Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Гвоздев, Е. В. Осокина, Процессы рождения электрон-позитронной плазмы нейтрино высоких энергий в сильном магнитном поле, *ТМФ*, 2015, том 184, номер 2, 338–351

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8845>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 13:51:12

© 2015 г.

А. А. Гвоздев*, Е. В. Осокина*

ПРОЦЕССЫ РОЖДЕНИЯ ЭЛЕКТРОН-ПОЗИТРОННОЙ ПЛАЗМЫ НЕЙТРИНО ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ В СИЛЬНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

В условиях гипераккреционного сильно замагниченного диска керровской черной дыры исследованы процессы $\nu_i + \tilde{\nu}_i \rightarrow e^- + e^+$, $\nu_i(\tilde{\nu}_i) \xrightarrow{B} \nu_i(\tilde{\nu}_i) + e^+ + e^-$ рождения электрон-позитронной плазмы в окрестности диска. Эффективность рождения плазмы в данных процессах вычислена при известных параметрах нейтринного излучения из диска, распределение магнитного поля задавалось из качественных соображений. Показано, что в случае $\omega^2 \gg eB \gg m_e^2$ можно пренебречь влиянием магнитного поля на сечение процесса аннигиляции $\nu_i + \tilde{\nu}_i \rightarrow e^- + e^+$. Показано также, что эффективность производства энергии-импульса в e^+e^- -плазме в реакции $\nu_i(\tilde{\nu}_i) \xrightarrow{B} \nu_i(\tilde{\nu}_i) + e^+ + e^-$ существенно зависит от распределения магнитного поля в диске. Таким образом, для окончательной оценки эффективности рождения плазмы в данной реакции необходимо задать распределение сильного магнитного поля в окрестности нейтриноизлучающей части диска.

Ключевые слова: гипераккреционный диск, нейтрино, сильное магнитное поле.

DOI: 10.4213/tmf8845

1. ВВЕДЕНИЕ

Настоящая работа посвящена изучению процессов нейтринного рождения электрон-позитронных пар в сильном магнитном поле сверхкритической напряженности

$$B \gg B_c = \frac{m_e^2}{e} \simeq 4.41 \cdot 10^{13} \text{ Гс.}$$

В качестве таких процессов исследуются реакция аннигиляции пары нейтрино в электрон-позитронную пару

$$\nu_i + \tilde{\nu}_i \rightarrow e^- + e^+, \quad i = e, \mu, \tau, \quad (1)$$

а также кроссинг-процесс

$$\nu_i(\tilde{\nu}_i) \xrightarrow{B} \nu_i(\tilde{\nu}_i) + e^+ + e^-, \quad (2)$$

*Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова, Ярославль, Россия.
E-mail: gvozdev@uniyar.ac.ru, osokinelena@yandex.ru

кинематически запрещенный при напряженности магнитного поля $B = 0$. Сечение процесса (1) в вакууме давно известно [1]. Исследование процесса (2) также имеет довольно длинную историю. В пределе скрещенного поля вероятность процесса вычислялась в работах [2]–[5]. Уже в первой из этих работ была найдена правильная зависимость лидирующего (логарифмического) вклада в вероятность, однако численный коэффициент был неправильный. В последующих работах проводилось уточнение этого коэффициента и вычисление постлогарифмических поправок, которые могут быть существенны в случае нейтрино высоких энергий. Отметим, что в рассматриваемой нами задаче важна не вероятность процесса (2), а величина энергии-импульса, уносимая в электрон-позитронных парах из единицы объема в единицу времени. Такая величина как в пределе скрещенного поля, так и в пределе сильного магнитного поля, в котором электроны и позитроны занимают основной уровень Ландау, вычислялась в работе [6].

Нейтринные реакции (1), (2) являются основными процессами рождения электрон-позитронной плазмы в окрестности гипераккреционного сильно замагниченного диска керровской черной дыры [7]. Внутренняя часть такого диска настолько плотная и горячая (типичные плотности $\rho \gtrsim 3 \cdot 10^{10}$ г/см³, типичные температуры $T > 1$ МэВ), что является непрозрачной для фотонов и остывает за счет нейтринного излучения из объема в урка-процессах

$$p + e^- \rightarrow n + \nu_e, \quad n + e^+ \rightarrow p + \bar{\nu}_e$$

с типичными светимостями $L_{\nu, \bar{\nu}} \approx 10^{52}$ эрг/с. Таким образом, в процессах (1), (2) происходит “накачка” окрестности внутренней части диска электрон-позитронной плазмой. Если она достаточно эффективна ($L_{e^+e^-} \gtrsim 10^{-2} L_{\nu, \bar{\nu}}$), то такая система может быть энергетическим источником космологического гамма-всплеска [8].

Эффективность рождения электрон-позитронной плазмы в условиях гипераккреционного диска интенсивно исследуется в течение последнего десятилетия [9]. Относительное завершение такого исследования содержат работы [10], [7]. В работе [10] впервые в рамках общей теории относительности осуществлено полное гидродинамическое моделирование диска с учетом нейтринного излучения из его внутренней части. В работе [7] с учетом параметров нейтринного излучения, полученных в [10], численно рассчитана эффективность производства электрон-позитронной плазмы в реакциях (1), (2) с учетом сильного магнитного поля в окрестности нейтриноизлучающей части диска

$$6 \cdot 10^{13} \text{ Гс} \lesssim B_{\text{max}} \lesssim 8 \cdot 10^{15} \text{ Гс}.$$

Отметим, что при вычислении эффективности рождения плазмы в процессе (1) авторы [7] использовали выражение для сечения процесса (1) без учета магнитного поля ($B = 0$). При вычислении эффективности рождения плазмы в процессе (2) использовались выражения для вектора 4-импульса родившейся e^+e^- -плазмы в элементе объема в единицу времени в так называемом приближении скрещенного поля [6]. В этом приближении $\omega^2 \gg m_e^2$, $B \ll B_c$, где ω – энергия нейтрино. При типичных для диска значениях $\omega^2 \sim (10^2 - 10^3)m_e^2$ это приближение дает качественно правильный результат также при $B \gtrsim B_c$. Однако, как следует из приведенных выше оценок B_{max} , возможен также случай $B \gg B_c$. Таким образом, необходимо детально исследовать влияние сильного магнитного поля напряженности $B \gg B_c$ на процессы (1), (2) и выяснить, насколько существенно изменятся полученные в [7] оценки эффективности производства плазмы в этих процессах.

