0 < \epsilon_F$, когда взаимодействие осуществляется при помощи, например, оптических фононов. Можно также предположить, что $\omega \simeq \epsilon_F$, если взаимодействие осуществляется через магноны, и даже $\omega_0 > \epsilon_F$, если – через квадрупольные dd-экситоны (механизм Гайдидея–Локтева–Вебера [14]) или же плазмоны [15].

Целью данной работы являются обобщение (на примере электрон-фононной связи простейшего вида) изучения кроссовера на случай косвенного взаимодействия между носителями и рассмотрение сверхпроводящей фазы двумерного металла с переменной плотностью носителей при $T = 0$. В частности, нас будут интересовать зависимость па-

раметра порядка (щели) и химического потенциала системы от величины концентрации n_f фермионов (т.е. от ϵ_F) при любом соотношении между ϵ_F и ω_0 , переход от локальных пар к куперовским, а также поведение плотности состояний при различных ϵ_F .

Некоторые из поставленного круга вопросов уже рассматривались в работе [16], где, однако, решение уравнения Элиашберга (УЭ) [17] было получено с помощью, строго говоря, ошибочного предположения о независимости величины сверхпроводящей щели Δ от энергии. Если в модели с 4F-взаимодействием это можно оправдать, то учет эффектов запаздывания делает такое приближение незаконным, а прямые аналитические расчеты щели – очень сложными. Ниже предпринимается попытка найти решение УЭ методами, которые разработаны и используются в теории поля [18, 19]. Согласно им интегральное УЭ для щели (в теории поля ему, как известно, соответствует уравнение Швингера–Дайсона) может быть приведено к дифференциальному, решение которого удастся найти в аналитическом виде.

План дальнейшего изложения следующий. В разделе 2 описывается модель и приводятся основные уравнения. Ряд стандартных предположений позволяет свести их к системе самосогласованных интегральных уравнений для энергетической щели и химического потенциала. В разделе 3 с помощью вышеупомянутого метода УЭ сводится к дифференциальному. В разделе 4 путем решения этого уравнения анализируются отдельно случаи слабой, промежуточной и сильной связей и результаты сопоставляются с известными в литературе.

2. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Как известно, модельный гамильтониан, описывающий электрон-фоонную систему, может быть представлен в виде [20]

$$H = -\psi_\sigma^\dagger(\mathbf{r}) \left(\frac{\nabla^2}{2m} + \mu \right) \psi_\sigma(\mathbf{r}) + H_{ph}(\varphi(\mathbf{r})) + g\psi_\sigma^\dagger(\mathbf{r})\psi_\sigma(\mathbf{r})\varphi(\mathbf{r}), \quad (1)$$

где H_{ph} – гамильтониан свободных фоонов с энергией $\omega(\mathbf{k})$ и волновым вектором $\mathbf{k}$; $\mathbf{r}$ – двумерный вектор; $\psi_\sigma(\mathbf{r})$, $\varphi(\mathbf{r})$ – ферми- и бозе-поля в представлении Шредингера; m – масса фермиона; σ – его спин; g – константа электрон-фоонной связи; μ – химический потенциал, фиксирующий плотность носителей n_f в системе. Используются единицы, в которых $\hbar = 1$.

Для исследования влияния эффектов запаздывания на электронный спектр в зависимости от n_f необходимо проанализировать систему из двух уравнений. Одно из них – это УЭ для собственной энергетической части $\Sigma(p)$ ($p \equiv \omega, \mathbf{k}$), а второе – известное условие, налагаемое на электронную функцию Грина (ФГ) $G(p)$ и устанавливающее связь μ с n_f . Напомним, что в двумерных системах с квадратичным законом дисперсии $n_f = \epsilon_F m / \pi$.

Удобнее всего УЭ записывается в формализме Намбу. В этом случае собственную энергетическую часть ищут в виде [10, 21]

$$\Sigma(p) = [1 - Z(p)]\omega I + \chi(p)\tau_z + \phi(p)\tau_+ + \phi^*(p)\tau_- . \quad (2)$$

Здесь $Z(p)$, $\chi(p)$, $\phi(p)$ – произвольные функции. За появление аномальных средних “отвечает” функция $\phi(p)$. I , τ_z , $\tau_{\pm}$ – единичная матрица и матрицы Паули, соответственно. Как известно, $\Phi\Gamma$ записывается в следующем виде [21]:

$$G(p) = \frac{Z(p)\omega + \bar{\xi}(\mathbf{p})\tau_z + \phi(p)\tau_+ + \phi^*(p)\tau_-}{[Z(p)\omega]^2 - [E(p)]^2 + i\delta} e^{i\delta\omega\tau_z}, \quad \delta \rightarrow +0, \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{\xi}(\mathbf{k}) &= \xi(\mathbf{k}) + \chi(\mathbf{k}), & \xi(\mathbf{k}) &= \frac{\mathbf{k}^2}{2m} - \mu, \\ E(p) &= \sqrt{\bar{\xi}(\mathbf{p})^2 + \Delta^2(p)}, & \Delta(p) &= |\phi(p)|. \end{aligned}$$

Само же $\mathcal{U}\mathcal{E}$ с учетом определений (2) и (3) может быть представлено следующим образом:

$$\Sigma(p) = ig \int \frac{d^3p'}{(2\pi)^3} \tau_z G(p') \tau_z \Gamma(p', p; p - p') D(p - p'), \quad (4)$$

где $\Gamma(p, p'; p - p')$ – вершинная функция, а $D(p - p')$ – “одетый” фононный пропагатор.

Прежде чем приступить к анализу уравнения (4), заметим, что в данном случае μ – это искомый параметр, который определяется из уравнения

$$-i \int \text{Tr} [\tau_z G(\mathbf{k}, t = 0)] \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} = n_f. \quad (5)$$

Очевидно, что в такой общей форме проанализировать систему уравнений (4) и (5) невозможно, поэтому приходится делать некоторые упрощения.

