Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ф. Али, Т. Ферозе, С. Али, Полная классификация сферически-симметричных статических пространств-времен с помощью симметрий Нётер, *ТМФ*, 2015, том 184, номер 1, 92–105

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8846>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.97.219

26 апреля 2023 г., 10:47:25

© 2015 г.

Ф. Али*, Т. Ферозе*, С. Али†

ПОЛНАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ СФЕРИЧЕСКИ-СИММЕТРИЧНЫХ СТАТИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ-ВРЕМЕН С ПОМОЩЬЮ СИММЕТРИЙ НЁТЕР

Приведена полная классификация сферически-симметричных статических пространств-времен по их симметриям Нётер. Уравнения, определяющие симметрии Нётер, получены с помощью обычного лагранжиана общего сферически-симметричного пространства-времени и интегрируются в каждом рассмотренном случае. В частности, обнаружено, что сферически-симметричные статические пространства-времена можно распределить по шести различным классам, соответствующим алгебрам Нётер размерностей 5, 6, 7, 9, 11 и 17. С помощью теоремы Нётер найдены также первые интегралы, соответствующие каждой симметрии. Кроме того, получены некоторые новые сферически-симметричные статические решения.

Ключевые слова: симметрии Нётер, статическое пространство-время.

DOI: 10.4213/tmf8846

1. ВВЕДЕНИЕ

Впервые точное решение полевых уравнений Эйнштейна получено Шварцшильдом и представляет собой сферически-симметричное статическое решение. Для сферически-симметричного пространства-времени существуют в точности три вращательных векторных поля Киллинга, сохраняющих метрику, которая задает группу $SO(3)$ как изометрическую группу симметрий указанных пространств-времен. Интерес к изучению сферически-симметричных пространств-времен объясняется тем, что оно помогает понять явления гравитационного коллапса и черных дыр, широко известные в литературе. Например, решение Шварцшильда – это нетривиальное точное сферически-симметричное решение полевых уравнений Эйнштейна, которое описывает гравитационную оболочку статического сферического незаряженного массивного тела без углового момента и изолированного от всех других массивных тел.

*School of Natural Sciences, National University of Sciences and Technology, Islamabad, Pakistan. E-mail: tferoze@sns.nust.edu.pk

†School of Electrical Engineering and Computer Science, National University of Sciences and Technology, Islamabad, Pakistan

Поиск сферически-симметричных пространств-времен является важной задачей, и, ввиду значимости таких пространств-времен для понимания динамики в окрестности черной дыры, актуальной становится их классификация по физическим свойствам. По этой причине было бы интересно знать общий вид этих пространств-времен наряду с подробной характеристикой первых интегралов соответствующих геодезических уравнений. Кроме того, величины, инвариантные вдоль геодезических, несут важную физическую информацию. Классификация плоских, цилиндрических и сферически-симметричных пространств-времен по их векторам Киллинга, гомотетиям, коллинеациям Риччи, коллинеациям кривизны проведена в работах [1]–[7].

В работе [8], а также в статье [9] связь между симметриями уравнений для геодезических и векторами Киллинга соответствующих пространств была найдена путем сравнения алгебр Ли двух семейств симметрий. Симметрии Нётер, будучи расширенным множеством векторов Киллинга, несут больше информации об инвариантах/сохраняющихся величинах. В ряде работ [10]–[12] были получены симметрии Нётер для различных метрик пространства-времени. Основной целью этих работ было найти связь между симметриями Нётер и векторами Киллинга. Чтобы установить эту связь, авторы работ [10]–[12] нашли алгебру Ли симметрий Нётер и затем сравнили эту алгебру с алгеброй изометрий. В своей недавней статье [13] Али и др. применили метод симметрий для проведения полной классификации лагранжевых плоско-симметричных статических пространств-времен, используя симметрии Нётер, а также предъявили первые интегралы/сохраняющиеся величины для каждого случая.

В дифференциальной геометрии вводится лагранжиан, порождающий уравнения геодезических (в виде уравнений Эйлера–Лагранжа). Лагранжиан можно получить непосредственно из элемента длины [14]

$$ds^2 = g_{ab}(x^c) dx^a dx^b,$$

а именно

$$L = g_{ab}(x^c) \dot{x}^a \dot{x}^b.$$

В настоящей работе мы воспользуемся методами симметрий для проведения полной классификации сферически-симметричных статических пространств-времен по симметриям Нётер. Далее применим известную теорему Нётер и выпишем первые интегралы для каждого пространства-времени. Таким образом будут воспроизведены все известные решения полевых уравнений Эйнштейна и симметрии Нётер наряду с их первыми интегралами.

План статьи таков. В разделе 2 мы даем основные определения и описываем структуру симметрий Нётер. В разделе 3 мы выписываем систему определяющих уравнений для сферически-симметричного статического пространства-времени, которая представляет собой систему из девятнадцати линейных дифференциальных уравнений в частных производных (ДУЧП). Интегрируя эти ДУЧП, мы получаем различные значения метрических коэффициентов. Это приводит к полной классификации сферически-симметричных статических пространств-времен по симметриям Нётер. В этом же разделе получены и соответствующие первые интегралы. Раздел 4 содержит заключение.