В работе используется естественная система единиц ($c = \hbar = k = 1$).

2. НЕЙТРИННЫЕ СВЕТИМОСТИ

Величина энергии-импульса, уносимого электрон-позитронными парами из единицы объема среды в единицу времени в локальной (свободно падающей) системе отсчета, определяется следующим образом. В реакции аннигиляции нейтрино в электрон-позитронную пару (1) 4-вектор определяется выражением

$$Q_{\nu\bar{\nu}}^{\alpha} = \frac{1}{V} \int dn_{\nu} dn_{\bar{\nu}} f_{\nu}(k) f_{\bar{\nu}}(k') q^{\alpha} j_{\nu} \sigma_{\nu\bar{\nu} \rightarrow e^{-} + e^{+}}, \quad (3)$$

где $j_{\nu} = q^2/2V\omega\omega'$ – плотность потока сталкивающихся нейтрино, q^{α} – 4-импульс нейтринной пары, $f_{\nu}(k)$, $f_{\bar{\nu}}(k')$ – функции распределения нейтрино и антинейтрино, рождающихся в урка-процессах в аккреционном диске, dn_{ν} , $dn_{\bar{\nu}}$ – числа заполнения нейтрино и антинейтрино, V – нормировочный объем.

В свою очередь, 4-вектор энергии-импульса в реакции рождения одиночным (анти)нейтрино $e^{+}e^{-}$ -пары (2) имеет вид

$$Q_{\nu B}^{\alpha} = \frac{1}{V} \int dn_{\nu} (f_{\nu}(k) + f_{\bar{\nu}}(k')) \dot{\mathcal{P}}^{\alpha}, \quad (4)$$

где $\dot{\mathcal{P}}^{\alpha}$ – локальная скорость производства энергии-импульса в электрон-позитронных парах в реакции (2) в расчете на одно (анти)нейтрино.

Важно отметить, что для получения окончательного выражения для светимости в $e^{+}e^{-}$ -парах в системе удаленного наблюдателя вне горизонта событий

$$\dot{E}_{e^{+}e^{-}} = \int_{r>r_h} dr \int d\varphi d\theta \sqrt{-g_{\alpha\beta}} \left[\frac{Q^t}{\sqrt{-g^{tt}}} - \frac{g_{t\varphi}}{\sqrt{g^{\varphi\varphi}}} Q^{\varphi} \right], \quad (5)$$

где $g_{\alpha\beta}$ – метрика керровской черной дыры в координатах t , r , φ , θ , необходимо вычислить компоненты Q^t , Q^{φ} 4-векторов $Q_{\nu\bar{\nu}}^{\alpha}$, $Q_{\nu B}^{\alpha}$. Для этого, как видно из (3), (4), необходимо вычислить сечение аннигиляции $\sigma_{\nu\bar{\nu} \rightarrow e^{-}e^{+}}$ и 4-вектор производства энергии-импульса на одно нейтрино $\dot{\mathcal{P}}^{\alpha}$ в реакции (2).

При вычислении данных величин целесообразно определить области параметров:

$$1) \quad \omega^2 \gg m_e^2 \gg eB \text{ – предел скрещенного поля;} \quad (6)$$

$$2) \quad \omega^2 \gg eB \gg m_e^2 \text{ – случай нейтрино высоких энергий и умеренно сильного магнитного поля;} \quad (7)$$

$$3) \quad eB \gtrsim \omega^2 \gg m_e^2 \text{ – предел сильного магнитного поля;} \quad (8)$$

$$4) \quad eB \gg \omega^2 \gg m_e^2 \text{ – асимптотика сверхсильного магнитного поля, в котором электроны и позитроны находятся на основном уровне Ландау } (n = n' = 0). \quad (9)$$

Для полноты результатов величины $\sigma_{\nu\bar{\nu}}$, $\dot{\mathcal{P}}$ должны быть вычислены во всех указанных областях с получением аппроксимационных формул перехода из одной области в другую.

В работе [7] для вычисления величины (3) использовалось хорошо известное выражение для сечения аннигиляции $\nu\bar{\nu} \rightarrow e^{+}e^{-}$ в вакууме без учета магнитного поля [1]:

$$\sigma_{\nu\bar{\nu}}^{(0)} = \frac{G_F^2 (C_v^2 + C_a^2)}{3\pi} q^2, \quad (10)$$

где G_F – постоянная Ферми, C_v, C_a – векторная и аксиальная константы электрослабого тока. В свою очередь, для вычисления величины (4) использовалось выражение для $\dot{P}$, полученное в пределе скрещенного поля (6) [6]:

$$\dot{P}_{\text{cf}}^\alpha \simeq \frac{7G_F^2(C_v^2 + C_a^2)}{864\pi^3} \frac{k_\perp^2 \beta^2}{\omega} \times \left[\left(\ln X + 3 \ln \left(\frac{\beta}{m_e^2} \right) - 3.776 \right) k^\alpha + \frac{2C_v C_a}{C_v^2 + C_a^2} 7.465 X^{-1/3} (k\tilde{\varphi})^\alpha \right], \quad (11)$$

где $X = k_\perp^2 / \beta \gg 1$, $k_\perp^2 = (k\Lambda k)$ – квадрат импульса нейтрино поперек направления напряженности магнитного поля, $\beta = eB$, $\varphi_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}/B$ – безразмерный тензор напряженности электромагнитного поля, $\tilde{\varphi}_{\mu\nu} = \tilde{F}_{\mu\nu}/B$ – дуальный безразмерный тензор, $\Lambda_{\mu\nu} = (\varphi\varphi)_{\mu\nu}$.

Разумеется, выражения (10) и (11) продолжают описывать процессы производства e^+e^- -плазмы при условии $eB \gtrsim m_e^2$. Однако очевидно, что требуется получить корректное выражение для этих величин в области (7) с более сильным магнитным полем. Решение данной задачи изложено в разделе 3.