Одним из таких упрощений, которые иногда используются при исследовании $\mathcal{U}\mathcal{E}$, является пренебрежение эффектами, непосредственно не связанными с появлением аномальных средних, т.е. полагается $Z(p) = 1$, а $\chi(p) = 0$. Интересно заметить, что при изучении релятивистского уравнения Швингера–Дайсона в лестничном приближении, когда бозе-возбуждениями являются не фононы, а фотоны, специальный выбор калибровки позволяет считать $Z(p) = 1$, даже не используя дополнительного предположения [22]. В теории сверхпроводимости это не так и для $Z(p)$ имеется отдельное уравнение, а равенство $Z(p) \simeq 1$, на самом деле, является справедливым лишь в случае слабой связи [10, 23].

Второе упрощение вытекает из хорошо известной теоремы Мигдала [24], согласно которой при $\omega_0 \ll \epsilon_F$ электрон-фононную вершинную часть можно заменить ее “голым” значением g . Необходимо сразу же сказать, что в рассматриваемой задаче мы не можем прямо использовать результат Мигдала, т.к. для ВТСП, как уже упоминалось, стандартное неравенство $\omega_0 \ll \epsilon_F$ может и не выполняться. Однако недавно теорема Мигдала была обобщена для случая $\omega_0 \gg \epsilon_F$ [25]. Из этого обобщения следует, что и для

очень низких плотностей носителей (которые физически определяются этим же неравенством $\epsilon_F \ll \omega_0$) вершинную функцию Γ в уравнении (4) можно заменить ее “голым” значением g .

С целью выяснения качественных закономерностей кроссовера в модели с косвенным межфермионным притяжением и получения аналитических результатов мы предположим, что “голую” вершину можно использовать при всех соотношениях между ω_0 и ϵ_F , хотя существуют указания [26], что при $\omega_0 \sim \epsilon_F$ учет полной вершинной функции является, вообще говоря, важным и для определенных плотностей фермионов может приводить к некоторому (незначительному) увеличению критической температуры T_c . При этом заметим, что учет в таком подходе полной вершинной функции нужно делать, предполагая возможность того, что $\mu \neq \epsilon_F$, т.е. величина μ должна самосогласованно определяться из уравнения (5).

И, наконец, третье упрощение связано с выбором в (4) вида бозонного (фононного) пропагатора. Как это часто делается [21], заменим его “голым” пропагатором

$$D^{(0)}(p) = \frac{\omega^2(\mathbf{k})}{\omega^2 - \omega^2(\mathbf{k}) + i\delta}. \quad (6)$$

Таким образом, с учетом сделанных упрощений уравнение (4) приобретает вид

$$\phi(p) = -ig^2 \int \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3} \frac{\phi(p')\omega^2(\mathbf{k} - \mathbf{k}')}{[\omega'^2 - \xi(\mathbf{k}')^2 - |\phi(p')|^2 + i\delta][(\omega - \omega')^2 - \omega^2(\mathbf{k} - \mathbf{k}') + i\delta]}. \quad (7)$$

Что касается закона дисперсии фононов, то выберем его в простейшем виде $\omega(\mathbf{k}) = \omega_0$ (модель Эйнштейна)¹⁾. Тогда функция ϕ уже не зависит от $\mathbf{k}$: $\phi(p) = \phi(\omega)$. В результате уравнения (7) и (5) примут соответственно вид

$$\phi(\omega) = -ig^2 \int \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3} \frac{\phi(\omega')\omega_0^2}{[\omega'^2 - \xi(\mathbf{k}')^2 - |\phi(\omega')|^2 + i\delta][(\omega - \omega')^2 - \omega_0^2 + i\delta]}, \quad (8)$$

$$2\epsilon_F = \text{Re} \int_0^\infty d\omega \left[\left(\frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 - |\phi(\omega)|^2}} - 1 \right) \theta(\mu + \sqrt{\omega^2 - |\phi(\omega)|^2}) + \right. \\ \left. + \left(\frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 - |\phi(\omega)|^2}} + 1 \right) \theta(\mu - \sqrt{\omega^2 - |\phi(\omega)|^2}) \right]. \quad (9)$$

Итак, исследуется самосогласованная система уравнений (8), (9). Уравнение (8) анализировалось и решалось неоднократно (в основном численно), не говоря уже о том, что

¹⁾ Уместно сказать, что соединения ВТСП относятся к ионным кристаллам, в которых оптические фононные ветви с относительно слабой дисперсией должны играть более важную роль, чем акустические. Это же предположение довольно хорошо соответствует квадрупольным экситонам (см. [12, 14]), дисперсия которых незначительна. Что же касается магнонов, то пренебрежение их аномально большой в ВТСП дисперсией является недопустимым, и к ним эйнштейновское приближение для спектра промежуточных бозонов не может быть применимым.

во всех известных случаях [17, 20, 21] величина μ совпадала с ϵ_F и для спектра нормального состояния принималось условие

$$\xi(\mathbf{k}) \simeq k_F(k - k_F)/m, \quad (10)$$

где $\mathbf{k}_F$ – импульс Ферми. Если продолжить аналогию с релятивистскими моделями, то нужно напомнить, что в них “фононы” (т.е. фотоны) являются акустическими ($\omega(\mathbf{k}) = c|\mathbf{k}|$, c – скорость). Однако благодаря релятивистской инвариантности и тому, что в ФГ частиц входит та же скорость c , уравнение (8) будет содержать не две независимые переменные ω и $\mathbf{k}$, а только их инвариантную комбинацию $p^2 = \omega^2 - \mathbf{k}^2$, что и делает возможным аналитическое решение. При изучении твердых тел такое приближение (равенство скоростей различных квазичастиц) неприемлемо, а уравнение типа (8) при $\omega(\mathbf{k}) \neq \text{const}$ всегда имеет две независимые переменные. При этом получение его аналитического решения становится крайне проблематичным²⁾.

3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ $\phi(\omega)$

Как уже было отмечено во введении, ниже будет анализироваться решение связанной системы уравнений для искомых величин $\phi(\omega)$ и μ . Приближение $\phi = \text{const}$, использованное в [16], приводит, вообще говоря, к потере ряда важных эффектов: например, к возможному существованию минимального порогового значения константы связи, при котором возникает спаривание, неправильному поведению плотности фермионных состояний и т.д. Такой порог возникает, например, в безмассовой квантовой электродинамике, где роль щели играет энергия двухчастичных связанных состояний (“динамическая масса”) [18, 19].