2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Симметрия

$$\mathbf{X} = \xi \frac{\partial}{\partial s} + \eta^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

является симметрией Нётер в том случае, когда она оставляет действие

$$W = \int L(s, x^i(s), \dot{x}^i(s)) ds \quad (1)$$

инвариантным с точностью до некоторой калибровочной функции A [14], т. е. под воздействием преобразования

$$\begin{aligned} \tilde{s} &= s + \epsilon \xi(s, x^i), \\ \tilde{x}^i &= x^i + \epsilon \eta^i(s, x^i) \end{aligned}$$

действие, представленное выражением (1), принимает вид

$$\widetilde{W} = \int L(\tilde{s}, \tilde{x}^i(s), \dot{\tilde{x}}^i(s)) ds,$$

где L – лагранжиан, s – независимая переменная, x^i – зависимые переменные и $\dot{x}^i$ – их производные по s . Вариация с точностью до калибровочной функции имеет вид

$$\widetilde{W} - W = \int \mathbf{D}A(s, x^i(s)) ds, \quad (2)$$

где $\mathbf{D}$ – обычный оператор полной производной вида

$$\mathbf{D} = \frac{\partial}{\partial s} + \dot{x}^i \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Равенство (2) можно переписать следующим образом:

$$\mathbf{X}^{(1)}L + \mathbf{D}(\xi)L = \mathbf{D}A, \quad (3)$$

где

$$\mathbf{X}^{(1)} = \mathbf{X} + \eta^i_{,s} \frac{\partial}{\partial x^i}$$

есть продолженный генератор первого порядка. Коэффициенты симметрии Нётер, а именно ξ и η^i , являются функциями от s и x^i . Коэффициенты $\eta^i_{,s}$ продолженного оператора $\mathbf{X}^{(1)}$ представляют собой функции от s , $x^i(s)$ и $\dot{x}^i(s)$ и определяются выражениями вида

$$\eta^i_{,s} = \mathbf{D}(\eta^i) - \dot{x}^i \mathbf{D}(\xi),$$

где переменная x^i относится к пространству зависимых переменных.

Используя те же отождествления, приходим к знаменитой *теореме Нётер*. Если $\mathbf{X}$ – симметрия Нётер данного лагранжиана L по отношению к калибровочной функции A , тогда величина

$$I = A - \left(\xi L + (\eta^i - \xi \dot{x}^i) \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} \right),$$

называемая первым интегралом, аннигилируется оператором полной производной, т. е. $\mathbf{D}I = 0$. Другими словами, для каждой симметрии Нётер существует закон сохранения/первый интеграл [15]. Например, генераторы временных трансляций $\partial/\partial t$ и вращения $\partial/\partial\theta$ порождают соответственно законы сохранения энергии и момента импульса.

Сферически-симметричное статическое пространство-время в общем случае имеет вид [3]

$$ds^2 = e^{\nu(r)} dt^2 - e^{\mu(r)} dr^2 - e^{\lambda(r)} d\Omega^2, \quad (4)$$

где $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$, а ν и μ – произвольные функции радиальной координаты r . В частности, для сферически-симметричных пространств-времен в качестве независимых переменных x^i , $i = 0, 1, 2, 3$, выступают переменные (t, r, θ, ϕ) . Очевидно, что $e^{\lambda(r)}$ можно представить в одной из двух форм: как β^2 или r^2 , где β – некоторая постоянная [2], мы включили β^2 в определение $d\Omega^2$.

Выпишем определяющие уравнения с помощью соответствующего лагранжиана указанного выше пространства-времени и в каждом случае рассмотрим вопрос о полной интегрируемости этих уравнений. Обычный лагранжиан L для сферически-симметричного пространства-времени имеет вид

$$L = e^{\nu(r)} \dot{t}^2 - e^{\mu(r)} \dot{r}^2 - e^{\lambda(r)} (\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta \dot{\phi}^2), \quad (5)$$

где точкой обозначена производная по параметру s длины дуги. Для такого лагранжиана генератор симметрий Нётер принимает вид

$$\mathbf{X}^{(1)} = \xi \frac{\partial}{\partial s} + \eta^0 \frac{\partial}{\partial t} + \eta^1 \frac{\partial}{\partial r} + \eta^2 \frac{\partial}{\partial \theta} + \eta^3 \frac{\partial}{\partial \phi} + \eta_{,s}^0 \frac{\partial}{\partial \dot{t}} + \eta_{,s}^1 \frac{\partial}{\partial \dot{r}} + \eta_{,s}^2 \frac{\partial}{\partial \dot{\theta}} + \eta_{,s}^3 \frac{\partial}{\partial \dot{\phi}},$$

а оператор $\mathbf{D}$ таков:

$$\mathbf{D} = \frac{\partial}{\partial s} + \dot{t} \frac{\partial}{\partial t} + \dot{r} \frac{\partial}{\partial r} + \dot{\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} + \dot{\phi} \frac{\partial}{\partial \phi}.$$

