Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Х. Райбонгши, Точно решаемые потенциалы и решения для связанных состояний уравнения Шредингера в D -мерном пространстве с зависящей от координат массой, *ТМФ*, 2015, том 184, номер 1, 117–133

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8841>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.27.143

26 апреля 2023 г., 16:45:46

© 2015 г.

Х. Райбонгши*

ТОЧНО РЕШАЕМЫЕ ПОТЕНЦИАЛЫ И РЕШЕНИЯ ДЛЯ СВЯЗАННЫХ СОСТОЯНИЙ УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА В D -МЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ С ЗАВИСЯЩЕЙ ОТ КООРДИНАТ МАССОЙ

Метод преобразования, использующий свойства классических ортогональных полиномов, предлагается для построения точно решаемых потенциалов, которые порождают решения для связанных состояний уравнения Шредингера в D -мерном пространстве с зависящей от координат массой. Важной чертой метода является то, что в нем в случае радиально-симметричных массовой функции и потенциала предпочтительным является упорядочение неоднозначностей Жу–Кремера. Это поясняется примером использования гипергеометрических полиномов и присоединенных полиномов Лежандра.

Ключевые слова: зависящая от координат масса, классический ортогональный полином, точно решаемый потенциал, расширенное преобразование, уравнение Шредингера.

DOI: 10.4213/tmf8841

1. ВВЕДЕНИЕ

Волновое уравнение Шредингера в нерелятивистской квантовой механике полностью описывает динамическое поведение микроскопической системы. Но уравнение Шредингера можно решить аналитически только для ограниченного числа известных физических потенциалов. Поэтому приходится обращаться к различным приближенным методам, таким как теория возмущений, вариационная техника, приближение ВКБ и т. д. Однако эти приближенные методы хорошо применимы только в том случае, когда нерешаемый потенциал очень близок к некоторому точно решаемому. Этот факт требует разработки других методов генерации и построения всё большего числа точно решаемых потенциалов (ТРП) с целью упрощения квантово-механических вычислений.

Изучение квантовых систем с зависящей от координат массой привлекает внимание ученых [1]–[12]. Данное направление развивается в связи с его широким применением в физике конденсированного состояния, в науке о материалах, в ядерной

*Physics Department, Nalbari College, Nalbari, Assam, India.
E-mail: hansrajb12345@gmail.com

физике и т. д. Особое применение уравнение Шредингера с зависящей от координат массой нашло в исследовании электронных свойств полупроводников [13], в теориях квантовых точек, квантовых ям [14], [15] и квантовых жидкостей [16], в ядерной задаче многих тел [17] и пр.

Давно возникшей проблемой модели с зависящей от координат массой является способ упорядочения неоднозначностей, появляющихся из-за некоммутативности между массой и импульсом в определении оператора кинетической энергии, что приводит к неэрмитову гамильтониану. Чтобы сделать гамильтониан с массой, зависящей от координат, эрмитовым, фон Роос в работе [3] предложил оператор кинетической энергии вида

$$T = \frac{1}{4}[m^\alpha \vec{\nabla} m^\beta \vec{\nabla} m^\gamma + m^\gamma \vec{\nabla} m^\beta \vec{\nabla} m^\alpha], \quad (1)$$

где $m = m(\vec{r})$ – масса и α, β, γ – параметры неоднозначности (которая называется неоднозначностью фон Рооса); на эти параметры налагается ограничение

$$\alpha + \beta + \gamma = -1. \quad (2)$$

Используя выражение (1), можно записать эффективный гамильтониан с зависящей от координат массой в виде

$$H^{\text{eff}}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} \left[\frac{1}{m(\vec{r})} \vec{\nabla} \right] + V^{\text{eff}}(\vec{r}), \quad (3)$$

где

$$V^{\text{eff}}(\vec{r}) = V(\vec{r}) + U_{\alpha\beta}(\vec{r}) \quad (4)$$

и $V(\vec{r})$ – действительный потенциал, а $U_{\alpha\beta}(\vec{r})$ – модификация потенциала, возникающая вследствие зависимости массы от координат, заданная как

$$U_{\alpha\beta}(\vec{r}) = \frac{1}{2}(\beta + 1) \frac{m''(\vec{r})}{m^2(\vec{r})} - [\alpha(\alpha + \beta + 1) + \beta + 1] \frac{(m'(\vec{r}))^2}{m^3(\vec{r})}, \quad (5)$$

где штрих означает производную функции по ее аргументу. Различный выбор значений параметров порождает различные гамильтонианы. Перечислим различные упорядочения, которые можно найти в литературе: $\alpha = -1, \beta = \gamma = 0$ (упорядочение Горы–Уильямса [4]); $\alpha = \gamma = 0, \beta = -1$ (упорядочение Бен-Даниеля–Дьюка [2]); $\alpha = \gamma = -1/2, \beta = 0$ (упорядочение Жу–Кремера [5]); $\beta = \gamma = -1/2, \alpha = 0$ (упорядочение Ли–Куна [6]); $\alpha = \gamma = -1/4, \beta = -1/2$ (упорядочение Мустафы–Мажаримусави [11]).

Присущая уравнению Шредингера неоднозначность и зависимость массы от координат усложняют решение этого уравнения по сравнению с решениями обычных (с постоянной массой) уравнений Шредингера. Для решения уравнения Шредингера с массой, зависящей от координат, применяются различные методы, в литературе можно найти каноническое точечное преобразование [9], [18]–[22], метод Никифорова–Уварова [23]–[25], суперсимметричный подход [26], [27], метод квадратичной алгебры [28], аналитический метод [29], поиск решений в виде ряда [30], методы преобразований Дарбу [31], [32], сплетающих операторов [33], восстановления волновых пакетов [34], $\hbar$ -разложение [35], метод расширенного преобразования [12]

и т. д. Во всех этих случаях волновые функции выражаются через классические ортогональные полиномы (КОП). Фактически оказывается, что КОП играют важную роль с самого зарождения квантовой механики, поскольку через эти полиномы выражаются собственные функции связанных состояний.

В настоящей работе мы применяем метод преобразования к дифференциальному уравнению второго порядка, которому подчиняются КОП, для построения ТРП, приводящих к решениям для связанных состояний уравнения Шредингера в D -мерном евклидовом пространстве с массой, зависящей от координат, при различных массовых функциях. Важным свойством метода является тот факт, что он отдает предпочтение упорядочению Жу–Кремера в случае радиально-симметричных массовой функции и потенциала.