3. ВЫЧИСЛЕНИЕ $\sigma_{\nu\bar{\nu} \rightarrow e^+e^-}$, $\dot{P}^\alpha$ В ПРИБЛИЖЕНИИ $\omega^2 \gg eB \gg M_e^2$

В данном приближении родившиеся в процессах (1) и (2) электроны и позитроны занимают достаточно много (десятки или сотни) уровней Ландау. В этом случае удобно использовать дисперсионные соотношения, связывающие сечение $\sigma_{\nu\bar{\nu} \rightarrow e^+e^-}$ процесса (1) и вероятность W процесса (2) с мнимой частью амплитуды перехода нейтринного тока в нейтринный ток [11]:

$$\sigma_{\nu\bar{\nu} \rightarrow e^+e^-} = \frac{1}{q^2} \text{Im } M_{j_\nu \rightarrow j_\nu}, \quad (12)$$

$$W = \frac{1}{16\pi^3} \int \frac{d^3 k'}{\omega'} \text{Im } M_{j_\nu \rightarrow j_\nu}. \quad (13)$$

Определим 4-вектор W^α :

$$W^\alpha = \omega \int dW q^\alpha, \quad (14)$$

где dW – вероятность перехода родившегося нейтрино в процессе (2) в элемент фазового объема $dn'_\nu = V d^3 k' / (2\pi)^3$.

Как следует из (14), вычисляемая нами в процессе (2) величина $\dot{P}^\alpha$ (см. формулу (4)) может быть представлена выражением

$$\dot{P}^\alpha = \frac{W^\alpha}{\omega} = \frac{1}{16\pi^3 \omega} \int \frac{d^3 k'}{\omega'} q^\alpha \text{Im } M_{j_\nu \rightarrow j_\nu}. \quad (15)$$

Амплитуда перехода $M_{j_\nu \rightarrow j_\nu}$ детально исследовалась в [11], и в рассматриваемом приближении ее мнимая часть может быть представлена в виде

$$\begin{aligned} \text{Im } M_{j_\nu \rightarrow j_\nu} = \frac{G_F^2}{8\pi^2} \left\{ (C_v^2 + C_a^2) \left[\frac{|q\varphi j|^2}{q_\perp^2} \text{Im } Y^{(1)} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{|q\tilde{\varphi} j|^2}{q_\parallel^2} \text{Im } Y^{(2)} + \frac{q^2 |q\Lambda j|^2}{q_\perp^2 q_\parallel^2} \text{Im } Y^{(3)} \right] + \right. \\ \left. + 2C_v C_a \beta \frac{\text{Re}[(q\tilde{\varphi} j)(q\Lambda j^*)]}{q_\perp^2} \text{Im } Y^{(4)} \right\}. \quad (16) \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
 \operatorname{Im} Y^{(1)} &= -\frac{(q_{\perp}^2 \beta^2)^{1/3}}{6} \int_0^1 du \left(\frac{4}{1-u^2} \right)^{1/3} (3+u^2) \frac{d\Phi}{dz} + \operatorname{Im} Y^{(3)}, \\
 \operatorname{Im} Y^{(2)} &= -\frac{(q_{\perp}^2 \beta^2)^{1/3}}{3} \int_0^1 du \left(\frac{4}{1-u^2} \right)^{1/3} (3-u^2) \frac{d\Phi}{dz} + \operatorname{Im} Y^{(3)}, \\
 \operatorname{Im} Y^{(3)} &= \frac{q^2}{2} \int_0^1 du (1-u^2) \operatorname{Im} f_1(z), \\
 \operatorname{Im} Y^{(4)} &= \frac{q^2}{2^{2/3} (q_{\perp}^2 \beta^2)^{1/3}} \int_0^1 du (1-u^2) \Phi(z),
 \end{aligned} \tag{17}$$

где

$$\begin{aligned}
 \Phi(z) &= \int_0^{\infty} dt \cos\left(zt + \frac{t^3}{3}\right), \\
 \operatorname{Im} f_1(z) &= -\int_0^{\infty} \frac{dt}{t} \left[\sin\left(zt + \frac{t^3}{3}\right) - \sin zt \right], \\
 z &= \left(\frac{1-u^2}{4} \right)^{1/3} \frac{(-q^2)}{(q_{\perp}^2 \beta^2)^{1/3}},
 \end{aligned} \tag{18}$$

$j_{\nu}^{\alpha} = \bar{\nu} \gamma^{\alpha} (1 + \gamma^5) \nu$ – нейтринный слабый ток.

Отметим, что функции $Y^{(i)}$, входящие в амплитуду, получены из функций $Y_{VV}^{(i)}$, $Y_{AA}^{(i)}$, $Y_{VA}^{(1)}$, $Y_{VA}^{(2)}$ [11] в пределе $m_e^2 \rightarrow 0$.

3.1. Вычисление $\sigma_{\nu\bar{\nu} \rightarrow e^- e^+}^B$ в приближении $\omega^2, \omega'^2 \gg eB \gg m_e^2$. Подставив мнимую часть амплитуды $\operatorname{Im} M_{j\nu \rightarrow j\nu}$ (16) в выражение (12), получим

$$\sigma_{\nu\bar{\nu}}^B = \sigma_{\nu\bar{\nu}}^{(0)} (1 + F_{\nu\bar{\nu}}), \tag{19}$$

где $\sigma_{\nu\bar{\nu}}^{(0)}$ – сечение процесса аннигиляции в вакууме (10), функция $F_{\nu\bar{\nu}}$, описывающая влияние магнитного поля на процесс, может быть представлена в виде

$$\begin{aligned}
 F_{\nu\bar{\nu}} &= \frac{12}{\pi} \delta \left\{ \left(1 - \frac{1}{8} \frac{|q\Lambda j|^2}{q_{\parallel}^2 q_{\perp}^2} \right) I_1 + \delta \left[3I_2 + \frac{1}{8} I_3 \frac{1}{q^2} \left(\frac{|q\varphi j|^2}{q_{\perp}^2} - 2 \frac{|q\tilde{\varphi} j|^2}{q_{\parallel}^2} \right) + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{3}{2} \left(\frac{\beta}{4q_{\perp}^2} \right)^{1/3} I_4 \frac{C_v C_a}{C_v^2 + C_a^2} \frac{\operatorname{Re}[(q\tilde{\varphi} j)(q\Lambda j^*)]}{q^2 q_{\perp}^2} \right] \right\}.
 \end{aligned} \tag{20}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \int_{-c}^0 \frac{dz z}{\sqrt{1 + (z/c)^3}} \Phi'(z), \\
 I_2 &= \int_{-c}^0 \frac{dz z^5}{\sqrt{1 + (z/c)^3}} \int_{-\infty}^z \Phi(x) dx, \\
 I_3 &= \int_{-c}^0 \frac{dz z^4}{\sqrt{1 + (z/c)^3}} \Phi'(z), \\
 I_4 &= \int_{-c}^0 \frac{dz z^5}{\sqrt{1 + (z/c)^3}} \Phi(z), \quad c = 4^{-1/3} \frac{q^2}{(q_{\perp}^2 \beta^2)^{1/3}},
 \end{aligned} \tag{21}$$

$\delta = (q^2/q_{\perp}^2)(\beta/q^2)^2$ – малая величина в рассматриваемой области ($\delta \ll 1$).