3. КЛАССИФИКАЦИЯ РЕЗУЛЬТАТОВ И ПОЯСНЕНИЯ К ВЫЧИСЛЕНИЯМ

Подставляя выражение (5) для лагранжиана в уравнение (3) и сравнивая коэффициенты перед всеми мономерами, получим следующую систему девятнадцати линейных ДУЧП:

$$\begin{aligned} \xi_t &= 0, & \xi_r &= 0, & \xi_\theta &= 0, & \xi_\phi &= 0, \\ A_s &= 0, & A_t - 2e^{\nu(r)}\eta_s^0 &= 0, & A_r + 2\eta_s^1 &= 0, \\ A_\theta + 2e^{\mu(r)}\eta_s^2 &= 0, & A_\phi + 2e^{\mu(r)}\eta_s^3 &= 0, \\ \xi_s - \mu_r\eta^1 - 2\eta_r^1 &= 0, & \xi_s - \nu_r\eta^1 - 2\eta_t^0 &= 0, \\ \xi_s - \frac{2}{r}\eta^1 - 2\eta_\theta^2 &= 0, & \xi_s - \frac{2}{r}\eta^1 - 2\operatorname{ctg}\theta\eta^2 - 2\eta_\phi^3 &= 0, \\ \eta_\phi^2 + \sin^2\theta\eta_\theta^3 &= 0, & e^{\nu(r)}\eta_r^0 - e^{\mu(r)}\eta_t^1 &= 0, \\ e^{\mu(r)}\eta_\theta^1 + r^2\eta_r^2 &= 0, & e^{\nu(r)}\eta_\theta^0 - r^2\eta_t^2 &= 0, \\ e^{\nu(r)}\eta_\phi^0 - r^2\sin^2\theta\eta_t^3 &= 0, & e^{\mu(r)}\eta_\phi^1 + r^2\sin^2\theta\eta_r^3 &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Мы намерены провести классификацию всех сферически-симметричных статических пространств-времен по их симметриям Нётер путем нахождения решений выписанной системы ДУЧП.

При решении системы (6) мы воспользовались программой компьютерной алгебры `Maple-17` и выделили все возможные случаи с помощью замечательного алгоритма `rifsimp`, который по существу является обобщением метода исключений Гаусса и метода базисов Грёбнера и используется для упрощения переопределенной системы полиномиальных нелинейных ДУЧП (или обыкновенных дифференциальных уравнений) и неравенств путем преобразования их к удобной форме.

Далее мы перечислим сферически-симметричные статические пространства-времена, их симметрии Нётер и соответствующие первые интегралы. Мы также представим алгебру Нётер симметрий Нётер для случаев, неизвестных в литературе.

Приступая к решению системы ДУЧП (6), отметим, что первое уравнение означает просто, что ξ может зависеть только от параметра длины дуги, т.е. $\xi = \xi(s)$. Чтобы отличать векторные поля Киллинга от симметрий Нётер, будем использовать разные буквы: те симметрии Нётер, которые не являются векторными полями Киллинга, обозначим как $\mathbf{Y}$. Заметим также, что статическое пространство-время всегда допускает времениподобное векторное поле Киллинга. Кроме того, лагранжиан (5) не зависит явно от t , поэтому в каждом случае времениподобное векторное поле Киллинга появляется в качестве симметрии Нётер. Более того, лагранжиан (5) сферически-симметричный, поэтому каждое пространство-время изначально допускает существование алгебры Ли $so(3)$ векторных полей Киллинга, соответствующей группе Ли $SO(3)$. Здесь также важно отметить, что статическое пространство-время всегда допускает времениподобное векторное поле Киллинга. Таким образом, симметрии

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_0 &= \frac{\partial}{\partial t}, & \mathbf{Y}_0 &= \frac{\partial}{\partial s}, \\ \mathbf{X}_1 &= \frac{\partial}{\partial \phi}, & \mathbf{X}_2 &= \cos \phi \frac{\partial}{\partial \theta} - \operatorname{ctg} \theta \sin \phi \frac{\partial}{\partial \phi}, & \mathbf{X}_3 &= \sin \phi \frac{\partial}{\partial \theta} + \operatorname{ctg} \theta \cos \phi \frac{\partial}{\partial \phi} \end{aligned}$$

составляют базис минимальной пятимерной алгебры Нётер, в которой $\mathbf{Y}_0$ не является векторным полем Киллинга сферически-симметричного пространства-времени (4). Алгебра Нётер этих пяти симметрий Нётер задается как

$$\begin{aligned} [\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2] &= -\mathbf{X}_3, & [\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_3] &= \mathbf{X}_2, & [\mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3] &= -\mathbf{X}_1, \\ [\mathbf{X}_i, \mathbf{X}_0] &= 0, & [\mathbf{X}_i, \mathbf{Y}_0] &= 0 & \text{в остальных случаях} \end{aligned}$$

и отождествляется с соответствующей группой $SO(3) \times \mathbb{R}^2$.

3.1. Случай сферически-симметричных статических пространств-времен с пятью симметриями Нётер. Некоторые примеры пространств-времен, допускающих минимальный набор симметрий Нётер (пять симметрий) и появившихся в процессе вычислений, даны в табл. 1.