Мы применяем метод расширенного преобразования [12], [36], включающий в себя преобразование координат и последующее функциональное преобразование, к дифференциальному уравнению второго порядка, которому подчиняются КОП. Основным является преобразование координат,

$$r \rightarrow g(r), \quad (6)$$

а функциональное преобразование представляет собой преобразование известного КОП $Q_n^l(r)$ в волновую функцию новой системы

$$\psi(r) = f(r)^{-1} Q_n^l(g(r)). \quad (7)$$

Чтобы сохранить непротиворечивость D -мерного уравнения Шредингера с массой, зависящей от координат, $f(r)$ в преобразованном уравнении определим как функцию переменных $r^{(D-1)/2}$, $m(r)$, $g'(r)$ и $M(g)$, где $M(g)$ – характеристическая функция рассматриваемого КОП. Здесь $M(g)$ – известная функция, $m(r)$ и $g(r)$ неизвестны.

На первом этапе массовая функция $m(r)$ берется в виде функции от $g(r)$, что приводит к зависимости массовой функции системы от координат, и, следовательно, потенциал системы становится зависящим от массы. После этого полученное преобразованное уравнение можно свести к дифференциальному уравнению второго порядка, некоторые члены которого содержат функцию $g(r)$ или ее производные высших порядков. Чтобы придать этому уравнению форму радиального уравнения Шредингера в D -мерном евклидовом пространстве с массой, зависящей от координат, один из членов, содержащих $g(r)$ или ее производную, полагается равным константе, что является неотъемлемой частью данного метода. В конечном итоге постоянный член дает собственные энергии E_n полученной системы. Это также порождает еще одно дифференциальное уравнение на $g(r)$, из которого мы получаем функциональный вид $g(r)$, а затем и массовой функции $m(r)$. После этого оставшиеся члены в преобразованном уравнении, которые зависят от r , перестраиваются так, чтобы образовался эффективный потенциал. Из него получают действительный потенциал и модификация потенциала порожденной системы. Уравнение (7) используется для расчета волновых функций порожденной системы. Условие нормируемости волновой функции определяет область изменения l и n в КОП $Q_n^l(r)$ и налагает ограничения на выбор функции $m(g(r))$. Используя подходящий выбор функции $m(g(r))$ и индексов l и n полинома $Q_n^l(r)$, можно получить нормированную волновую функцию.

План настоящей статьи таков. В разделе 2 продемонстрирована процедура построения ТРП с массой, зависящей от координат, на основе свойств КОП. Нормируемость собственных функций полученных новых систем описана в разделе 3. Некоторые примеры новых ТРП с массой, зависящей от координат, которые построены на основе гипергеометрических полиномов и присоединенных полиномов Лежандра, даны в разделе 4. Наконец, выводы и полученные результаты представлены в разделе 5.

2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФОРМУЛИРОВКА

D -мерное радиальное уравнение Шредингера с зависящей от координат массой и радиально-симметричными массовой функцией и потенциалом может быть записано как [11] (здесь $2m_0 = \hbar = 1$)

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} - \frac{m'(r)}{m(r)} \left(\frac{d}{dr} - \frac{D-1}{2r} \right) - \frac{l_D(l_D+1)}{r^2} + m(r)(E_n - V^{\text{eff}}(r)) \right] R_{n_r, l_D}(r) = 0, \quad (8)$$

где $l_D = l + (D-3)/2$ для $D \geq 2$, l – орбитальное квантовое число, $n_r = 0, 1, 2, \dots$ – радиальное квантовое число, $m(r)$ – безразмерная массовая функция, связанная с массой $m(r)$, зависящей от координат, соотношением $m(r) = m_0 m(r)$, где m_0 – постоянная масса, $R_{n_r, l_D}(r)$ – радиальные волновые функции, E_n – собственные энергии и $V^{\text{eff}}(r)$ – эффективный потенциал, имеющий вид

$$V^{\text{eff}}(r) = V(r) + U_{\alpha\beta}(r). \quad (9)$$

Здесь $V(r)$ – действительный потенциал со сферически-симметричным профилем, а $U_{\alpha\beta}(r)$ – модификация потенциала, зависящая от радиально-симметричной массовой функции $m(r)$ и имеющая вид

$$U_{\alpha\beta}(r) = \frac{1}{2}(\beta+1) \frac{m''(r)}{m^2(r)} - [\alpha(\alpha+\beta+1) + \beta+1] \frac{(m'(r))^2}{m^3(r)}. \quad (10)$$

Радиальные волновые функции $R_{n_r, l_D}(r)$ связаны с полными волновыми функциями $\chi(\vec{r})$ следующим образом:

$$\chi(\vec{r}) = r^{-(D-1)/2} R_{n_r, l_D}(r) Y_{l_D, m_D}(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{D-2}, \phi). \quad (11)$$

Подставив в уравнение (8) радиальные волновые функции вида

$$R_{n_r, l_D}(r) = r^{(D-1)/2} \psi(r), \quad (12)$$

получим следующее уравнение:

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} - \left(\frac{m'(r)}{m(r)} - \frac{D-1}{r} \right) \frac{d}{dr} - \frac{l(l+D-2)}{r^2} + m(r)(E - V^{\text{eff}}(r)) \right] \psi(r) = 0. \quad (13)$$

Уравнение (13) представляет собой радиальное уравнение Шредингера в D -мерном евклидовом пространстве с зависящей от координат массой.