Заметим, что для процесса аннигиляции (1) $q^2 > 0$, и переменная z является большим отрицательным числом:

$$z = -\left(\frac{1-u^2}{4}\right)^{1/3} A, \quad A = \frac{q^2}{(q_\perp^2 \beta^2)^{1/3}} \gg 1, \quad (22)$$

так что интегралы I_i вычисляются по осциллирующим функциям $\Phi(z)$, $\Phi'(z)$. При выделении полевой поправки к сечению $F_{\nu\bar{\nu}}$ в выражении (22) было использовано соотношение

$$\text{Im } f_1(z) = \frac{\pi}{3} + \int_z^0 \Phi(x) dx = \pi - \int_{-\infty}^z \Phi(x) dx.$$

Также мы воспользовались равенством

$$\frac{|q\varphi j|^2}{q_\perp^2} + \frac{|q\tilde{\varphi} j|^2}{q_\parallel^2} + \frac{q^2 |q\Lambda j|^2}{q_\perp^2 q_\parallel^2} = -j_\nu^* j_\nu = 8q^2.$$

Это равенство следует из того, что поляризации фотона в магнитном поле могут быть выбраны в виде [11]

$$\varepsilon_\alpha^{(1)} = \frac{(q\varphi)_\alpha}{\sqrt{q_\perp^2}}, \quad \varepsilon_\alpha^{(2)} = \frac{(q\tilde{\varphi})_\alpha}{\sqrt{q_\parallel^2}}, \quad \varepsilon_\alpha^{(3)} = \frac{q^2 (q\Lambda)_\alpha}{\sqrt{q^2 q_\parallel^2 q_\perp^2}}.$$

Прямое вычисление кинематических инвариантов дает

$$\begin{aligned} \frac{|q\tilde{\varphi} j|^2}{q_\parallel^2} &= 4 \left[2(k_\parallel^2 + k_\parallel'^2) - q_\perp^2 - \frac{(k_\parallel^2 - k_\parallel'^2)^2}{q_\parallel^2} \right], \\ \frac{|q\varphi j|^2}{q_\perp^2} &= 4 \left[-2(k_\perp^2 + k_\perp'^2) + q_\parallel^2 + \frac{(k_\perp^2 - k_\perp'^2)^2}{q_\perp^2} \right], \\ \frac{|q\Lambda j|^2}{q_\parallel^2 q_\perp^2} &= 4 \left[1 - \frac{(k_\perp^2 - k_\perp'^2)^2}{q_\parallel^2 q_\perp^2} \right], \\ \frac{\text{Re}[(q\tilde{\varphi} j)(q\Lambda j^*)]}{q^2 q_\perp^2} &= 4 \frac{(k\varphi k')(k_\perp^2 - k_\perp'^2)}{q^2 q_\perp^2}. \end{aligned}$$

Таким образом, окончательный результат вычисления сечения в рассматриваемом приближении может быть представлен в виде

$$\sigma_{\nu\bar{\nu}}^{(B)} = \sigma_{\nu\bar{\nu}}^{(0)} (1 + F_{\nu\bar{\nu}}(\beta)).$$

Здесь

$$\begin{aligned} F_{\nu\bar{\nu}}(\beta) &= \frac{6}{\pi} \delta \left\{ \left(1 + \frac{(k_\perp^2 - k_\perp'^2)^2}{q_\parallel^2 q_\perp^2} \right) I_1 + \right. \\ &+ \delta \left[6I_2 + \left(\left(1 + \frac{3q_\perp}{q^2} \right) \left(1 + \frac{(k_\parallel^2 - k_\parallel'^2)^2}{q_\parallel^2 q_\perp^2} \right) - \frac{6(k_\parallel^2 + k_\parallel'^2)^2}{q^2} \right) I_3 + \right. \\ &\left. \left. + 12 \frac{C_v C_a}{C_v^2 + C_a^2} \left(\frac{\beta}{4q_\perp^2} \right)^{1/3} \frac{(k\varphi k')(k_\perp^2 - k_\perp'^2)}{q^2 q_\perp^2} I_4 \right] \right\}, \quad (23) \end{aligned}$$

где интегралы $I_1, \dots, I_4$ представлены выражениями (21), параметр

$$\delta = \left(\frac{q^2}{q_{\perp}^2} \right) \left(\frac{\beta}{q^2} \right)^2 \ll 1$$

в рассматриваемом приближении $\omega^2, \omega'^2 \gg eB \gg m_e^2$.

Мы вернемся к обсуждению полученной для сечения формулы (19) с учетом полевой поправки (23) и ее численных оценок в разделе 4.

3.2. Вычисление $\dot{P}^\alpha$ в приближении $\omega^2 \gg eB \gg m_e^2$. Вычислим величину $\dot{P}^\alpha$, подставив в формулу (15) выражения (16), (17). Отметим, что переменная z (18) для реакции $\nu_i(\tilde{\nu}_i) \xrightarrow{B} \nu_i(\tilde{\nu}_i) + e^+ + e^-$ положительна ($z \geq 0$), так что функции $\Phi(z)$, $\Phi'(z)$, $\text{Im } f_1(z)$, входящие в (17), экспоненциально убывают. Таким образом, основной вклад накапливается в области малых z ($z \ll 1$).

При вычислении интеграла (15) по импульсу конечного нейтрино удобно перейти в систему отсчета, в которой начальное нейтрино движется перпендикулярно вектору напряженности магнитного поля, $\vec{B} = (0, 0, B)$.