Симметрии Нётер и соответствующие первые интегралы с постоянным значением калибровочной функции, $A = \text{const}$, перечислены в табл. 2.

Таблица 1. Выражения для μ и ν .

№	$\nu(r)$	$\mu(r)$
1.	$\ln\left(\frac{r}{\alpha}\right)^2$	произвольная функция
2.	$\ln\left(1 - \left(\frac{r}{\alpha}\right)^2\right)$	произвольная функция
3.	$\ln\left(\frac{r}{\alpha}\right)^2$	$-\ln\left(1 - \left(\frac{r}{\alpha}\right)^2\right)$
4.	произвольная функция	$-\ln\left(1 - \left(\frac{r}{\alpha}\right)^2\right)$
5.	$\ln\left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)$	$-\ln\left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)$

Таблица 2. Первые интегралы для пяти симметрий Нётер.

Симметрия	Первый интеграл
$\mathbf{X}_0$	$\phi_0 = e^{\nu(r)}\dot{t}$
$\mathbf{X}_1$	$\phi_1 = r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}$
$\mathbf{X}_2$	$\phi_2 = r^2(\cos \phi \dot{\theta} - \operatorname{ctg} \theta \sin \phi \dot{\phi})$
$\mathbf{X}_3$	$\phi_3 = r^2(\sin \phi \dot{\theta} + \operatorname{ctg} \theta \cos \phi \dot{\phi})$
$\mathbf{Y}_0$	$\phi_4 = e^{\nu(r)}\dot{t}^2 - e^{\mu(r)}\dot{r}^2 - r^2(\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\phi}^2)$

3.2. Случай сферически-симметричных статических пространств-времен с шестью симметриями Нётер. Существуют два различных класса сферически-симметричных статических пространств-времен, допускающих шесть симметрий Нётер. В частности, мы получили пространство-время

$$ds^2 = \left(\frac{r}{a}\right)^\alpha dt^2 - dr^2 - r^2 d\Omega^2, \quad \alpha \neq 0, 2,$$

которое, кроме минимальной пятимерной алгебры Нётер, допускает также и дополнительную симметрию Нётер. Эта симметрия соответствует преобразованию масштаба $(s, t, r) \rightarrow (\lambda s, \lambda^p t, \lambda^{1/2} r)$ и имеет вид

$$\mathbf{Y}_1 = s \frac{\partial}{\partial s} + pt \frac{\partial}{\partial t} + \frac{r}{2} \frac{\partial}{\partial r}, \quad p = \frac{2 - \alpha}{4},$$

В результате мы имеем шестимерную алгебру Нётер. Это порождает масштабнo-инвариантное сферически-симметричное статическое пространство-время. Соответствующий первый интеграл записывается как

$$\phi_6 = s \left(\left(\frac{r}{a}\right)^\alpha \dot{t}^2 - \dot{r}^2 - r^2(\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\phi}^2) \right) + \frac{\alpha - 2}{2} \left(\frac{r}{a}\right)^2 t \dot{t} + r \dot{r}. \quad (7)$$

Другое пространство-время с шестимерной алгеброй Нётер имеет вид

$$ds^2 = dt^2 - e^{\mu(r)} dr^2 - r^2 d\Omega^2, \quad \mu(r) \neq \ln\left(1 - \frac{r^2}{b^2}\right)^{-1}, \quad \mu(r) \neq \text{const},$$

и обладает дополнительной симметрией Нётер относительно нетривиального калибровочного члена

$$\mathbf{Y}_1 = s \frac{\partial}{\partial t}, \quad A = 2t.$$

Симметрии $\mathbf{Y}_1$ соответствует первый интеграл $\phi_6 = t - st$.

3.3. Случай сферически-симметричных статических пространств-времен с семью симметриями Нётер. Существуют пять пространств-времен с семью симметриями Нётер, в четырех из которых содержится группа из шести векторных полей Киллинга, и одно содержит только минимальную группу векторов Киллинга, остальные две симметрии являются симметриями Нётер. Их мы обсудим отдельно. Четыре метрики запишем в виде

$$ds^2 = e^{r/b} dt^2 - dr^2 - d\Omega^2, \quad b \neq 0, \quad (8)$$

$$ds^2 = \sec^2 \frac{r}{a} dt^2 - \sec^2 \frac{r}{a} dr^2 - d\Omega^2, \quad a \neq 0, \quad (9)$$

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r^2}{b^2}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{r^2}{b^2}\right)^{-1} dr^2 - d\Omega^2, \quad b \neq 0, \quad (10)$$

$$ds^2 = \frac{\alpha^2}{r^2} dt^2 - \frac{\alpha^2}{r^2} dr^2 - d\Omega^2, \quad \alpha \neq 0. \quad (11)$$