Начнем с общей формы дифференциального уравнения по переменной r , которому удовлетворяют КОП $Q_n^l(r)$:

$$\frac{Q''(r)}{Q(r)} + M(r) \frac{Q'(r)}{Q(r)} + J_{n,l}(r) = 0. \quad (14)$$

Применение преобразований (6) и (7) к уравнению (14) дает

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \left(\frac{d}{dr} \ln \left\{ f^2(r)(g')^{-1} \exp \int M(g) dg \right\} \right) \frac{d}{dr} + \right. \\ \left. + \left\{ \frac{d}{dr} \ln f(r) \right\} \left\{ \frac{d}{dr} \ln \left(f'(r)(g')^{-1} \exp \int M(g) dg \right) \right\} + (g')^2 J_{n,l}(g) \right] \psi(r) = 0. \quad (15)$$

Чтобы придать уравнению (15) вид D -мерного радиального уравнения Шредингера с массой, зависящей от координат, т. е. переписать его в виде (13), мы должны потребовать, чтобы коэффициент перед $\frac{d\psi}{dr}$ удовлетворял равенству

$$\frac{d}{dr} \ln \left\{ f^2(r)(g')^{-1} \exp \int M(g) dg \right\} = - \left(\frac{m'(r)}{m(r)} - \frac{D-1}{r} \right), \quad (16)$$

откуда получим

$$f(r) = N r^{(D-1)/2} \left(\frac{g'(r)}{m(r)} \right)^{1/2} \exp \left(- \int M(g) dg \right)^{1/2}, \quad (17)$$

где постоянная интегрирования N играет роль нормировочной константы для волновой функции порожденной системы. Таким образом, уравнение (15) принимает вид

$$\frac{\psi''(r)}{\psi(r)} - \left(\frac{m'(r)}{m(r)} - \frac{D-1}{r} \right) \frac{\psi'(r)}{\psi(r)} + \\ + m(r) \left[\frac{1}{2m(r)} \{g, r\} - \frac{(g')^2}{4m(r)} (M^2(g) + 2M'(g) - 4J_{n,l}(g)) + \right. \\ \left. + \frac{(D-1)(D-3)}{4r^2 m(r)} - \left(\frac{D-1}{2r} \right) \frac{m'(r)}{m^2(r)} - \frac{1}{2} \frac{m''(r)}{m^2(r)} + \frac{3}{4} \frac{(m'(r))^2}{m^3(r)} \right] = 0, \quad (18)$$

где

$$\{g, r\} = \frac{g'''(r)}{g'(r)} - \frac{3}{2} \left(\frac{g''(r)}{g'(r)} \right)^2 \quad (19)$$

означает производную Шварца.

Интересно отметить, что два последних члена в квадратных скобках в левой части уравнения (18) в совокупности напоминают выражение для модификации потенциала, заданное формулой (10). Поэтому мы определим модификацию потенциала выражением

$$U_{\alpha\beta}(r) = \frac{1}{2} \frac{m''(r)}{m^2(r)} - \frac{3}{4} \frac{(m'(r))^2}{m^3(r)}. \quad (20)$$

Тогда уравнение (18) примет вид

$$\frac{1}{m(r)} \frac{\psi''(r)}{\psi(r)} - \frac{1}{m(r)} \left(\frac{m'(r)}{m(r)} - \frac{D-1}{r} \right) \frac{\psi'(r)}{\psi(r)} + \\ + \left[\frac{1}{2m(r)} \{g, r\} - \frac{(g')^2}{4m(r)} (M^2(g) + 2M'(g) - 4J_{n,l}(g)) + \right. \\ \left. + \frac{(D-1)(D-3)}{4r^2 m(r)} - \left(\frac{D-1}{2r} \right) \frac{m'(r)}{m^2(r)} - U_{\alpha\beta}(r) \right] = 0. \quad (21)$$

Характеристические функции $M(g)$ и $J_{n,l}(g)$ в уравнении (21) определяются выбором конкретного КОП для построения ТРП, а две другие функции в этом уравнении, а именно $g(r)$ и $m(r)$, остаются неизвестными.

Возьмем $m(r)$ в виде функции от $g(r)$; это делает потенциал зависящим от массы. При этом многочлен в квадратных скобках в уравнении (21) становится функцией от $g'''(r)$, $g''(r)$, $g'(r)$ и $g(r)$. Чтобы преобразовать уравнение (21) к виду уравнения Шредингера с массой, зависящей от координат, необходимо представить это выражение в виде $E_n - V^{\text{eff}}(r)$. Это достигается приравниванием одного из членов выражения постоянной величине. Постоянный член в конечном итоге даст собственные энергии E_n . Это также приводит к дифференциальному уравнению на $g(r)$, решение которого определяет функциональный вид зависимости $g(r)$, а затем и массовой функции $m(r)$. Тогда остальные зависящие от r члены в этом выражении можно перегруппировать и получить эффективный потенциал $V^{\text{eff}}(r)$, включающий в себя действительный потенциал $V(r)$ и модификацию потенциала $U_{\alpha\beta}(r)$. В большинстве случаев $V(r)$ остается потенциалом Штурма, т. е. он зависит от квантового числа n .

В некоторых случаях потенциал Штурма можно преобразовать к нормальной форме, перегруппировав различные параметры потенциала. Эта процедура позволяет нам изменить вид уравнения (21) и привести его к стандартному радиальному уравнению Шредингера в D -мерном евклидовом пространстве с массой, зависящей от координат, с ТРП, для которого имеются собственные энергии и нормированные собственные функции при выбранной массовой функции. Эта процедура в развернутой форме применяется для получения новых ТРП с использованием гипергеометрических полиномов в случае $m(r) = g(r)$. Вычислительную схему построения новых ТРП можно повторить, используя присоединенные полиномы Лежандра, полагая при этом $m(g) = 1 - g^2(r)$ или $m(g) = 1/(1 - g^2(r))$.

Значения параметров неоднозначности. Сравнивая уравнения (10) и (20), получим $\beta = 0$ и $\alpha = \gamma = -1/2$. Это упорядочение Жу–Кремера. Мы рассматриваем только квантовые системы, которые характеризуются центральным потенциалом и радиально-симметричной массовой функцией, и приходим к выводу, что в этом случае наш метод естественным образом отдает предпочтение упорядочению неоднозначностей Жу–Кремера [12].