Как правило, изучение уравнения (8), даже когда уравнение (9) имеет тривиальное решение $\mu = \epsilon_F$, проводится (за редким исключением [27]) численно [23]. В то же время есть возможность аналитического исследования (8) (и даже системы (8) и (9)) путем сведения уравнения (8) к дифференциальному, решение которого при малых и больших ω (см. ниже) может быть получено. Подобное сведение удобнее всего проводить, когда соответствующие выражения будут регулярными. Поэтому предварительно целесообразно выполнить поворот Вика $\omega \rightarrow ip_3$, после которого уравнение (8) принимает вид

$$\phi(p_3) = q^2 \omega_0^2 \int \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3} \frac{\phi(p'_3)}{\left[p_3'^2 + \left(\frac{\mathbf{k}'^2}{2m} - \mu \right)^2 + \phi^2(p'_3) \right] [(p_3 - p'_3)^2 + \omega_0^2]}, \quad (11)$$

²⁾Интересно отметить, что именно для ВТСП можно было бы в некоторой степени восстановить “релятивистскую инвариантность”, если иметь в виду обмен не фононами, а магнонами, скорость которых в таких веществах в отличие от фононов довольно велика [1]. По крайней мере, если, используя разложение (10), мы положим $k_F/m \simeq c$, где c – скорость магнонов, то возможно аналитическое рассмотрение такой “релятивистской” модели с существующим в ней нетривиальным вакуумом. При этом соответствующее решение имело бы отношение только к системе с некоторой фиксированной (по сути, достаточно низкой) плотностью носителей.

где $\phi(p_3)$ является уже действительной функцией. Перейдя в полярную систему координат и выполнив интегрирование по углам, получим

$$\phi(p_3) = \frac{g^2 \omega_0^2}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} dp_3 \frac{\phi(p_3)}{(p_3 - p'_3)^2 + \omega_0^2} \int_0^{\infty} \frac{k' dk'}{\left(\frac{k'^2}{2m} - \mu\right)^2 + p_3'^2 + \phi^2(p'_3)}.$$

Заметив, что из (8) следует равенство $\phi(\omega) = \phi(-\omega)$, можем записать, что $\phi = \phi(\omega^2) = \phi(-p_3^2)$. Благодаря четности функции $\phi(p_3)$ область интегрирования по p_3 можно ограничить положительными значениями. Тогда, интегрируя в последнем уравнении по k' , получаем

$$\phi(p_3) = \frac{\lambda \omega_0^2}{2} \int_0^{\infty} \frac{dp'_3 \phi(p'_3)}{\sqrt{p_3'^2 + \phi^2(p'_3)}} \frac{1}{(p_3 - p'_3)^2 + \omega_0^2} \left[\frac{\pi}{2} + \arctg \frac{\mu}{\sqrt{p_3'^2 + \phi^2(p'_3)}} \right]. \quad (12)$$

Здесь введена безразмерная константа $\lambda = g^2 m / 2\pi$, через которую, как известно, выражается энергетическая щель в теории БКШ: $\Delta_{\text{БКШ}} = 2\omega_0 \exp(-1/\lambda)$. Из (12) можно найти асимптотическое поведение функции $\phi(p_3)$:

$$\phi(p_3)|_{p_3 \rightarrow 0} \sim \text{const}, \quad \phi(p_3)|_{p_3 \rightarrow \infty} \sim \frac{1}{p_3^2}. \quad (13)$$

Для преобразования интегрального уравнения в дифференциальное, которое уже допускает аналитическое исследование, область интегрирования по импульсам в (12) удобно [18] разбить на две части. В каждой из этих частей используется ашпроксимационная процедура для ядра, которой соответствует замена³⁾

$$\frac{1}{(p_3 - p'_3)^2 + \omega_0^2} \Rightarrow \frac{1}{p_3^2 + \omega_0^2} \theta(p_3 - p'_3) + \frac{1}{p_3'^2 + \omega_0^2} \theta(p'_3 - p_3). \quad (14)$$

Теперь переменные p_3 и p'_3 расцеплены, и последовательное дифференцирование (12) дает искомое дифференциальное уравнение вместе с граничными условиями. В результате первого дифференцирования находим

$$\phi'(p_3) = -\frac{\lambda \omega_0^2 p_3}{(p_3^2 + \omega_0^2)^2} \int_0^{p_3} \frac{dp'_3 \phi(p'_3)}{\sqrt{p_3'^2 + \phi^2(p'_3)}} \left[1 + \frac{2}{\pi} \arctg \frac{\mu}{\sqrt{p_3'^2 + \phi^2(p'_3)}} \right]. \quad (15)$$

³⁾ Хотя она более или менее надежно может быть обоснована лишь для асимптотических областей ($p_3 \gg p'_3$, $p_3 \ll p'_3$, $p_3 \sim p'_3 \ll 1$) изменения аргументов, в ряде случаев такая замена обеспечивает весьма высокую точность. В частности, в модели квантовой электродинамики имеется очень хорошее количественное совпадение найденного с помощью разбиения (14) аналитического решения с тем, которое получается численным интегрированием исходного уравнения типа (12) [19]. Это, в свою очередь, позволяет думать, что подобная процедура пригодна и в исследуемом случае. Как будет видно, окончательные результаты находятся в соответствии с численным анализом УЭ [23].

Отсюда видно, что $\phi' < 0$, т.е. $\phi_{\max} = \phi(0) \equiv \Delta$. Наконец, дифференцируя (15) еще раз и вводя новую переменную $x = p_3^2/\omega_0^2$, получим окончательно, что

$$\begin{aligned} \phi''(x) + \frac{2}{x+1}\phi'(x) + \frac{\lambda}{4\sqrt{x}(x+1)^2\sqrt{x + \left(\frac{\phi(x)}{\omega_0}\right)^2}} \times \\ \times \left[1 + \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\frac{\mu}{\omega_0}}{\sqrt{x + \left(\frac{\phi(x)}{\omega_0}\right)^2}} \right] \phi(x) = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Из (12) с учетом (14) и (15) находим также граничные условия

$$\phi'(x)|_{x=0} = 0, \quad [\phi(x) + (x+1)\phi'(x)]|_{x=\infty} = 0. \quad (17)$$

4. ПОЛУЧЕНИЕ И АНАЛИЗ РЕШЕНИЙ

Точное решение уравнения (16) с граничными условиями (17) для всех значений переменной получить в аналитической форме невозможно. Поэтому в соответствии с работами [18, 19] применим приближенный метод, который состоит в следующем. На первом этапе ищутся решения в областях $x \ll a$ и $x \gg a$, где a – некоторая характерная точка. На втором этапе решения в этой точке сшиваются. В качестве характерной точки может быть взята точка $a = (\phi(0)/\omega_0)^2 \equiv (\Delta/\omega_0)^2$ или $a = 1$. Причем очевидно, что сшивание необходимо производить в “меньшей” из этих точек. Тогда, предполагая сначала, что $\Delta/\omega_0 \ll 1$, получим решение уравнений (16), (17), проводя сшивание в точке $(\Delta/\omega_0)^2$.