Наряду с минимальным набором симметрий они содержат по две дополнительные симметрии:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_{4,1} &= t \frac{\partial}{\partial r} - b \left(e^{-r/b} + \frac{t^2}{4b^2} \right) \frac{\partial}{\partial t}, & \mathbf{X}_{5,1} &= \frac{\partial}{\partial r} - \frac{t}{2b} \frac{\partial}{\partial t}, \\ \mathbf{X}_{4,2} &= \sin \frac{r}{a} \cos \frac{t}{a} \frac{\partial}{\partial t} + \sin \frac{t}{a} \cos \frac{r}{a} \frac{\partial}{\partial r}, & \mathbf{X}_{5,2} &= \cos \frac{t}{a} \cos \frac{r}{a} \frac{\partial}{\partial r} - \sin \frac{r}{a} \sin \frac{t}{a} \frac{\partial}{\partial t}, \\ \mathbf{X}_{4,3} &= -\frac{rbe^{t/b}}{\sqrt{r^2 - b^2}} \frac{\partial}{\partial t} + \sqrt{r^2 - b^2} e^{t/b} \frac{\partial}{\partial r}, & \mathbf{X}_{5,3} &= \frac{rbe^{-t/b}}{\sqrt{r^2 - b^2}} \frac{\partial}{\partial t} + \sqrt{r^2 - b^2} e^{-t/b} \frac{\partial}{\partial r}, \\ \mathbf{X}_{4,4} &= \frac{t^2 + r^2}{2} \frac{\partial}{\partial t} + rt \frac{\partial}{\partial r}, & \mathbf{X}_{5,4} &= t \frac{\partial}{\partial t} + r \frac{\partial}{\partial r}, \end{aligned}$$

где новый индекс относится к различным случаям, чего мы придерживаемся в дальнейшем.

Соответствующие первые интегралы перечислены в табл. 3.

Алгебра Ли симметрий метрики (9) имеет вид

$$\begin{aligned} [\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2] &= -\mathbf{X}_3, & [\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_3] &= \mathbf{X}_2, & [\mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3] &= -\mathbf{X}_1, \\ [\mathbf{X}_0, \mathbf{X}_{4,2}] &= \frac{1}{a} \mathbf{X}_{5,2}, & [\mathbf{X}_0, \mathbf{X}_{5,2}] &= -\frac{1}{a} \mathbf{X}_{4,2}, \\ [\mathbf{X}_i, \mathbf{X}_j] &= 0, & [\mathbf{X}_i, \mathbf{Y}_0] &= 0 \quad \text{в остальных случаях.} \end{aligned}$$

ТАБЛИЦА 3. Первые интегралы для семи симметрий Нётер.

Симметрия	Первый интеграл
$\mathbf{X}_{4,1}$	$\phi_5 = b\left(1 + \frac{t^2 e^{r/b}}{4b^2}\right)\dot{t} + t\dot{r}$
$\mathbf{X}_{5,1}$	$\phi_6 = \frac{te^{r/b}}{b}\dot{t} + 2\dot{r}$
$\mathbf{X}_{4,2}$	$\phi_5 = \sec^2 \frac{r}{a}\left(\dot{t} \sin \frac{r}{a} \cos \frac{t}{a} - \dot{r} \sin \frac{t}{a} \cos \frac{r}{a}\right)$
$\mathbf{X}_{5,2}$	$\phi_6 = -\sec^2 \frac{r}{a}\left(\dot{t} \sin \frac{r}{a} \sin \frac{t}{a} + \dot{r} \cos \frac{t}{a} \cos \frac{r}{a}\right)$
$\mathbf{X}_{4,3}$	$\phi_5 = e^{t/b}\left(\frac{r\dot{t}\sqrt{r^2 - b^2}}{b} + \frac{b^2\dot{r}}{\sqrt{r^2 - b^2}}\right)$
$\mathbf{X}_{5,3}$	$\phi_6 = e^{t/b}\left(-\frac{r\dot{t}\sqrt{r^2 - b^2}}{b} + \frac{b^2\dot{r}}{\sqrt{r^2 - b^2}}\right)$
$\mathbf{X}_{4,4}$	$\phi_5 = \frac{(t^2 + r^2)\dot{t}}{r^2} + \frac{t\dot{r}}{r}$
$\mathbf{X}_{5,4}$	$\phi_6 = 2\left(\frac{t\dot{t}}{r^2} - \dot{r}r\right)$
$\mathbf{Y}_1$	$\phi_5 = sL - r\dot{r} + 2s\dot{r}^2$
$\mathbf{Y}_2$	$\phi_6 = 2s^2L + 2(s\dot{r}^2 - sr\dot{r}) + r^2$

Алгебра Ли симметрий метрики (10) имеет вид

$$\begin{aligned}
 [\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2] &= -\mathbf{X}_3, & [\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_3] &= \mathbf{X}_2, & [\mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3] &= -\mathbf{X}_1, \\
 [\mathbf{X}_0, \mathbf{X}_{4,4}] &= \mathbf{X}_{5,4}, & [\mathbf{X}_{4,4}, \mathbf{X}_{5,4}] &= -\mathbf{X}_{4,4}, \\
 [\mathbf{X}_0, \mathbf{X}_{5,4}] &= \mathbf{X}_0, & [\mathbf{X}_i, \mathbf{X}_j] &= 0, & [\mathbf{X}_i, \mathbf{Y}_0] &= 0 \quad \text{в остальных случаях.}
 \end{aligned}$$

Пространство-время

$$ds^2 = \left(\frac{r}{a}\right)^2 dt^2 - dr^2 - r^2 d\Omega^2$$

содержит две нетривиальные симметрии Нётер

$$\mathbf{Y}_1 = s \frac{\partial}{\partial s} + \frac{r}{2} \frac{\partial}{\partial r}, \quad \mathbf{Y}_2 = \frac{s^2}{2} \frac{\partial}{\partial s} + \frac{rs}{2} \frac{\partial}{\partial r}, \quad A = -\frac{r^2}{2},$$

первые интегралы для которых также приведены в той же табл. 3.