3. НОРМИРУЕМОСТЬ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ДЛЯ НОВЫХ ТРП

Из уравнения (7) с помощью равенства (17) получим волновую функцию порождающей системы в виде

$$\psi(r) = N r^{-(D-1)/2} \left(\frac{m(r)}{g'(r)} \right)^{1/2} \exp \left(\int M(g) dg \right)^{1/2} Q_n^l(g). \quad (22)$$

Весовая функция $W(g)$ и вспомогательная функция $S(g)$ для конкретного КОП связаны с $M(g)$ соотношением

$$M(g) = \frac{d}{dg} \ln S(g) W(g), \quad (23)$$

в котором выражения для $M(g)$ и $W(g)$ известны и, следовательно, $S(g)$ можно найти. Подставляя равенство (23) в выражение (22), получим

$$\psi(r) = Nr^{-(D-1)/2} \left(\frac{m(r)}{g'(r)} \right)^{1/2} (W(g)S(g))^{1/2} Q_n^l(g). \quad (24)$$

Нормируемость функции $\psi(r)$ требует выполнение условия

$$\int_{g^{-1}(\theta_1)}^{g^{-1}(\theta_2)} r^{-(D-1)} \frac{m(r)}{g'(r)} W(g)S(g) (Q_n^{l'}(g))^2 r^{D-1} dr = \rho < \infty, \quad (25)$$

где $[\theta_1, \theta_2]$ – область определения полинома $Q_n^l(r)$. Это условие можно переписать в виде

$$\rho = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{W(g)S(g)}{G(g)} [Q_n^{l'}(g)]^2 dg, \quad (26)$$

где

$$G(g(r)) = (g')^2 m^{-1}(r) = (g')^2 m^{-1}(g(r)) \quad (27)$$

есть функция от $g(r)$, а l' – параметр, который задается так, чтобы значение ρ было конечным. Функция $m(g(r))$ выбирается таким образом, чтобы функция $G(g(r))$ и характеристические функции $S(g)$ и $W(g)$ содержали похожие множители вида некоторых степеней g , т. е., например,

$$\rho = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{S(g, l_1)W(g, l_2)}{G(g, l_3)} [Q_n^{l'}(g)]^2 dg. \quad (28)$$

Выбирая соответствующие значения параметров l_1 , l_2 и l_3 при конкретном значении l (где $l = l(l_1, l_2, l_3)$), можно восстановить весовую функцию $W(g, l)$. Таким образом, формула (28) преобразуется к виду

$$\rho = \int_{\theta_1}^{\theta_2} W(g, l) [Q_n^{l'}(g)]^2 dg. \quad (29)$$

После этого мы согласуем значение l' с l , чтобы получить конечное значение ρ , необходимое для нормировки функции $\psi(r)$. Более подробное изложение читатель может найти в работе [37] и имеющихся там ссылках.

4. ПРИМЕРЫ

4.1. Построение ТРП с помощью КОП, имеющего вид гипергеометрической функции. Рассмотрим

$$Q(g) = {}_2F_1(a, b, c; g), \quad (30)$$

т. е. предположим, что $Q(g)$ представляет собой гипергеометрическую функцию, для которой характеристические функции $M(g)$ и $J_n(g)$ заданы выражениями

$$M(g) = \frac{c - (a + b + 1)g}{g(1 - g)}, \quad (31)$$

$$J_n(g) = -\frac{ab}{g(1 - g)}. \quad (32)$$

Тогда из уравнения (21) получим следующее уравнение:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{m(r)} \frac{\psi''(r)}{\psi(r)} - \frac{1}{m(r)} \left(\frac{m'(r)}{m(r)} - \frac{D-1}{r} \right) \frac{\psi'(r)}{\psi(r)} + \\ & + \left\{ \frac{1}{2} \frac{g'''}{m(r)g'} - \frac{3}{4m(r)} \left(\frac{g''}{g'} \right)^2 - \frac{(g')^2}{m(r)g} \left[\frac{c}{2}(c-a-b-1) + ab \right] - \frac{(g')^2}{m(r)g^2} \frac{c(c-2)}{4} - \right. \\ & - \frac{(g')^2}{m(r)(1-g)} \left[\frac{c}{2}(c-a-b-1) + ab \right] - \frac{(g')^2}{m(r)(1-g)^2} \frac{(a+b-c)^2-1}{4} + \\ & \left. + \frac{(D-1)(D-3)}{4m(r)r^2} - \left(\frac{D-1}{2r} \right) \frac{m'(r)}{m^2(r)} - U_{\alpha\beta}(r) \right\} = 0. \end{aligned} \quad (33)$$

Выберем $m(r) = g(r)$, при этом уравнение (33) сводится к виду

$$\begin{aligned} & \frac{1}{m(r)} \frac{\psi''(r)}{\psi(r)} - \frac{1}{m(r)} \left(\frac{m'(r)}{m(r)} - \frac{D-1}{r} \right) \frac{\psi'(r)}{\psi(r)} + \\ & + \left\{ \frac{1}{2} \frac{g'''}{gg'} - \frac{3}{4g} \left(\frac{g''}{g'} \right)^2 - \frac{(g')^2}{g} \left[\frac{c}{2}(c-a-b-1) + ab + \frac{(a+b-c)^2-1}{4} \right] - \right. \\ & - \left(\frac{g'}{g} \right)^2 \left[\frac{c}{2}(c-a-b-1) + ab \right] - \frac{(g')^2}{g^3} \frac{c(c-2)}{4} - \\ & - \frac{(g')^2}{1-g} \left[\frac{c}{2}(c-a-b-1) + ab + \frac{(a+b-c)^2-1}{4} \right] - \frac{(g')^2}{(1-g)^2} \frac{(a+b-c)^2-1}{4} + \\ & \left. + \frac{(D-1)(D-3)}{4m(r)r^2} - \left(\frac{D-1}{2r} \right) \frac{m'(r)}{m^2(r)} - U_{\alpha\beta}(r) \right\} = 0. \end{aligned} \quad (34)$$

Приравняем теперь постоянной величине один из членов уравнения (34), содержащих $g(r)$ или ее производные. Это позволит нам найти выражение для собственных энергий E_n , вид зависимости $g(r)$, массовую функцию $m(r)$ и, следовательно, ТРП $V(r)$ вместе с соответствующими волновыми функциями $\psi(r)$.