При переходе к безразмерным переменным $r \equiv \omega'/\omega$, $0 \leq r \leq 1$, и $y \equiv 1 - \cos \theta$, $0 \leq y \leq 2$, получим

$$\begin{aligned} \int \frac{d^3 k'}{\omega'} &= k_{\perp}^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 dy \int_0^{1/(1+\sqrt{y(2-y)\cos^2\varphi})} r dr, \\ \int \frac{d^3 k'}{\omega'} q_0 &= k_{\perp}^3 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 dy \int_0^{1/(1+\sqrt{y(2-y)\cos^2\varphi})} (1-r)r dr, \\ \int \frac{d^3 k'}{\omega'} \begin{Bmatrix} q^1 \\ q^2 \\ q^3 \end{Bmatrix} &= k_{\perp}^3 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 dy \int_0^{1/(1+\sqrt{y(2-y)\cos^2\varphi})} r dr \times \\ &\quad \times \begin{Bmatrix} 1-r+ry \\ -r\sqrt{y(2-y)}\sin\varphi \\ -r\sqrt{y(2-y)}\cos\varphi \end{Bmatrix}. \end{aligned}$$

Далее целесообразно перейти к лоренц-инвариантным переменным

$$\eta^2 \equiv \frac{q_{\perp}^2}{k_{\perp}^2}, \quad \chi \equiv -\frac{q^2}{2k_{\perp}^2}. \quad (24)$$

Связь между переменными

$$\begin{aligned} 1-r &= \sqrt{\eta^2 - \chi \sin^2 \varphi (2 + \chi \cos^2 \varphi)} - \chi \cos^2 \varphi, \\ \chi &= ry \end{aligned} \quad (25)$$

определяет якобиан перехода

$$D\left(\frac{\chi, \eta}{r, y}\right) = 2r[(1-r) + ry \cos^2 \varphi] = 2r\sqrt{\eta^2 - \chi \sin^2 \varphi (2 + \chi \cos^2 \varphi)}. \quad (26)$$

Отметим, что вычисление интеграла (15) по лоренц-инвариантным переменным (24) без дополнительных предположений при условии, что конструкции $|q\varphi j|^2$, $|q\tilde{\varphi}j|^2$, $\text{Re}[(q\tilde{\varphi}j)(q\Lambda j^*)]$ достаточно громоздки, представляет трудность.

В дальнейшем мы предполагаем, что интеграл накапливается в области

$$\chi = -\frac{q^2}{k_{\perp}^2} = \frac{2\omega\omega'}{\omega^2}(1 - \cos\theta) \ll 1. \quad (27)$$

Это предположение означает, что интеграл накапливается в области $\theta \ll 1$, где θ – угол между импульсами начального и конечного нейтрино. Действительно, как будет показано ниже прямым вычислением интеграла (15), разложение подынтегральных функций в ряд по переменной χ эквивалентно разложению интеграла по степеням малого параметра $(\beta/k_{\perp}^2)^{2/3}$. Ниже представлен результат довольно громоздкого вычисления отдельных компонент $\dot{P}^\alpha$ в виде суммы первых двух членов данного ряда:

$$\begin{aligned} \dot{P}^0 = & \frac{7G_F^2(C_v^2 + C_a^2)}{216\pi^3} \frac{k_{\perp}(k_{\perp}^2\beta)}{\omega} \times \\ & \times \left\{ \ln\left(\frac{k_{\perp}^2}{\beta}\right) + C_1 + \left(\frac{\beta}{k_{\perp}^2}\right)^{2/3} C_2 + O\left[\left(\frac{\beta}{k_{\perp}^2}\right)^{4/3}\right] \right\}, \end{aligned} \quad (28)$$

где

$$C_1 = \gamma_E + 3\ln 2 + \frac{\ln 3}{2} - \frac{24}{7} \left(1 - \frac{1}{16 \cdot 18}\right) - \frac{3}{14} + \frac{9}{7} \left[4(2\ln 2 - 1) - 1 - \frac{1}{30}\right] \tilde{C}_1, \quad (29)$$

$$C_2 = \frac{81}{3} \left(\frac{3}{2}\right)^{2/3} \left[\left(1 - \frac{1}{11}\right) \frac{1}{\Gamma(-2/3)} \tilde{C}_2 + \frac{6}{77} \frac{1}{\Gamma(1/3)} \tilde{C}_3 \right],$$

$$\begin{aligned} \tilde{C}_1 = & \frac{4 \cdot 2^{2/3}}{12[4(2\ln 2 - 1) - 1 - 1/30](k_{\perp}^2/\beta)^{2/3}} \left[\int_0^2 d\eta f_1(\eta) I^{(1)}(\eta) - \int_1^2 d\eta f_1(\eta) I^{(2)}(\eta) \right] \times \\ & \times \left[\int_0^\infty dz z \Phi'(z) \right]^{-1}, \end{aligned}$$

$$\tilde{C}_2 = \frac{4 \cdot 2^{2/3} \Psi[1]}{9 \cdot 7/2 \cdot 2^{2/3}(1 - 1/11)} \int_0^1 d\eta f_1(\eta) - 4^{1/3} I_{1/3} \int_0^1 d\eta f_2(\eta),$$

$$\tilde{C}_3 = 2^{1/3} \frac{2}{3} I_{1/3},$$

$$I_{1/3} = \int_0^1 \frac{du}{(1 - u^2)^{1/3}}, \quad I^{(1,2)}(\eta) = \int_0^{B_{1,2}} \Psi[x_{1,2}] z^2 \Phi'(z) dz,$$

$$x_{1,2} = z/B_{1,2}, \quad \Psi[x] = -\frac{3}{2} \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{1 - x^3}},$$

$$f_1(\eta) = \eta^{2/3} \left(-\eta^2 + 2\eta + \frac{4}{\eta} - 4 \right),$$

$$f_2(\eta) = \eta^{2/3} \left(-\frac{\eta^2}{2} + 4\eta + \frac{8}{\eta} - 11 \right),$$

$$B_1(\eta) = \frac{1}{2^{2/3}} \left(\frac{k_{\perp}^2}{\beta} \right)^{2/3} \eta^{4/3}, \quad B_2(\eta) = 2^{4/3} \left(\frac{k_{\perp}^2}{\beta} \right)^{2/3} \frac{(\eta - 1)}{\eta^{2/3}}.$$

Коэффициенты $\tilde{C}_i$ введены таким образом, что $\tilde{C}_i \rightarrow 1$ в пределе $B_{1,2}(\eta) \rightarrow \infty$. Однако результат вычисления в таком пределе является слишком грубым.