3.4. Случай сферически-симметричных статических пространств-времен с девятью симметриями Нётер. Данный пункт содержит некоторые хорошо известные и важные пространства-времена. Существуют пять различных пространств-времен, из которых три содержат две дополнительные симметрии Нётер,

а одно содержит дополнительную симметрию Нётер наряду с другими, являющимися векторными полями Киллинга.

Получены следующие результаты (пространства-времени) с девятью симметриями Нётер:

$$ds^2 = dt^2 - dr^2 - d\Omega^2, \quad (12)$$

$$ds^2 = \frac{\beta^2}{r^2} dt^2 - \frac{\beta^4}{r^4} dr^2 - d\Omega^2, \quad \beta \neq 0, \quad (13)$$

$$ds^2 = \left(1 + \frac{r}{b}\right)^2 dt^2 - dr^2 - d\Omega^2, \quad b \neq 0, \quad (14)$$

$$ds^2 = dt^2 - \frac{dr^2}{1 - r^2/b^2} - r^2 d\Omega^2, \quad b \neq 0. \quad (15)$$

Первые три пространства-времени отвечают известным решениям полевых уравнений Эйнштейна типа решения Робинсона–Бертотти, которое описывает вселенную в однородном магнитном поле, тогда как последний случай представляет собой вселенную Эйнштейна.

Сначала перечислим векторные поля Киллинга, которые являются также симметриями Нётер:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_{4,1} &= r \frac{\partial}{\partial t} + t \frac{\partial}{\partial r}, & \mathbf{X}_{5,1} &= \frac{\partial}{\partial r}, \\ \mathbf{X}_{4,2} &= -\beta r e^{-t/\beta} \frac{\partial}{\partial t} + r^2 e^{-t/\beta} \frac{\partial}{\partial r}, & \mathbf{X}_{5,2} &= \beta r e^{t/\beta} \frac{\partial}{\partial t} + r^2 e^{t/\beta} \frac{\partial}{\partial r}, \\ \mathbf{X}_{4,3} &= \frac{b}{b+r} e^{-t/b} \frac{\partial}{\partial t} + e^{-t/b} \frac{\partial}{\partial r}, \\ \mathbf{X}_{5,3} &= -\frac{b}{b+r} e^{t/b} \frac{\partial}{\partial t} + e^{t/b} \frac{\partial}{\partial r}, \\ \mathbf{X}_{4,4} &= \sqrt{b^2 - r^2} \sin \phi \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sqrt{b^2 - r^2}}{r} \cos \theta \sin \phi \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\sqrt{b^2 - r^2}}{r \sin \theta} \cos \phi \frac{\partial}{\partial \phi}, \\ \mathbf{X}_{5,4} &= \sqrt{b^2 - r^2} \cos \phi \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sqrt{b^2 - r^2}}{r} \cos \theta \cos \phi \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{\sqrt{b^2 - r^2}}{r \sin \theta} \sin \phi \frac{\partial}{\partial \phi}, \\ \mathbf{X}_{6,4} &= \sqrt{b^2 - r^2} \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sqrt{b^2 - r^2}}{r} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta}, \end{aligned}$$

а симметрии Нётер, соответствующие нетривиальным калибровочным членам, имеют вид

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_{1,1} &= s \frac{\partial}{\partial t}, & A_{1,1} &= 2t, \\ \mathbf{Y}_{2,1} &= s \frac{\partial}{\partial r}, & A_{2,1} &= -2r, \\ \mathbf{Y}_{1,2} &= -\frac{r s e^{-t/\beta}}{\beta^3} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{r^2 s e^{-t/\beta}}{\beta^4} \frac{\partial}{\partial r}, & A_{1,2} &= \frac{2e^{-t/\beta}}{r}, \\ \mathbf{Y}_{2,2} &= \frac{r s e^{t/\beta}}{\beta^3} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{r^2 s e^{t/\beta}}{\beta^4} \frac{\partial}{\partial r}, & A_{1,2} &= \frac{2e^{t/\beta}}{r}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_{1,3} &= -\frac{bs}{2(b+r)} e^{-t/b} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{s}{2} e^{-t/b} \frac{\partial}{\partial r}, & A_{1,3} &= (b+r) e^{-t/b}, \\ \mathbf{Y}_{2,3} &= \frac{bs}{2(b+r)} e^{t/b} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{s}{2} e^{t/b} \frac{\partial}{\partial r}, & A_{2,3} &= (b+r) e^{t/b}, \\ \mathbf{Y}_{1,4} &= s \frac{\partial}{\partial t}, & A &= 2t. \end{aligned}$$