СЛУЧАЙ 1. Выберем

$$\frac{(g')^2}{g} = k_1^2, \quad (35)$$

где k_1^2 – действительная положительная постоянная, не зависящая от r . Уравнение (35) приводит к

$$g(r) = \frac{k_1^2}{4} r^2 \quad (36)$$

и массовой функции

$$m(r) = \frac{k_1^2}{4} r^2. \quad (37)$$

При этом уравнение (34) принимает вид

$$\frac{d^2\psi(r)}{dr^2} - \left(\frac{m'(r)}{m(r)} - \frac{D-1}{r} \right) \frac{d\psi(r)}{dr} + m(r)(E_a - V^{\text{eff}}(r))\psi(r) = 0, \quad (38)$$

где

$$E_a = -k_1^2 \left[\frac{c}{2}(c-a-b-1) + ab + \frac{(a+b-c)^2 - 1}{4} \right], \quad (39)$$

$$V^{\text{eff}}(r) = V(r) + U_{\alpha\beta}(r) + \left(\frac{D-1}{2r} \right) \frac{m'(r)}{m^2(r)} \quad (40)$$

и

$$\psi(r) = N r^{c+1-D/2} \left(1 - \frac{k_1^2 r^2}{4} \right)^{(a+b-c+1)/2} {}_2F_1 \left(a, b, c; \frac{k_1^2 r^2}{4} \right). \quad (41)$$

В данном случае

$$\begin{aligned} V(r) = & \left[\frac{c}{2}(c-a-b-1) + ab \right] \frac{4}{r^2} + \\ & + \left[\frac{c}{2}(c-a-b-1) + ab + \frac{(a+b-c)^2 - 1}{4} \right] \frac{k_1^4 r^2}{4(1 - k_1^2 r^2/4)} + \\ & + \frac{(a+b-c)^2 - 1}{4} \frac{k_1^4 r^2}{4(1 - k_1^2 r^2/4)^2} + \left[c(c-2) + \frac{3}{4} - \frac{(D-1)(D-3)}{4} \right] \frac{1}{m(r)r^2}, \end{aligned} \quad (42)$$

а модификация потенциала имеет вид

$$U_{\alpha\beta}(r) = -\frac{2}{r^2} \frac{1}{m(r)}. \quad (43)$$

Заменяем b на $b-a$ и положим $a = -n$, где n – положительное целое число; это превращает гипергеометрическую функцию в полином по r^2 . Взяв $k_1 = 2$, получим собственные энергии

$$E_n = E_{-a} = 4[n(n+b) - A - B], \quad (44)$$

потенциал

$$\begin{aligned} V(r) = & [A - n(n+b)] \frac{4}{r^2} + [A + B - n(n+b)] \frac{4r^2}{1-r^2} + \\ & + \frac{4Br^2}{(1-r^2)^2} + \left[c(c-2) + \frac{3}{4} - \frac{(D-1)(D-3)}{4} \right] \frac{1}{m(r)r^2} \end{aligned} \quad (45)$$

и собственные функции порожденной системы

$$\psi(r) = N r^{c+1-D/2} (1-r^2)^{(b-c+1)/2} {}_2F_1(-n, n+b, c; r^2), \quad (46)$$

где $b-c+1 \geq 0$, $A = c(c-b-1)/2$ и $B = [(b-c)^2 - 1]/4$ (см. рис. 1). Однако эта квантовая система остается системой Штурма, поскольку невозможно привести потенциал к нормальной форме. Следует отметить, что слагаемое

$$\left[c(c-2) + \frac{3}{4} - \frac{(D-1)(D-3)}{4} \right] \frac{1}{m(r)r^2}$$

Рис. 1. Потенциал Штурма $V(r)$ (случай 1) вместе с волновой функцией $\psi(r)$ и массовой функцией $m(r)$; в качестве КОП используется гипергеометрический полином при $D = 3$, $b = 1$, $c = -0.1$, $n = 0$, $k_1 = 2$. Масштаб рисунка произволен.

в выражении (45) дает правильный член, соответствующий центробежному барьеру $l(l + D - 2)/m(r)r^2$ для системы в D -мерном евклидовом пространстве с зависящей от координат массой при $c = l + D/2$.

СЛУЧАЙ 2. В качестве второго варианта выбора положим равным не зависящей от r константе следующий член уравнения (34):

$$\frac{(g')^2}{g^2} = k_2^2. \quad (47)$$

Это приводит к

$$g(r) = e^{-k_2 r} \quad (48)$$

и массовой функции

$$m(r) = e^{-k_2 r}. \quad (49)$$

Тогда уравнение (34) можно представить в виде

$$\frac{d^2 \psi(r)}{dr^2} - \left(\frac{m'(r)}{m(r)} - \frac{D-1}{r} \right) \frac{d\psi(r)}{dr} + m(r)(E_a - V^{\text{eff}}(r))\psi(r) = 0, \quad (50)$$

где

$$E_a = -k_2^2 \left[\frac{c}{2}(c - a - b - 1) + ab \right], \quad (51)$$

$$V^{\text{eff}}(r) = V(r) + U_{\alpha\beta}(r) + \left(\frac{D-1}{2r} \right) \frac{m'(r)}{m^2(r)} \quad (52)$$

и

$$\psi(r) = r^{-(D-1)/2} e^{-ck_2 r/2} (1 - e^{-k_2 r})^{(a+b-c+1)/2} {}_2F_1(a, b, c; e^{-k_2 r}). \quad (53)$$

Рис. 2. Потенциал Штурма $V(r)$ (случай 2) вместе с волновой функцией $\psi(r)$ и массовой функцией $m(r)$; в качестве КОП используется гипергеометрический полином при $D = 3$, $b = 2.1$, $c = 1$, $n = 0$, $k_2 = 1$. Масштаб рисунка произволен.

В данном случае

$$V(r) = \frac{k_2^2}{4} [c(c-2) + 1] e^{k_2 r} + \left[\frac{c}{2} (c-a-b-1) + ab \right] \frac{k_2^2 e^{-k_2 r}}{1 - e^{-k_2 r}} + \frac{(a+b-c)^2 - 1}{4} \frac{k_2^2 e^{-k_2 r}}{(1 - e^{-k_2 r})^2} - \frac{(D-1)(D-3)}{4m(r)r^2} \quad (54)$$

и

$$U_{\alpha\beta}(r) = -\frac{k_2^2}{4m(r)}. \quad (55)$$

Заменив b на $b-a$ и положив $a = -n$ (где n – положительное целое число), преобразуем гипергеометрическую функцию в полином от $e^{-k_2 r}$. Получим собственные энергии

$$E_n = E_{-a} = k_2^2 [n(n+b) - A], \quad (56)$$

потенциал

$$V(r) = \frac{k_2^2}{4} (c-1)^2 e^{k_2 r} + [A - n(n+b)] \frac{k_2^2 e^{-k_2 r}}{1 - e^{-k_2 r}} + \frac{B k_2^2 e^{-k_2 r}}{(1 - e^{-k_2 r})^2} - \frac{(D-1)(D-3)}{4m(r)r^2} \quad (57)$$

и собственные функции энергии порожденной системы

$$\psi(r) = r^{-(D-1)/2} e^{-ck_2 r/2} (1 - e^{-k_2 r})^{(b-c+1)/2} {}_2F_1(-n, b+n, c; e^{-k_2 r}). \quad (58)$$

В данном случае мы также имеем потенциал Штурма (см. рис. 2), который нельзя привести к нормальной форме, не зависящей от квантового числа n .