После нахождения и сшивки этих решений требуется найти области значений концентрации n_f и константы связи λ , где найденный результат оказывается справедливым. Вся процедура повторяется при $1 \lesssim \Delta/\omega_0$, когда сшивание проводится в точке 1.

1. Случай $\Delta \ll \omega_0$.

1.1. В области $x \ll (\Delta/\omega_0)^2$ уравнение (16) сведется к уравнению

$$\phi''(x) + \frac{2}{x+1}\phi'(x) + \frac{\lambda\omega_0}{4\sqrt{x}(x+1)^2} \left(1 + \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\mu}{\Delta} \right) = 0, \quad (18)$$

решение которого с учетом граничного условия (17) в точке $x = 0$ имеет вид

$$\phi_{<}(x) = \Delta - \frac{\lambda\omega_0}{2} \left(1 + \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\mu}{\Delta} \right) \left(\operatorname{arctg} \sqrt{x} - \frac{\sqrt{x}}{1+x} \right). \quad (19)$$

Так как $x \leq (\Delta/\omega_0)^2 \ll 1$, то

$$\phi_{<}(x) \simeq \Delta - \frac{\lambda\omega_0}{3} \left(1 + \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\mu}{\Delta} \right) x^{3/2}. \quad (20)$$

1.2. В области $x \gg (\Delta/\omega_0)^2$ уравнение (16) сведется к уравнению

$$\phi''(x) + \frac{2}{x+1}\phi'(x) + \frac{\lambda}{4x(x+1)^2} \left(1 + \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\frac{\mu}{\omega_0}}{\sqrt{x}} \right) \phi(x) = 0. \quad (21)$$

Заметим, что, когда $\mu < 0$ и $|\mu| \geq \Delta$, член в квадратных скобках в (16) значительно отличается от 1. Поэтому здесь путем обобщения определения λ удобно ввести приближенную эффективную константу связи

$$\lambda^* = \lambda \left[1 + \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \left(\frac{\mu}{\Delta} \right) \theta(|\mu| - \Delta) \theta \left(\left(\frac{\mu}{\omega_0} \right)^2 - x \right) \right], \quad (22)$$

причем в точке сшиваия $\lambda^* = \lambda(1 + (2/\pi) \operatorname{arctg}(\mu/\Delta))$. При $x \gg (\Delta/\omega_0)^2$ с помощью замен $u = -1/x$, $\phi = u\varphi(u)$ (с учетом асимптотического поведения (13) при больших x функция $\varphi(u)$ стремится к 1 при $u \rightarrow 0$, тогда граничное условие (17) будет удовлетворяться автоматически) получим для этой области уравнение

$$\varphi''(u) + \frac{2(1-2u)}{u(1-u)}\varphi'(u) - \left[\frac{2}{u(1-u)} + \frac{\lambda^*}{4} \frac{1}{u(1-u)^2} \right] \varphi(u) = 0,$$

которое сводится к стандартному гипергеометрическому. Действительно, заменой $\varphi(u) = (1-u)^\beta f(u)$, $\beta = (-1 + \sqrt{1 + \lambda^*})/2$, оно преобразуется к уравнению

$$u(1-u)f'' + (2 - (4 + 2\beta)u)f' - (\beta^2 + 3\beta + 2)f = 0$$

для функции $f(u) = F(1 + \beta, 2 + \beta; 2; u)$.

Итак, решение в области $x \gg (\Delta/\omega_0)^2$ имеет вид

$$\phi_{>}(x) = Cx^{-1}(1+x^{-1})^\beta F(1 + \beta, 2 + \beta; 2; -x^{-1}). \quad (23)$$

1.3. Проведем сшивание $\phi_{<}$ и $\phi_{>}$ в точке $x = (\Delta/\omega_0)^2$. Используя асимптотическое представление для функции F при больших значениях аргумента [28], запишем

$$F(1 + \beta, 2 + \beta; 2; -x^{-1}) \simeq \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(2 + \beta)\Gamma(1 - \beta)} x^{1+\beta} [x\beta(\beta + 1)[\ln x + h_0] + 1], \quad (24)$$

где $h_0 = \Psi(2) + \Psi(1) - \Psi(2 + \beta) - \Psi(-\beta)$, $\Psi(y)$ — функция Эйлера. Подставляя теперь (24) в (23), из условий сшивки $\phi_{<}((\Delta/\omega_0)^2) = \phi_{>}((\Delta/\omega_0)^2)$, $\phi'_{<}((\Delta/\omega_0)^2) = \phi'_{>}((\Delta/\omega_0)^2)$ находим, что

$$C \simeq \Delta, \quad \ln \frac{\Delta}{\omega_0} - \frac{h_0}{2} + \frac{1}{4} = 0.$$

Рис. 1

Применяя формулу $\Psi(y) = \Psi(1-y) - \pi \operatorname{ctg}(\pi y)$, запишем величину h_0 в виде

$$h_0 = \Psi(2) + \Psi(1) - \Psi(2+\beta) - \Psi(1+\beta) - \pi \operatorname{ctg}(\pi\beta).$$

Отсюда следует, что небольшие изменения μ при $\beta \geq 1$ приводят к значительным изменениям Δ (котангенс испытывает бесконечные изменения в точках, где β — целое число). Это не может отвечать действительности, поэтому необходимо положить $\beta \ll 1$ или

$$\lambda \left(1 + \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\mu}{\Delta} \right) \ll 1. \quad (25)$$