Алгебра Ли симметрий метрики (13) такова:

$$\begin{aligned} [\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2] &= -\mathbf{X}_3, & [\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_3] &= \mathbf{X}_2, & [\mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3] &= -\mathbf{X}_1, \\ [\mathbf{X}_0, \mathbf{X}_{4,2}] &= \frac{1}{\alpha} \mathbf{X}_{4,2}, & [\mathbf{X}_{4,2}, \mathbf{X}_{5,2}] &= -\mathbf{X}_{4,2}, & [\mathbf{X}_0, \mathbf{X}_{5,2}] &= \frac{1}{\alpha} \mathbf{X}_{5,2}, \\ [\mathbf{X}_0, \mathbf{Y}_{1,2}] &= -\frac{1}{\alpha} \mathbf{Y}_{1,2}, & [\mathbf{X}_0, \mathbf{Y}_{2,2}] &= \frac{1}{\alpha} \mathbf{Y}_{2,2}, \\ [\mathbf{Y}_0, \mathbf{Y}_{1,2}] &= \frac{1}{\alpha^4} \mathbf{X}_{4,2}, & [\mathbf{Y}_0, \mathbf{Y}_{2,2}] &= \frac{1}{\alpha^4} \mathbf{X}_{5,2}, \\ [\mathbf{X}_i, \mathbf{X}_j] &= 0, & [\mathbf{X}_i, \mathbf{Y}_0] &= 0, & [\mathbf{Y}_i, \mathbf{Y}_j] &= 0 \quad \text{в остальных случаях.} \end{aligned}$$

Первые интегралы для девяти симметрий Нётер приведены в табл. 4.

Таблица 4. Первые интегралы для девяти симметрий Нётер.

Симметрия	Первый интеграл
$\mathbf{X}_{4,1}, \mathbf{X}_{5,1}$	$\phi_5 = t\dot{r} - r\dot{t}, \quad \phi_6 = \dot{r}$
$\mathbf{Y}_{1,1}, \mathbf{Y}_{2,1}$	$\phi_7 = 2(t - st), \quad \phi_8 = r - s\dot{r}$
$\mathbf{X}_{4,2}, \mathbf{X}_{5,2}$	$\phi_5 = 2e^{-t/\beta} \beta^3 \left(\frac{\dot{t}}{r} + \frac{\beta \dot{r}}{r^2} \right), \quad \phi_6 = 2e^{t/\beta} \beta^3 \left(-\frac{\dot{t}}{r} + \frac{\beta \dot{r}}{r^2} \right)$
$\mathbf{Y}_{1,2}, \mathbf{Y}_{2,2}$	$\phi_7 = 2se^{-t/\beta} \left(\frac{\dot{t}}{r\beta} + \frac{\dot{r}}{r^2} \right) + \frac{2e^{-t/\beta}}{r}, \quad \phi_8 = 2se^{t/\beta} \left(\frac{-\dot{t}}{\beta r} + \frac{\dot{r}}{r^2} \right) + \frac{2e^{t/\beta}}{r}$
$\mathbf{X}_{4,3}, \mathbf{X}_{5,3}$	$\phi_5 = e^{-t/b} \left(-\frac{\dot{t}(b+r)}{b} + \dot{r} \right), \quad \phi_6 = e^{t/b} \left(\frac{\dot{t}(b+r)}{b} + \dot{r} \right)$
$\mathbf{Y}_{1,3}, \mathbf{Y}_{2,3}$	$\phi_7 = e^{-t/b} \left(\frac{st(b+r)}{b} + s\dot{r} + (b+r) \right),$ $\phi_8 = e^{t/b} \left(\frac{st(b+r)}{b} - s\dot{r} + (b+r) \right)$
$\mathbf{X}_{4,4}$	$\phi_5 = \frac{b^2 \dot{r} \sin \phi \sin \theta}{\sqrt{b^2 - r^2}} - r\dot{\theta} \sqrt{b^2 - r^2} \cos \theta \sin \phi + r\dot{\phi} \sqrt{b^2 - r^2} \sin \theta \cos \phi$
$\mathbf{X}_{5,4}$	$\phi_6 = \frac{b^2 \dot{r} \cos \phi \sin \theta}{\sqrt{b^2 - r^2}} - r\dot{\theta} \sqrt{b^2 - r^2} \cos \theta \cos \phi + r\dot{\phi} \sqrt{b^2 - r^2} \sin \theta \sin \phi$
$\mathbf{X}_{6,4}, \mathbf{Y}_{1,4}$	$\phi_7 = \frac{b^2 \dot{r} \cos \theta}{\sqrt{b^2 - r^2}} - r\dot{\theta} \sqrt{b^2 - r^2} \sin \theta, \quad \phi_8 = t - st$

3.5. Случай сферически-симметричных статических пространств-времен с одиннадцатью симметриями Нётер. Оказывается, что известная метрика де Ситтера