Полагая другие оставшиеся члены уравнения (34) равными константам и применяя ту же самую процедуру, можно построить следующие ТРП, которые приводят к хорошему поведению функции $g(r)$ и собственных энергий полученных систем.

Рис. 3. Порожденный потенциал $V(r)$ (случай 3) вместе с волновой функцией $\psi(r)$ и массовой функцией $m(r)$; в качестве КОП используется гипергеометрический полином при $D = 3$, $b = 1$, $c = -0.5$, $n = 0$, $k_3 = 2$. Масштаб рисунка произволен.

СЛУЧАЙ 3. Выбор $g'^2/(1-g) = k_3^2$ (константа) дает $m(r) = 1 - X^2$, где $X = 1 - k_3 r/2$. Тогда имеем (см. рис. 3)

$$V(r) = k_3^2 \left(B + \frac{3}{16} \right) \frac{1}{X^2} + \frac{3k_3^2}{16} \frac{1}{1-X^2} + k_3^2(A+B) \frac{X^2}{1-X^2} + k_3^2 A \frac{X^2}{(1-X^2)^2} +$$

$$+ \frac{k_3^2 c(c-2)}{4} \frac{X^2}{(1-X^2)^3} - \frac{(D-1)(D-3)}{4m(r)r^2},$$

$$E_n = k_3^2 [n(n+b) - (A+B)],$$

$$\psi(r) = r^{-(D-1)/2} X^{b-c+1/2} (1-X^2)^{(c+1)/2} {}_2F_1(-n, n+b, c; 1-X^2).$$

СЛУЧАЙ 4. Выбор $g'^2/(1-g) = k_4^2$ дает $m(r) = 1 - X^2$, $m(r) = 1 - e^z$, где $z = -k_4 r$. Тогда имеем (см. рис. 4)

$$V(r) = \frac{k_4^2}{4(1-e^z)} + k_4^2(A_n + B_n) \frac{e^z}{1-e^z} + A_n k_4^2 \frac{e^{2z}}{(1-e^z)^2} +$$

$$+ \frac{k_4^2 c(c-2)}{4} \frac{e^{2z}}{(1-e^z)^3} - \frac{(D-1)(D-3)}{4m(r)r^2},$$

$$E_n = k_4^2 \frac{1 - (n-b+c)^2}{4},$$

$$\psi(r) = r^{-(D-1)/2} (1-e^z)^{(c+1)/2} {}_2F_1(-n, b, c; 1-e^z),$$

где $A_n = c(n+c-b-1)/2 - nb$ и $B_n = [(n+c-b)^2 - 1]/4$.

Метод можно повторить и для другого выбора массовой функции, например для $m(r) = 1/g(r)$, $m(r) = 1 - g(r)$, $m(r) = 1/(1 - g(r))$, и построить новые ТРП для выбранного полинома ${}_2F_1(-n, b, c; g(r))$.

Рис. 4. Порожденный потенциал $V(r)$ (случай 4) вместе с волновой функцией $\psi(r)$ и массовой функцией $m(r)$; в качестве КОП используется гипергеометрический полином при $D = 3$, $b = 2$, $c = 1$, $n = 0$, $k_4 = 1$. Масштаб рисунка произволен.

4.2. Построение ТРП с помощью КОП в виде присоединенного полинома Лежандра. Определив $Q_n^l(g)$ в виде присоединенного полинома Лежандра,

$$Q_n^l(g) = P_n^\lambda(g), \quad (59)$$

получим

$$M(g) = -\frac{2g}{1-g^2}, \quad (60)$$

а также

$$J_{n,\lambda} = \frac{n(n+1)}{1-g^2} - \frac{\lambda^2}{(1-g^2)^2}. \quad (61)$$

Подставляя выражения (60) и (61) в уравнение (21), получим для присоединенного полинома Лежандра уравнение

$$\begin{aligned} & \frac{1}{m(r)} \frac{\psi''(r)}{\psi(r)} - \frac{1}{m(r)} \left(\frac{m'(r)}{m(r)} - \frac{D-1}{r} \right) \frac{\psi'(r)}{\psi(r)} + \\ & + \left[\frac{1}{2m(r)} \{g, r\} + \frac{g^2(g')^2}{m(r)(1-g^2)^2} + \frac{(g')^2}{m(r)(1-g^2)} [n(n+1) + 1] - \right. \\ & \left. - \frac{(g')^2 \lambda^2}{m(r)(1-g^2)^2} + \frac{(D-1)(D-3)}{4m(r)r^2} - \frac{D-1}{2r} \frac{m'}{m^2} - U_{\alpha\beta}(r) \right] = 0. \end{aligned} \quad (62)$$

Возьмем массовую функцию вида $m(r) = 1 - g^2$. Тогда уравнение (62) примет вид

$$\begin{aligned} & \frac{1}{m(r)} \frac{\psi''(r)}{\psi(r)} - \frac{1}{m(r)} \left(\frac{m'(r)}{m(r)} - \frac{D-1}{r} \right) \frac{\psi'(r)}{\psi(r)} + \\ & + \left[\frac{1}{2m(r)} \{g, r\} + \frac{g^2(g')^2}{(1-g^2)^3} + \frac{(g')^2}{(1-g^2)^2} [n(n+1) + 1] - \right. \\ & \left. - \frac{(g')^2 \lambda^2}{(1-g^2)^3} + \frac{(D-1)(D-3)}{4m(r)r^2} - \frac{D-1}{2r} \frac{m'}{m^2} - U_{\alpha\beta}(r) \right] = 0. \end{aligned} \quad (63)$$

Рис. 5. Порожденный потенциал $V(r)$ (см. формулу (68)) вместе с основным состоянием $\psi_1(r)$ и первыми двумя возбужденными состояниями $\psi_2(r)$ и $\psi_3(r)$, а также массовая функция $m(r)$; в качестве КОП используется присоединенный полином Лежандра при $D = 3$, $\lambda = 1$, $p = 0.5$. Масштаб рисунка произволен.