Тогда $h_0 \simeq -1/\beta$ и условия гладкой сшивки окончательно дают

$$\Delta = \omega_0 \exp \left[-\frac{2}{\lambda} \left(1 + \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\mu}{\Delta} \right) \right]. \quad (26)$$

1.4. Теперь мы можем приступить к анализу найденных решений и выяснению характера зависимости $\Delta(\epsilon_F)$. Для этого прежде всего перейдем в (20) и (23) от евклидовой переменной $x = (p_3/\omega_0)^2$ к частоте ω , полагая при этом $x = -(\omega/\omega_0)^2$,

$$\begin{aligned} \phi_{<}(\omega) &= \Delta + \frac{i\lambda\omega_0}{3} \left(1 + \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\mu}{\Delta} \right) \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^3 \simeq \Delta, & \omega \leq \Delta, \\ \phi_{>}(\omega) &= -\Delta \left(\frac{\omega_0}{\omega} \right)^2 \left(1 - \left(\frac{\omega_0}{\omega} \right)^2 \right)^\beta F \left(1 + \beta, 2 + \beta; 2; \left(\frac{\omega_0}{\omega} \right)^2 \right), & \omega > \Delta, \end{aligned} \quad (27)$$

где величина Δ связана с μ и λ условием (26).

График зависимости $\Delta(\omega)$ ⁴⁾ для $\lambda = 0.3$ изображен на рис. 1. Эта зависимость имеет вид, качественно согласующийся с результатами численных решений [23]. Из рис. 1 и формул (27) видно, что при $\omega \leq \omega_0$ можно с хорошим приближением считать, что $|\phi(\omega)| = \Delta = \text{const}$. Сингулярное же поведение $\Delta(\omega)$ при $\omega = \omega_0$ связано с приближениями, использованными при сведении интегрального уравнения (12) к дифференциальному (16).

Если подставить теперь значение $\phi = \text{const}$ в уравнение (9), то это уравнение принимает стандартную форму [4, 5] $2\epsilon_F = \mu + \sqrt{\mu^2 + \Delta^2}$, откуда имеем

$$\mu = \epsilon_F - \frac{\Delta^2}{4\epsilon_F} \neq \epsilon_F. \quad (28)$$

В результате задача анализа зависимости Δ и μ от ϵ_F и λ свелась к анализу системы (26), (28). Из нее, в частности, видно, что при $\mu \gg \Delta$ (а значит, и $\epsilon_F \gg \Delta$) мы получаем с точностью до константы перед экспонентой результат теории БКШ: $\Delta = \omega_0 \exp(-1/\lambda)$. Отсутствие в правой части множителя 2 связано с тем, что данный метод, гарантируя правильные значения показателей экспонент, позволяет найти решение только с точностью до постоянного множителя порядка 1 перед экспонентой.

Подставляя теперь (28) в (26), находим

$$\epsilon_F = \frac{\Delta}{2} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2\lambda} \ln^{-1} \frac{\omega_0}{\Delta} \right). \quad (29)$$

Из (26) видно, что $0 \leq \Delta \leq \omega_0 \exp(-1/\lambda)$, и последняя формула свидетельствует о том, что с ростом ϵ_F щель Δ монотонно растет от 0 до максимального значения $\Delta_{\text{БКШ}}$ (рис. 2, где также взято значение $\lambda = 0.3$); это существенно отличается от теории с 4F-взаимодействием, где такое “насыщение” отсутствует и всегда $\Delta \sim \sqrt{\epsilon_F}$ [4, 5].

Найдем теперь области параметров λ и ϵ_F/ω_0 , для которых полученное решение справедливо. При $\lambda \ll 1$ из (26) видно, что условие $\Delta \ll \omega_0$ выполняется при произвольных значениях μ , а значит, и ϵ_F . Для выяснения допустимых значений ϵ_F при $\lambda \geq 1$ воспользуемся выражением (29). В этом случае аргумент тангенса мал и можно приближенно записать $(\epsilon_F/\omega_0)\lambda \simeq (\pi\Delta/4\omega_0) \ln(\omega_0/\Delta)$. Тогда из неравенства $\Delta \ll \omega_0$ следует, что $(\epsilon_F/\omega_0)\lambda \ll 1$.

Таким образом, мы показали, что решения (26), (28) для μ и Δ справедливы либо когда $\lambda \ll 1$, либо когда $\lambda \geq 1$, но $(\epsilon_F/\omega_0)\lambda \ll 1$.

2. Случай $\omega_0 \lesssim \Delta$. Напомним, что здесь сшивание решений производится в точке $x = 1$.

2.1. При $x \ll 1$, воспользовавшись результатами пункта 1, находим, что решение для $\phi_<(x)$ задается формулой (20).

⁴⁾ А именно эта величина имеет физический смысл, поскольку ею определяется, например, плотность состояний.

Рис. 2

2.2. Для $x \gg 1$ уравнение (16) сводится к виду

$$\phi''(x) + \frac{2}{x}\phi'(x) + \frac{\lambda}{4\sqrt{x^5}\sqrt{x + (\phi(x)/\omega_0)^2}} \left[1 + \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\frac{\mu}{\omega_0}}{\sqrt{x + \left(\frac{\phi(x)}{\omega_0}\right)^2}} \right] \phi(x) = 0.$$

После замен $y = x^{1/2}$, $\phi/\omega_0 = yf(y)$ оно принимает вид

$$y^2 f''(y) + 5y f'(y) + \left[3 + \frac{1}{y^2} \frac{\lambda \left(1 + \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg}(\mu \omega_0^{-1} y \sqrt{1 + f^2}) \right)}{\sqrt{1 + f^2}} \right] f(y) = 0. \quad (30)$$

Пренебрежем вторым членом в квадратных скобках (в допустимости этого убедимся, подставив полученное решение в выражение для этого члена и показав, что при $y \gg 1$ он мал).

В результате уравнение (30) сводится к уравнению Эйлера $y^2 f'' + 5y f' + 3f = 0$, решением которого является функция $f = (C_1/y^3) + (C_2/y)$. Тогда в области $x > 1$ имеем $\phi_> = Ax^{-1} + B$. Из граничного условия (17) при $x \rightarrow \infty$ находим, что $B = 0$.