При изучении процессов рождения плазмы в магнитном поле важно вычислить асимметрию скорости производства импульса в направлении вектора напряженности магнитного поля. Для процесса (2) получаем выражение

$$\dot{P}^3 = G_F^2 \frac{2C_v C_a}{216\pi^3} \frac{k_\perp (k_\perp^2 \beta^2)}{\omega} \left\{ \left(\frac{\beta}{k_\perp^2} \right)^{1/3} C_3 + O\left(\frac{\beta}{k_\perp^2} \right) \right\},$$

$$C_3 = -\frac{27}{2\pi} 2^{1/3} \int_0^1 \frac{du}{(1-u^2)^{2/3}} \times$$

$$\times \left[\int_0^2 d\eta \eta^{1/3} (1-\eta)(2-\eta) \int_0^{z_1} dz z^2 \Phi(z) - \right.$$

$$\left. - \int_1^2 d\eta \eta^{1/3} (1-\eta)(2-\eta) \int_0^{z_2} dz z^2 \Phi(z) \right], \quad (30)$$

где

$$z_1 = \left(\frac{1-u^2}{4} \right)^{1/3} \left(\frac{k_\perp^2}{\beta} \right)^{2/3} \eta^{4/3},$$

$$z_2 = \left(\frac{1-u^2}{4} \right)^{1/3} \left(\frac{k_\perp^2}{\beta} \right)^{2/3} \frac{4(\eta-1)}{\eta^{2/3}}.$$

Отметим, что интеграл C_3 в (30) накапливается в области $z_{1,2} \gg 1$. По этой причине хорошим (с точностью до 1–2 %) является приближение

$$\int_0^{z_{1,2}} dz z^2 \Phi(z) \simeq \int_0^\infty dz z^2 \Phi(z) \simeq 0.355\pi.$$

В этом приближении $C_3 \simeq -0.91$. Остальные компоненты $\dot{P}^{1,2}$ не представляют интереса, поскольку при подстановке в (4) дают нулевой вклад.

Выражения (28), (30) позволяют получить явный вид 4-вектора $\dot{P}^\alpha$, полученный в пределе умеренно сильного магнитного поля:

$$\dot{P}_{\text{mf}}^\alpha = \frac{7G_F^2 (C_v^2 + C_a^2)}{216\pi^3} \frac{(k_\perp^2 \beta^2)}{\omega} \times$$

$$\times \left\{ \left(\ln X + C_1 + C_2 X^{-2/3} \right) k^\alpha - \frac{2C_v C_a}{C_v^2 + C_a^2} X^{-1/3} C_3 (k\tilde{\varphi})^\alpha + O(X^{-1}) \right\}, \quad (31)$$

где коэффициенты C_1 , C_2 , C_3 описываются формулами (29), (30). Таким образом, в рассматриваемом приближении (7) нейтрино высоких энергий и умеренно сильного магнитного поля вместо формул (10), (11), которые использовались в работе [7], следует использовать полученные в данном разделе выражения (23), (31).

4. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Приведем результаты численного расчета сечения аннигиляции $\sigma_{\nu\bar{\nu}}^{(B)}$ (19), (23) в процессе (1) и величины $\mathcal{P}^\alpha$ (31) в процессе (2).

Начиная обсуждение с реакции аннигиляции (1), отметим, что сечение процесса существенно зависит от напряженности магнитного поля. Чтобы проиллюстрировать эту зависимость, проанализируем сечение $\sigma_{\nu\bar{\nu}}^{(A)}$ в асимптотике сверхсильного магнитного поля (9). Его нетрудно получить из амплитуды $M_{\nu \rightarrow \nu ee}$, приведенной в работе [6], в асимптотике (9).

Сравнение $\sigma_{\nu\bar{\nu}}^{(A)}$ с сечением $\sigma_{\nu\bar{\nu}}^{(0)}$ в вакууме

$$\frac{\sigma_{\nu\bar{\nu}}^{(A)}}{\sigma_{\nu\bar{\nu}}^{(0)}} \sim \left(\frac{\beta}{m_e^2} \right) \left(\frac{m_e^2}{q^2} \right)^2 \quad (32)$$

показывает существенное подавление сечения процесса аннигиляции в асимптотике сверхсильного магнитного поля (9). Логично предположить, что сечение $\sigma_{\nu\bar{\nu}}^{(B)}$, определяемое в слабом магнитном поле выражением (10), должно уменьшаться с ростом напряженности поля и существенно подавляться в асимптотике сверхсильного магнитного поля. Такое подавление в сверхсильных полях имеет место и для кроссинг-процесса $e^+ + e^- \rightarrow \nu + \bar{\nu}$, оно изучалось нами ранее [12].

Выяснено, что для нейтрино высоких энергий ($\omega^2 \gg m_e^2$) подавление происходит лишь при $\beta \gtrsim 10^3 m_e^2$ ($B \gtrsim 4 \cdot 10^{16}$ Гс). Такие напряженности магнитного поля не могут быть реализованы в гипераккреционном замагниченном диске керровской черной дыры. Однако остается вопрос о модификации сечения $\sigma_{\nu\bar{\nu}}^{(B)}$ при переходе из области слабого поля (6) в область умеренно сильного поля (7). Отметим, что “полевой” вклад в сечение $\sigma_{\nu\bar{\nu}}^{(B)}$, как следует из (29), $F_{\nu\bar{\nu}} \sim \delta$, где малый параметр δ определяется следующим образом:

$$\delta = \left(\frac{q^2}{q_\perp^2} \right) \left(\frac{\beta}{q^2} \right)^2.$$

Предполагая, что в процессе (1) $\omega \approx \omega'$, получим

$$\delta \sim \left(\frac{\beta}{q^2} \right)^2.$$

При типичных значениях $\omega^2 \sim 10^3 m_e^2$, $B_{\max} = 10^{15}$ Гс получаем, что $\delta_{\max} \sim 10^{-2}$. Таким образом, ясно, что сечение аннигиляции $\sigma_{\nu\bar{\nu}}^{(0)}$ (10) модифицируется при переходе в область (7) на величину, не превышающую нескольких процентов. В численных оценках функции $F_{\nu\bar{\nu}}(q_\perp/2\beta)$ предполагалось, что $\omega \simeq \omega'$, $\bar{q}_\perp^2 \simeq \bar{q}^2 \simeq 2\omega^2$, $\bar{q}_\perp^2/2\beta \simeq \omega^2/\beta$. Как следует из [10], энергии нейтрино, излучаемых из внутренней части диска, соответствуют интервалу

$$400m_e^2 \leq \omega^2 \leq 900m_e^2.$$

Рис. 1. Зависимость $F_{\nu\bar{\nu}}(X)$ в интервале (34).