Чтобы получить собственные функции энергии порожденной системы, положим равным константе следующий член уравнения (63):

$$\frac{(g')^2}{(1 - g^2)^2} = p_1^2, \quad (64)$$

где p_1^2 – постоянная. В результате имеем

$$g(r) = \text{th } p_1 r, \quad (65)$$

$$m(r) = \sec h^2 p_1 r, \quad (66)$$

$$E_n = p_1^2 [n(n+1) + 1], \quad (67)$$

$$V(r) = p_1^2 + \lambda^2 p_1^2 \text{ch}^2 p_1 r - \frac{(D-1)(D-3)}{4m(r)r^2}, \quad (68)$$

$$U_{\alpha\beta}(r) = -p_1^2 \text{ch}^2 p_1 r, \quad (69)$$

$$V^{\text{eff}}(r) = V(r) + \frac{D-1}{2r} \frac{m'}{m^2} + U_{\alpha\beta}(r), \quad (70)$$

а также волновые функции

$$\psi(r) = N r^{-(D-1)/2} \sec h p_1(r) P_n^\lambda(\text{th } p_1 r). \quad (71)$$

На рис. 5 изображен график нормального потенциала (68), полученного с помощью присоединенного полинома Лежандра, вместе с массовой функцией, соответствующим основным состоянием $\psi_1(r)$ и первыми двумя возбужденными состояниями $\psi_2(r)$ и $\psi_3(r)$.

Рассмотрим другую массовую функцию $m(r) = 1/(1 - g^2(r))$. Тогда уравнение (62) примет вид

$$\begin{aligned} & \frac{1}{m(r)} \frac{\psi''(r)}{\psi(r)} - \frac{1}{m(r)} \left(\frac{m'(r)}{m(r)} - \frac{D-1}{r} \right) \frac{\psi'(r)}{\psi(r)} + \\ & + \left[\frac{1}{2m(r)} \{g, r\} + \frac{g^2(g')^2}{(1-g^2)} + (g')^2 [n(n+1) + 1] - \right. \\ & \left. - \frac{(g')^2 \lambda^2}{1-g^2} + \frac{(D-1)(D-3)}{4m(r)r^2} - \frac{D-1}{2r} \frac{m'}{m^2} - U_{\alpha\beta}(r) \right] = 0. \end{aligned} \quad (72)$$

Положим равным константе следующий член:

$$\frac{(g')^2}{1-g^2} = p_2^2, \quad (73)$$

где p_2^2 – постоянная. Получим

$$g(r) = \sin p_2 r, \quad (74)$$

$$m(r) = \sec^2 p_2 r, \quad (75)$$

$$E_n = -p_2^2 \lambda^2, \quad (76)$$

$$V(r) = \frac{p_2^2}{2} - \frac{3}{4} p_2^2 \sin^2 p_2 r - p_2^2 [n(n+1) + 1] \cos^2 p_2 r - \frac{(D-1)(D-3)}{4m(r)r^2}, \quad (77)$$

$$U_{\alpha\beta}(r) = p_2^2 \cos^2 p_2 r, \quad (78)$$

а также

$$\psi(r) = N r^{-(D-1)/2} \sec^{1/2} p_2 r \cdot P_n^\lambda(\sin p_2 r). \quad (79)$$

Заданный уравнением (77) потенциал является потенциалом Штурма. Его можно привести к нормальной форме, положив $n = \lambda + s$. Получим

$$E_n = -P_2^2 \left[(n-s)^2 + \frac{1}{2} \right], \quad (80)$$

а также нормальную форму потенциала

$$V(r) = -\frac{3}{4} p_2^2 \sin^2 p_2 r - p_2^2 [(\lambda+s)(\lambda+s+1) + 1] \cos^2 p_2 r - \frac{(D-1)(D-3)}{4m(r)r^2} \quad (81)$$

и волновые функции

$$\psi(r) = N r^{-(D-1)/2} \sec^{1/2} p_2 r \cdot P_n^{\lambda_n}(\sin p_2 r), \quad (82)$$

где $\lambda_n = n - s$.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе представлен метод построения ТРП, с помощью которого можно найти связанное состояние радиального уравнения Шредингера в D -мерном евклидовом пространстве с массой, зависящей от координат, для различных массовых функций. Этот метод основан на использовании свойств КОП. Успешность применения метода зависит от надлежащего выбора массовой функции, выраженной через функцию преобразования $g(r)$, на которую налагается условие нормируемости волновых функций порожденной системы. Полученные с помощью этого метода потенциалы являются преимущественно потенциалами Штурма по своей природе. Некоторые из них можно привести к нормальной форме путем перегруппировки различных параметров потенциала. Эффективный потенциал $V^{\text{eff}}(r)$ содержит постоянный член $\frac{D-1}{2r} \frac{m'}{m^2}$ (зависящий от размерности и массовой функции), который исчезает в одномерном случае, а также модифицированный потенциал $U_{\alpha\beta}(r)$.

В случае конкретного КОП и при конкретном выборе функции $m(g(r))$ наш формализм обеспечивает получение дополнительных ТРП. Число ТРП, которые можно получить с помощью конкретного КОП при конкретном выборе $m(g(r))$, зависит от числа членов, содержащих функцию $g(r)$ или ее производные в преобразованном уравнении. Однако не все члены приводят к регулярным функциям $g(r)$. Например, в уравнении (34) семь таких членов, из которых мы нашли только четыре члена, приводящих (если их считать постоянными) к регулярным функциям $g(r)$. Список потенциалов, полученных с помощью гипергеометрического полинома в качестве КОП и при $m(r) = g(r)$, представлен в конце п. 4.1 (см. случаи 1–4). Перечисленные в случаях 1–4 потенциалы являются потенциалами Штурма. К тому же еще два ТРП, заданные уравнениями (68) и (81), получаются соответственно при $m(g) = 1 - g(r)$ и $m(g) = 1/(1 - g(r))$, если в качестве КОП использовать присоединенный полином Лежандра (см. также рис. 1–5).

Что касается неоднозначности гамильтониана с массой, зависящей от координат, то наш метод отдает предпочтение упорядочению Жу–Кремера ($\alpha = \gamma = -1/2$, $\beta = 0$) для радиально-симметричных массовой функции и потенциала. Это дополнительная особенность нашего подхода.

Проведенный анализ имеет чисто математический характер. Постоянные интегрирования, масштабные факторы и т. д. не принимают каких-либо значений, так что они сохраняют некоторую гибкость по отношению к ТРП (с зависящей от координат массой) при их возможном применении.