2.3. Подставляя теперь $\phi_<(x)$ и $\phi_>(x)$ в условия гладкой сшивки в точке $x = 1$, получаем

$$A = \frac{\Delta}{2}, \quad \frac{\Delta}{\omega_0} = \frac{2\lambda}{3} \left(1 + \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\mu}{\Delta} \right). \quad (31)$$

Заметим, что уравнение (31) соответствует сильной электрон-фоонной связи, поскольку только для нее может выполняться соотношение $\omega_0 \leq \Delta$. Как легко при этом

Рис. 3

видеть, величина Δ оказывается пропорциональной⁵⁾ λ , хотя хорошо известно [10, 29], что в этом предельном случае $T_c \sim \sqrt{\lambda}$. Следует, однако, иметь в виду, что для сильной связи универсальность (т.е. $\Delta/T_c = \text{const}$) в поведении щели и критической температуры нарушается и приведенное отношение их величин само становится функцией константы связи [30]. Тем самым полученное для $T = 0$ поведение Δ не противоречит упомянутому результату для T_c , хотя, безусловно, поиск решения УЭ для предельно больших λ должен осуществляться с учетом всех необходимых перенормировок.

2.4. Как и в п. 1, после обратного перехода к частоте ω приходим к окончательному ответу

$$\begin{aligned} \phi_<(\omega) &= \Delta \left(1 + \frac{i}{2} \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^3 \right), & \omega \leq \omega_0, \\ \phi_>(\omega) &= -\frac{\Delta}{2} \left(\frac{\omega_0}{\omega} \right)^2, & \omega > \omega_0, \end{aligned} \quad (32)$$

где Δ удовлетворяет второму условию в (31).

График $\Delta(\omega)/\Delta$ (для $\lambda = 2$) представлен на рис. 3. Из него следует, что $|\phi(\omega)|$ начинает резко убывать при переходе ω через точку ω_0 . Разрыв решения в точке ω_0 обусловлен тем, что оно является не точным, а приближенным. Заметим, что численные решения [23] дают здесь немонотонное поведение.

Для выяснения концентрационной зависимости сверхпроводящих характеристик подставим выражение для $|\phi(\omega)|$ в уравнение (9). В соответствии с предположением, что

⁵⁾ Непосредственная проверка показала, что такая зависимость качественно не изменяется и при учете отличия перенормировочной функции $Z(p)$ в (2) от единицы.

$1 \lesssim \Delta/\omega_0$, будем считать в нем $\phi(\omega) = \phi_>(\omega)$. Тогда из (9) находим

$$\begin{aligned} \frac{\epsilon_F}{\omega_0} = & \theta(-\mu) \left(\frac{\Delta}{16\omega_0} \right)^{\frac{1}{3}} \int_{a(\Delta)}^{\infty} dx \left(\frac{x^3}{\sqrt{x^6-1}} - 1 \right) + \\ & + \theta(\mu) \left(\frac{\Delta}{16\omega_0} \right)^{\frac{1}{3}} \left[\int_1^{\infty} dx \left(\frac{x^3}{\sqrt{x^6-1}} - 1 \right) + \int_1^{a(\Delta)} dx \left(\frac{x^3}{\sqrt{x^6-1}} + 1 \right) \right], \end{aligned} \quad (33)$$

где $a(\Delta)$ задается уравнением

$$a^2(\Delta) = \left(\frac{\Delta}{\omega_0} \right)^{4/3} \text{ctg}^2 \frac{3\pi\Delta}{4\lambda\omega_0} + \frac{1}{a^4(\Delta)}, \quad (34)$$

мы воспользовались здесь также формулой (31) для $\mu = -\Delta \text{ctg}(3\pi\Delta/2\omega_0\lambda)$.

Из (33) легко показать, что как при $\mu \leq 0$, так и при $\mu > 0$ производная $d\epsilon_F/d\Delta > 0$ (при этом $0 \leq \Delta/\omega_0 \leq 4\lambda/3$, что является следствием (31)). Это означает, что с ростом n_f величина Δ растет и при $\epsilon_F/\omega_0 \rightarrow \infty$ выходит на постоянное значение $\Delta_{\text{strong}} = (4/3)\lambda\omega_0$.

Данное решение (т.е. $\omega_0 \lesssim \Delta$) справедливо, как отмечалось, в области параметров $1 \lesssim \lambda$, $1 \lesssim (\epsilon_F/\omega_0)\lambda$ или в области, где решение $\Delta \ll \omega_0$ неверно (см. конец пункта 1). В итоге можно говорить, что зависимость Δ от λ и ϵ_F/ω_0 найдена практически во всех актуальных областях параметров. Независимо от величины λ щель с ростом концентрации увеличивается от нуля до некоторого максимального значения. При $\lambda \ll 1$ таковым значением является $\Delta_{\text{БКШ}}$, а при $1 \lesssim \lambda - \Delta_{\text{strong}}$.

В заключение проанализируем поведение Δ и μ при низких концентрациях, когда $\mu < 0$, что фактически отвечает локальным парам. Область соответствующих n_f находится из уравнений (28), (29) и определяется неравенством $\epsilon_F \leq \omega_0 \exp(-2/\lambda)$. Как известно [4, 5], в случае 4F-взаимодействия справедливы соотношения

$$\Delta = \sqrt{2|\epsilon_b^{4F}|_{\epsilon_F}}, \quad \mu = -\frac{|\epsilon_b^{4F}|}{2} + \epsilon_F, \quad (35)$$

где $\epsilon_b^{4F} \equiv -2W \exp(-4\pi/mg_{4F})$ – энергия двухфермионного связанного состояния, W – ширина зоны проводимости, g_{4F} – константа связи. В случае косвенного взаимодействия μ в окрестности точки $\epsilon_F \sim |\epsilon_b^{\text{ph}}|/2$ имеет тот же (см. (35)) вид, но теперь

$$\epsilon_b^{\text{ph}} = -2\omega_0 \exp(-2/\lambda). \quad (36)$$

Область еще более низких концентраций ($\epsilon_F \ll |\epsilon_b^{\text{ph}}|/2$), как отвечающая случаю существенно локальных пар, где запаздывание не играет никакой роли, качественно должна описываться теми же зависимостями (35), которые прямо получены для незапаздывающего взаимодействия. Однако используемый метод (сшивка решений в точке Δ)

Рис. 4

оказывается в области предельно малых n_f неприменимым, поскольку при $\epsilon_F \rightarrow 0$ щель также исчезает ($\Delta \rightarrow 0$). Для столь низких значений концентрации ($\epsilon_F < |\epsilon_b^{\text{ph}}|/2$) приближенные зависимости Δ и μ от ϵ_F можно найти из интегральных уравнений (8) и (9), полагая в них $\Delta(\omega) = \text{const}$. Тогда их решение имеет тот же вид (35), что и для случая 4F-взаимодействия [16]. Следует при этом иметь в виду, что для отрицательных значений μ щелью в одночастичном ферми-спектре является не величина Δ , а величина $\Delta_g = \sqrt{\mu^2 + \Delta^2}$.