Разумно предположить, что поле в этой же части диска убывает по некоторому закону, пробегаая интервал значений

$$10^{14} \text{ Гс} \leq B(r) \leq 10^{15} \text{ Гс}. \quad (33)$$

Совместно эти условия приводят к следующей области изменения X :

$$40 \leq X \leq 200. \quad (34)$$

На рис. 1 представлена функция $F_{\nu\bar{\nu}}(X)$ в интервале (34) изменения переменной X , который соответствует реалистичному распределению магнитного поля в сильно замагниченном диске. Как следует из приведенного графика, функция $F_{\nu\bar{\nu}}(X)$ сильно осциллирует, плавно уменьшаясь по модулю с ростом X . Такое поведение функций связано с тем, что $\Phi(z)$, $\Phi'(z)$, $\text{Im } f_1(z)$ осциллируют в области $z < 0$, причем частота осцилляций быстро нарастает с ростом $|z|$. Как нами было показано из качественных соображений, в области $X \gtrsim 40$ амплитуда функции не превышает нескольких процентов.

Процесс (2), кинематически запрещенный в вакууме, постепенно увеличивает свой фазовый объем, так что величина $\dot{\mathcal{P}}^\alpha$ (15) в области (6) описывается выражением (11), в области (7) – выражением (31), в области (8) – формулой для сильного магнитного поля [6]:

$$\dot{\mathcal{P}}_{\text{sf}}^\alpha = \frac{G_{\text{F}}^2 (C_{\text{v}}^2 + C_{\text{a}}^2)}{48\pi^3} \frac{\beta k_{\perp}^4}{\omega} f(X) \left\{ k^\alpha - \frac{2C_{\text{v}}^2 C_{\text{a}}^2}{C_{\text{v}}^2 + C_{\text{a}}^2} (k\tilde{\varphi})^\alpha \right\}, \quad (35)$$

где

$$f(X) = 6 \int_0^1 dy y (1 - y^2)^2 e^{-X(1+y^2)/2} I_0(Xy),$$

$I_0(z)$ – модифицированная функция Бесселя. Асимптотика сверхсильного магнитного поля (9) легко получается из (35) при переходе к пределу $X \rightarrow 0$, поскольку $f(X \rightarrow 0) \rightarrow 1$. Из сравнения выражений (11), (31), (35) следует, что в относительно

слабом и умеренном магнитном поле $\dot{\mathcal{P}}^\alpha \sim G_F^2 \beta^2 k_\perp^2$, в пределе сильного магнитного поля значение выходит на линейную по полю асимптотику $\dot{\mathcal{P}}^\alpha \sim G_F^2 \beta (k_\perp^2)^2$. Напомним, что в работе [7] при оценке эффективности производства e^+e^- -плазмы в реакции (2) использовалось выражение (11) для $\dot{\mathcal{P}}^\alpha$ в относительно слабых магнитных полях и при значениях $X \sim 100$. Нами выяснено, что в области (7) умеренно сильного магнитного поля (параметр $X \sim 10$) для $\dot{\mathcal{P}}^\alpha$ справедливо выражение (31). Чтобы оценить модификацию этой физической величины при переходе из области (6) в область (7) (что означает уменьшение параметра X от сотен до десятков), нами предлагается следующее. Аппроксимируем значения констант C_1, C_2, C_3 в выражении (28), вычисляя интегралы (29), (30) в области $20 \lesssim X \lesssim 200$. Проведенный численный анализ приводит к следующим аппроксимационным значениям:

$$C_1 \simeq 0.23, \quad C_2 \simeq -2.62, \quad C_3 \simeq -0.91. \quad (36)$$

Из формул (11), (31), (35) определяем два отношения:

$$R_1(X) = \frac{\dot{\mathcal{P}}_{\text{mf}}^0}{\dot{\mathcal{P}}_{\text{cf}}^0} = \frac{4(\ln X + C_1 + C_2 X^{-2/3})}{\ln X + 3 \ln b(X) - 3.776}, \quad (37)$$

$$R_2(X) = \frac{\dot{\mathcal{P}}_{\text{sf}}^0}{\dot{\mathcal{P}}_{\text{cf}}^0} = \frac{18}{7} \frac{X f(X)}{\ln X + 3 \ln b(X) - 3.776}, \quad (38)$$

где $b = \beta/m_e^2$, $X = k_\perp^2/\beta$.

Один из основных выводов работы [7] состоит в том, что эффективность производства e^+e^- -плазмы нейтриноизлучающей частью аккреционного диска в процессе (2) пренебрежимо мала по сравнению с эффективностью производства в процессе (1). Отметим, что к этому категоричному выводу следует относиться с определенной долей осторожности. Действительно, предположим, что магнитное поле распределено по нейтриноизлучающей части диска в интервале напряженности (33), что определяет интервал изменения переменной X (34). Предположим также, что распределение магнитного поля аналогично распределению в моделях с магниторотационной неустойчивостью плазмы [13]:

$$b(r) = b_1 + \frac{b_2}{r}, \quad (39)$$

для параметра X выберем линейный закон:

$$X(r) = x_1 + x_2 r. \quad (40)$$

В таком случае, используя условия (33) и (34), мы определяем функцию $b(X)$ и подставляем ее в выражение для $R_1(X)$ (37).