Благодарности. Автор выражает свою признательность покойному профессору С. А. С. Ахмеду (Gauhati University, India) за его ценные предложения по данной теме на ранней стадии работы.

Список литературы

- [1] J. C. Slater, *Phys. Rev.*, **76**:11 (1949), 1592–1601.
- [2] D. J. Ben Daneil, C. B. Duke, *Phys. Rev.*, **152**:2 (1966), 683–692.
- [3] O. von Roos, *Phys. Rev. B*, **27**:12 (1983), 7547–7552.
- [4] T. Gora, F. Williams, *Phys. Rev.*, **177**:3 (1969), 1179–1182.
- [5] Q.-G. Zhu, H. Kroemer, *Phys. Rev. B*, **27**:6 (1983), 3519–3527.
- [6] T. L. Li, K. J. Kuhn, *Phys. Rev. B*, **47**:19 (1993), 12760–12770.

- [7] M. R. Geller, W. Kohn, *Phys. Rev. Lett.*, **70**:20 (1993), 3103–3106.
- [8] A. de Souza Dutra, C. A. S. Almeida, *Phys. Lett. A*, **275**:1–2 (2000), 25–30, arXiv: quant-ph/0306065.
- [9] A. D. Alhaidari, *Phys. Rev. A*, **66**:4 (2002), 042116, 7 pp.
- [10] A. de Souza Dutra, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **39**:1 (2006), 203–208.
- [11] O. Mustafa, S. H. Mazharimousavi, *Internat. J. Theor. Phys.*, **46**:7 (2007), 1786–1796.
- [12] H. Rajbongshi, N. N. Singh, *J. Modern Phys.*, **4**:11 (2013), 1540–1545; *Acta Phys. Polon. B*, **45**:8 (2014), 1701–1712; X. Райбонгши, Н. Н. Сингх, *ТМФ*, **183**:2 (2015), 312–328.
- [13] G. Bastard, *Wave Mechanics Applied to Semiconductor Heterostructure*, Les Edition de Physique, Paris, 1988.
- [14] P. Harrison, *Quantum Wells, Wires and Dots. Theoretical and Computational Physics*, John Wiley & Sons, New York, 2000.
- [15] L. Serra, E. Lipparini, *Europhys. Lett.*, **40**:6 (1997), 667–672.
- [16] F. A. de Saavedra, J. Boronat, A. Polls, A. Fabrocini, *Phys. Rev. B*, **50**:6 (1994), 4248–4251, arXiv: cond-mat/9403075.
- [17] P. Ring, P. Schuck, *The Nuclear Many-Body Problem*, Springer, Berlin, 1980.
- [18] B. Gönül, O. Özer, B. Gönül, F. Üzgün, *Modern Phys. Lett. A*, **17**:37 (2002), 2453–2465, arXiv: quant-ph/0211113.
- [19] C. Tazcan, R. Sever, *J. Math. Chem.*, **42**:3 (2007), 387–395.
- [20] C. Quesne, *SIGMA*, **5** (2009), 046, 17 pp.
- [21] H. Panahi, Z. Bakhshi, *Acta Phys. Polon. B*, **41**:1 (2010), 11–21.
- [22] M. Jafarpour, B. Ashtari, *Adv. Stud. Theor. Phys.*, **5**:1–4 (2011), 131–142.
- [23] R. Sever, C. Tezcan, Ö. Yeşiltaş, M. Bucurgat, *Internat. J. Theor. Phys.*, **47**:9 (2008), 2243–2248.
- [24] C. Tezcan, R. Sever, Ö. Yeşiltaş, *Internat. J. Theor. Phys.*, **47**:6 (2008), 1713–1721.
- [25] S. Meyur, *Bulg. J. Phys.*, **38**:4 (2011), 357–363.
- [26] R. Koç, H. Tütüncüler, *Ann. Phys. (8)*, **12**:11–12 (2003), 684–691.
- [27] C. Quesne, B. Bagchi, A. Banerjee, V. M. Tkachuk, *Bulg. J. Phys.*, **33**:4 (2006), 308–318.
- [28] C. Quesne, *SIGMA*, **3** (2007), 067, 14 pp.
- [29] P. K. Jha, H. Eleuch, Y. V. Rostovtsev, *J. Modern Opt.*, **58**:8 (2011), 652–656, arXiv: 1010.1744.
- [30] J. Yu, S.-H. Dong, G.-H. Sun, *Phys. Lett. A*, **322**:5–6 (2004), 290–297.
- [31] A. Schulze-Halberg, *Internat. J. Modern Phys. A*, **22**:8–9 (2007), 1735–1769.
- [32] A. Schulze-Halberg, *Internat. J. Modern Phys. A*, **23**:3–4 (2008), 537–546.
- [33] C. Quesne, *Ann. Phys. (N. Y.)*, **321**:5 (2006), 1221–1239, arXiv: quant-ph/0508216.
- [34] A. G. M. Schmidt, *Phys. Lett. A*, **353**:6 (2006), 459–462.
- [35] D. A. Kulikov, V. M. Shapoval, *$\hbar$ -Expansion for the Schrödinger equation with a position-dependent mass*, arXiv: 1206.1666.
- [36] S. A. S. Ahmed, *Internat. J. Theor. Phys.*, **36**:8 (1997), 1893–1905; N. Saikia, *Turk. J. Phys.*, **36**:2 (2012), 187–196; Н. Саикиа, С. А. С. Ахмед, *ТМФ*, **168**:2 (2011), 291–298; S. A. S. Ahmed, B. C. Borah, D. Sharma, *Eur. Phys. J. D*, **17**:1 (2001), 5–11; S. A. S. Ahmed, L. Buragohain, *Phys. Scr.*, **80**:2 (2009), 025004, 6 pp.; S. A. S. Ahmed, L. Buragohain, *Eur. J. Theor. Phys.*, **7**:23 (2010), 145–154; N. Bhagawati, N. Saikia, N. N. Singh, *Acta Phys. Polon. B*, **44**:8 (2013), 1711–1723, arXiv: 1309.3152; N. Bhagawati, *Acta Phys. Polon. B*, **45**:1 (2014), 15–28, arXiv: 1402.1265; A. Bharali, *Phys. Scr.*, **88**:3 (2013), 035009, 7 pp.
- [37] S. A. S. Ahmed, B. C. Borah, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **36**:39 (2003), 10071–10082.