Таким образом, и для косвенного взаимодействия между носителями при достаточно малых их плотностях может быть реализован режим локальных пар. Переход к “купероподобной” ситуации спаривания ($\mu \simeq \epsilon_F$) с ростом ϵ_F происходит, однако, быстро из-за относительной малости энергии ϵ_b^{ph} , обусловленной притяжением.

Приведем, наконец, плотность электронных состояний, найденную по формуле $N(\omega) = \pi^{-1} \text{Im Tr } G(\omega)$, где $G(\omega) = (2\pi)^{-2} \int d\mathbf{k} G(\omega, \mathbf{k})$:

$$\frac{N(\omega)}{N(0)} = \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 - |\phi(\omega)|^2}} \theta(\omega - \bar{\Delta}_g),$$

здесь $\bar{\Delta}_g = \Delta$ при $\mu \geq 0$ и $\bar{\Delta}_g = \sqrt{\mu^2 + \Delta^2}$ при $\mu < 0$, а $N(0)$ – плотность состояний в нормальной фазе. Зависимость $N(\omega)/N(0)$ для разных констант связи представлена на рис. 4 и 5. На рис. 4 изображен вид плотности одночастичных состояний при $\mu < 0$ для различных констант связи при $\epsilon_F = 0.02\omega_0$; кривая 1 отвечает случаю $\lambda = 1$, кривая 2 – случаю $\lambda = 5$. На рис. 5 показана плотность одночастичных состояний в пределе БКШ ($\mu \simeq \epsilon_F$) для разных констант связи; кривая 1 отвечает случаю $\lambda = 0.3$, кривая 2 – случаю $\lambda = 1$, кривая 3 – случаю $\lambda = 5$. Отметим, что при $\mu < 0$ плотность состояний на границе энергетической щели Δ_g конечна. Когда же $\mu \geq 0$, плотность состояний

Рис. 5

на границе щели имеет стандартную для теории БКШ расходимость. С ростом λ плотность состояний в окрестности щели увеличивается. Увеличивается также и сама щель с ростом λ и ϵ_F , пока не достигнет своего максимального значения $\Delta_{\text{БКШ}}$.

5. ВЫВОДЫ

Приведенные выше результаты, хотя и получены для достаточно упрощенной модели, убедительно демонстрируют тесную связь характеристик сверхпроводимости с положением уровня Ферми ϵ_F по отношению к граничной частоте элементарных бозе-возбуждений ω_0 , которые отвечают за притяжение между электронами. Оказалось, что для низких плотностей носителей зависимость $\Delta(\epsilon_F)$, которая была получена в модели с запаздывающим локальным 4F-взаимодействием, является справедливой и для рассмотренной более реалистичной модели. Проанализирована зависимость величины энергетической щели от энергии бозе-частиц, и показано, что такая зависимость не ведет к принципиальным качественным изменениям в поведении системы. В итоге концентрационное поведение щели в сверхпроводнике с косвенным межфермионным взаимодействием для наиболее актуальных случаев слабой и промежуточной связей может быть представлено в простом виде (ср. (35)):

$$\Delta(\epsilon_F) = \begin{cases} \sqrt{2\epsilon_F|\varepsilon_b^{\text{ph}}|}, & \epsilon_F \ll \omega_0, \\ \sqrt{2\omega_0|\varepsilon_b^{\text{ph}}|} \equiv \Delta_{\text{БКШ}}, & \epsilon_F \gg \omega_0, \end{cases} \quad (37)$$

где $\varepsilon_b^{\text{ph}}$ — введенная в (36) энергия связанного двухфермионного состояния. Ее величина, как видно из (37), и определяет (в справедливом при $T = 0$ приближении самосогласованного поля) щель в одночастичном электронном спектре двумерного металла в области как малых ($\epsilon_F \ll |\varepsilon_b^{\text{ph}}|$), так и больших ($\epsilon_F \gg |\varepsilon_b^{\text{ph}}|$) концентраций n_f , когда $\mu > 0$.

Если же $\mu < 0$, то $\Delta \rightarrow \Delta_g = \epsilon_F + |\varepsilon_b^{\text{ph}}|/2$. Можно полагать, что в реальных (в частности, ВТСП) системах область $\epsilon_F \lesssim |\varepsilon_b^{\text{ph}}|$ оказывается не настолько широкой, чтобы в них реализовался режим, достаточно далекий от режима БКШ. Вероятнее всего, что этот режим является промежуточным в том смысле, что $\epsilon_F > |\varepsilon_b^{\text{ph}}|$, но еще существенно неравенство $\mu \neq \epsilon_F$. Что касается зависимости $T_c(\epsilon_F)$, особенно для двумерного, а также квазидвумерного случаев, то, несомненно, она требует своего отдельного изучения.

Кроме того, показано, что и в рамках модели с косвенным взаимодействием, когда энергия связи носителей уже не является полностью независимым параметром, эта энергия все же может обеспечить энергию связи пар, в принципе достаточную для наблюдения области существования их в локальном виде. Причем последнее, и это существенно, контролируется лишь средней плотностью носителей, а не поляронными либо би-поляронными эффектами, которые нами не рассматривались.