Закон изменения $b(X)$ в интервале (34) представлен на рис. 2. На рис. 3 представлено отношение $R_1(X)$ в интервале (34) с учетом зависимости $b = b(X)$. Как следует из этого графика, формула (31) дает в некоторой области X больший (с фактором 2–3) выход энергии в e^+e^- -парах по сравнению с формулой (11). Если задаться более резкими законами изменения $b(r)$, $X(r)$, это превышение может быть более существенным. Таким образом, вопрос об эффективности производства плазмы в процессе (2) требует дополнительного исследования. В частности, необходимо задать реалистичное распределение магнитного поля в нейтриноизлучающей части сильно замагниченного аккреционного диска.

Рис. 2. Зависимость $b(X)$ от параметра $X(r)$ (40) при законе распределения магнитного поля $b(r)$ (39).

Рис. 3. Зависимость $R_1(X)$ при заданном распределении магнитного поля в диске $b(X)$ (см. рис. 2).

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе изучается влияние сильного магнитного поля $B \gg B_c$ на сечение $\sigma_{\nu\bar{\nu}}^{(B)}$ аннигиляции пары нейтрино в процессе $\nu_i + \bar{\nu}_i \xrightarrow{B} e^+ + e^-$ и скорости производства 4-импульса в единицу времени на одно нейтрино $\dot{P}^\alpha$ в e^+e^- -парах в процессе $\nu_i(\bar{\nu}_i) \xrightarrow{B} \nu_i(\bar{\nu}_i) + e^+ + e^-$. В частности, эти величины впервые вычислены в случае (анти)нейтрино высоких энергий при умеренно сильном магнитном поле $\omega^2 \gg eB \gg m_e^2$, наиболее реалистичном для нейтриноизлучающей части гипераккреционного сильно замагниченного диска с достаточно высокими скоростями аккреции. Метод и результаты вычисления $\sigma_{\nu\bar{\nu}}^{(B)}$, $\dot{P}^\alpha$ изложены в разделе 3. Индуцированный полем вклад в сечение $\sigma_{\nu\bar{\nu}}^{(B)}$ представлен в виде ряда по степеням малого параметра $\delta = (q^2/q_\perp^2)(\beta/q^2)^2$. Интеграл по импульсу конечного нейтрино в выра-

жении (15) для $\dot{P}^\alpha$ вычислен путем разложения в ряд по степеням малого параметра $X^{-2/3} = (\beta/k_\perp^2)^{2/3}$. Полученные результаты (формулы (19), (23), (31)) сравниваются численно в разделе 4 с использованными в работе [7] сечением $\sigma_{\nu\bar{\nu}}^{(0)}$ в вакууме и величиной $\dot{P}_{\text{cf}}^\alpha$, полученной в приближении скрещенного поля $\omega^2 \gg eB \gtrsim m_e^2$. Такое сравнение позволяет сделать следующие выводы.

1. В случае нейтрино высоких энергий в дисках с достаточно сильным магнитным полем $\omega^2, \omega'^2 \gg eB \gg m_e^2$ корректно использовать сечение $\sigma_{\nu\bar{\nu}}^{(0)}$ процесса аннигиляции в вакууме, поскольку индуцированный полем вклад в сечение реакции пренебрежимо мал.

2. Используемая авторами [7] оценка магнитного поля не позволяет сделать категоричного вывода о пренебрежимо малом вкладе процесса (2) в производство электрон-позитронной плазмы (см. модель с распределением магнитного поля по диску и рис. 2, рис. 3). Для того чтобы сделать окончательный вывод об эффективности производства плазмы в процессе (2), необходимо задать закон распределения магнитного поля по основной нейтриноизлучающей части диска и использовать в вычислении эффективности производства плазмы полученную нами формулу (31).

В заключение мы хотим отдать дань светлой памяти профессора Николая Владимировича Михеева, с которым неоднократно обсуждались принципиальные моменты данной работы.

Благодарности. Работа Е. В. Осокиной выполнена в рамках базовой части государственного задания на НИР ЯрГУ (проект № 92) при поддержке РФФИ (проект № 14-02-00233_a).

Список литературы

- [1] V. S. Berezhinskii, O. F. Prilutskii, *Astron. Astrophys.*, **175** (1987), 309–311; J. Cooperstein, L. J. van der Horn, E. Baron, *Astrophys. J.*, **321** (1987), L129–L132.
- [2] Э. А. Чобан, А. Н. Иванов, *ЖЭТФ*, **56**:1 (1969), 194–200.
- [3] А. В. Борисов, В. Ч. Жуковский, Б. А. Лысов, *Изв. вузов. Физика*, **26**:8 (1983), 30–34.
- [4] М. Ю. Книжников, А. В. Татаринцев, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 3. Физика. Астрономия*, **25** (1984), 26–30.
- [5] A. V. Borisov, A. I. Ternov, V. Ch. Zhukovsky, *Phys. Lett. B*, **318**:3 (1993), 489–491.
- [6] А. В. Кузнецов, Н. В. Михеев, *ЯФ*, **60**:11 (1997), 2038–2047.
- [7] I. Zalamea, A. M. Beloborodov, *MNRAS*, **410**:4 (2011), 2302–2308.
- [8] T. Piran, *Rev. Modern Phys.*, **76**:4 (2004), 1143–1210; P. Meszaros, *Rep. Prog. Phys.*, **69**:8 (2006), 2259–2321.
- [9] T. Di Matteo, R. Perna, R. Narayan, *Astrophys. J.*, **579**:2 (2002), 706–715; K. Kohri, S. Mineshige, *Astrophys. J.*, **577**:1 (2002), 311–321; J. Pruet, S. E. Woosley, R. D. Hoffman, *Astrophys. J.*, **586**:2 (2003), 1254–1261; K. Kohri, R. Narayan, T. Piran, *Astrophys. J.*, **629**:1 (2003), 341–361.
- [10] W.-X. Chen, A. M. Beloborodov, *Astrophys. J.*, **657** (2007), 383–399.
- [11] A. V. Kuznetsov, N. V. Mikheev, *Electroweak Processes in External Electromagnetic Fields*, Springer, New York, 2003.
- [12] А. А. Гвоздев, Е. В. Осокина, *ТМФ*, **170**:3 (2012), 423–447; А. А. Гвоздев, И. С. Огнев, Е. В. Осокина, *Письма в Астрон. журн.*, **37**:5 (2011), 365–376.
- [13] S. A. Balbus, J. F. Hawley, *Rev. Modern Phys.*, **70**:1 (1998), 1–53.

Поступила в редакцию 15.12.2014,
после доработки 25.03.2015