Вместе с тем в силу приближений, ставших необходимыми для получения аналитических результатов, некоторые вопросы остались нерешенными. Например, оказалось, что Δ как функция n_f достигает своего максимального значения при $\epsilon_F \gg \omega_0$, т.е. в области, где справедлива теория БКШ–Элиашберга. В связи с этим возникает непростой вопрос: в чем преимущество ВТСП, которое позволяет получать рекордные значения T_c при относительно небольших величинах ϵ_F — значительно более низких, чем в обычных низкотемпературных сверхпроводниках? Для ответа на этот вопрос и доказательства возможности того, что Δ больше, чем $\Delta_{\text{БКШ}}$, по-видимому, необходим учет вершинной функции [25, 26]. Другими словами, сохраняет актуальность непосредственная проверка справедливости теоремы Мигдала для области $\epsilon_F \sim \omega_0$, когда необходим учет и второго уравнения (для μ). С другой стороны, можно отметить методическую ценность использованного метода, а именно, возможность аналитического решения УЭ, что, хочется надеяться, окажется полезным в исследованиях по теории ВТСП.

Авторы выражают благодарность В. П. Гусынину за полезные обсуждения и консультации по методу, использованному в данной работе.

Список литературы

- [1] В. М. Локтев. ФНТ. 1996. Т. 22. № 1. С. 3.
- [2] M. R. Schafroth. Phys. Rev. 1954. V. 96. № 4. P. 1149; № 5. P. 1442; 1955. V. 100. № 2. P. 463.
- [3] Н. Н. Боголюбов. Изв. АН СССР. 1947. Т. 11. С. 77.
- [4] M. Randeria, J. Duan, L. Shieh. Phys. Rev. Lett. 1989. V. 62. № 9. P. 981; Phys. Rev. B. 1990. V. 41. № 1. P. 327.
- [5] Э. В. Горбар, В. П. Гусынин, В. М. Локтев. СФХТ. 1992. Т. 6. № 3. С. 483; ФНТ. 1993. Т. 19. № 11. С. 1183.
- [6] М. Е. Палиструант. ТМФ. 1996. Т. 109. № 1. С. 137.
- [7] R. Micnas, J. Ranninger, S. Robaszkiewicz. Rev. Mod. Phys. 1990. V. 62. № 1. P. 113.
- [8] M. Randeria. Crossover from BCS superconductivity to Bose–Einstein condensation. In: Bose–Einstein Condensation. Eds A. Griffin, D.W. Snoke, and S. Stringary. New York: Cambridge Univ. Press., 1995. P. 355.

- [9] *V. M. Loktev, S. G. Sharapov.* Superconductivity condensate formation in metallic systems with arbitrary carrier density. *Cond-mat/9706285*, 1997; *Cond. Mat. Phys.* 1997. № 11. P. 131.
- [10] *Л. Н. Булаевский, В. Л. Гинзбург, Г. Ф. Жарков, Д. А. Киржниц, Ю. В. Копаев, Е. Г. Максимов, Д. Н. Хомский.* Проблема высокотемпературной сверхпроводимости. Ред. В. Л. Гинзбург и Д. А. Киржниц. М.: Наука, 1977.
- [11] *В. Л. Гинзбург, Е. Г. Максимов.* СФХТ. 1992. Т. 5. С. 1543.
- [12] *Н. М. Плакида.* Высокотемпературные сверхпроводники. М.: Изд-во "Международная программа образования", 1996.
- [13] *D. Pines.* *Tr. J. Phys.* 1996. V. 20. № 6. P. 535.
- [14] *Yu. B. Gaididei, V. M. Loktev.* *Phys. Stat. Sol. b.* 1988. V. 147. № 2. P. 307; *W. Weber.* *Z. Phys.* 1988. Bd 70. № 2. S. 323.
- [15] *Э. А. Пашицкий.* ФНТ. 1995. Т. 21. № 10. С. 995; № 11. С. 1091.
- [16] *В. М. Локтев, С. Г. Шарапов.* ФНТ. 1996. Т. 22. № 3. С. 211.
- [17] *Г. М. Элиашберг.* ЖЭТФ. 1960. Т. 38. № 3. С. 966.
- [18] *T. Appelquist, M. Bowich, D. Karabali, L. C. R. Wijewardhara.* *Phys. Rev. D.* 1986. V. 33. № 10. P. 3704.
- [19] *V. P. Gusynin, V. A. Miransky, I. A. Shovkovy.* *Nucl. Phys. B.* 1996. V. 462. № 1–3. P. 249.
- [20] *А. А. Абрикосов, Л. П. Горьков, И. Е. Дзялошинский.* Методы квантовой теории поля в статистической физике. М.: Наука, 1962.
- [21] *Дж. Шриффер.* Теория сверхпроводимости. М.: Наука, 1970.
- [22] *E. H. Simmons.* *Phys. Rev. D.* 1990. V. 42. № 8. P. 2933; *T. Kugo, M. J. Mitchard.* *Phys. Lett. B.* 1992. V. 282. № 1. P. 162.
- [23] *J. P. Carbotte.* *Rev. Mod. Phys.* 1990. V. 62. № 4. P. 1027.
- [24] *А. Б. Муздал.* ЖЭТФ. 1958. Т. 34. № 6. С. 1438.
- [25] *M. A. Ikeda, A. Ogasawara, M. Sugihara.* *Phys. Lett. A.* 1992. V. 170. № 4. P. 319.
- [26] *L. Pietronero, S. Strassler.* *Europhys. Lett.* 1992. V. 18. № 7. P. 627; *S. Grimadi, L. Pietronero, S. Strassler.* *Phys. Rev. Lett.* 1995. V. 75. № 7. P. 1158.
- [27] *P. Morel, P. W. Anderson.* *Phys. Rev.* 1962. V. 125. № 4. P. 1263.
- [28] *Г. Бейтмен, А. Эрдейи.* Высшие трансцендентные функции. Т. 1. М.: Наука, 1973.
- [29] *С. В. Вонсовский, Ю. А. Изюмов, Е. З. Курмаев.* Сверхпроводимость переходных металлов, их сплавов и соединений. М.: Наука, 1977.
- [30] *Б. Т. Гейликман, В. З. Кресин.* ФТТ. 1965. Т. 7. Вып. 11. С. 3294.

Поступила в редакцию 17.IX.1997 г.
после доработки 14.I.1998 г.