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r^2}{b^2}\right) dt^2 - \frac{dr^2}{1 - r^2/b^2} - r^2 d\Omega^2 \quad (16)$$

является единственным случаем, обладающим одиннадцатью симметриями Нётер. Все они, за исключением $\mathbf{Y}_0$, являются векторами Киллинга. Наряду с минимальным набором симметрий Нётер для метрики вида (16) мы имеем следующие симметрии Нётер:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_4 = & \frac{br \sin \phi \sin \theta \cos(t/b)}{\sqrt{b^2 - r^2}} \frac{\partial}{\partial t} + \\ & + \sin\left(\frac{t}{b}\right) \sqrt{b^2 - r^2} \left(\sin \theta \sin \phi \frac{\partial}{\partial r} + r \cos \theta \sin \phi \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\cos \phi}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_5 = & \frac{br \cos \phi \sin \theta \cos(t/b)}{\sqrt{b^2 - r^2}} \frac{\partial}{\partial t} + \\ & + \sin\left(\frac{t}{b}\right) \sqrt{b^2 - r^2} \left(\sin \theta \cos \phi \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \theta \cos \phi}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{\sin \phi}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_6 = & -\frac{br \sin \phi \sin \theta \sin(t/b)}{\sqrt{b^2 - r^2}} \frac{\partial}{\partial t} + \\ & + \cos\left(\frac{t}{b}\right) \sqrt{b^2 - r^2} \left(\sin \theta \sin \phi \frac{\partial}{\partial r} + r \cos \theta \sin \phi \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\cos \phi}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_7 = & -\frac{br \cos \phi \sin \theta \sin(t/b)}{\sqrt{b^2 - r^2}} \frac{\partial}{\partial t} + \\ & + \cos\left(\frac{t}{b}\right) \sqrt{b^2 - r^2} \left(\sin \theta \cos \phi \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \theta \cos \phi}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{\sin \phi}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right), \end{aligned}$$

$$\mathbf{X}_8 = \frac{br \cos \theta \cos(t/b)}{\sqrt{b^2 - r^2}} \frac{\partial}{\partial t} + \sin\left(\frac{t}{b}\right) \sqrt{b^2 - r^2} \left(\cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right),$$

$$\mathbf{X}_9 = \frac{-br \cos \theta \sin(t/b)}{\sqrt{b^2 - r^2}} \frac{\partial}{\partial t} + \cos\left(\frac{t}{b}\right) \sqrt{b^2 - r^2} \left(\cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right).$$

Первые интегралы выписаны в табл. 5.

3.6. Случай сферически-симметричных статических пространств-времен с семнадцатью симметриями Нётер. Именно знаменитая метрика Минковского представляет плоское пространство-время с семнадцатью симметриями Нётер. Список всех симметрий приведен в работе [11], а о первых интегралах в декартовых координатах упоминается в работе [13].

ТАБЛИЦА 5. Первые интегралы для одиннадцати симметрий Нётер.

Симметрия	Первый интеграл
$\mathbf{X}_5$	$\phi_5 = -\frac{r}{b}\sqrt{b^2 - r^2} \sin \phi \sin \theta \cos\left(\frac{t}{b}\right)\dot{t} + \frac{b^2}{\sqrt{b^2 - r^2}} \sin \phi \sin \theta \sin\left(\frac{t}{b}\right)\dot{r} +$ $+ r\sqrt{b^2 - r^2} \cos \theta \sin \phi \sin\left(\frac{t}{b}\right)\dot{\theta} + r\sqrt{b^2 - r^2} \sin \theta \cos \phi \sin\left(\frac{t}{b}\right)\dot{\phi}$
$\mathbf{X}_6$	$\phi_6 = -\frac{r}{b}\sqrt{b^2 - r^2} \cos \phi \sin \theta \cos\left(\frac{t}{b}\right)\dot{t} + \frac{b^2}{\sqrt{b^2 - r^2}} \cos \phi \sin \theta \sin\left(\frac{t}{b}\right)\dot{r} +$ $+ r\sqrt{b^2 - r^2} \cos \theta \cos \phi \sin\left(\frac{t}{b}\right)\dot{\theta} - r\sqrt{b^2 - r^2} \sin \theta \sin \phi \sin\left(\frac{t}{b}\right)\dot{\phi}$
$\mathbf{X}_7$	$\phi_8 = \frac{r}{b}\sqrt{b^2 - r^2} \sin \phi \sin \theta \sin\left(\frac{t}{b}\right)\dot{t} + \frac{b^2}{\sqrt{b^2 - r^2}} \sin \phi \sin \theta \cos\left(\frac{t}{b}\right)\dot{r} +$ $+ r\sqrt{b^2 - r^2} \cos \theta \sin \phi \cos\left(\frac{t}{b}\right)\dot{\theta} + r\sqrt{b^2 - r^2} \sin \theta \cos \phi \cos\left(\frac{t}{b}\right)\dot{\phi}$
$\mathbf{X}_8$	$\phi_9 = -\frac{r}{b}\sqrt{b^2 - r^2} \cos \phi \sin \theta \cos\left(\frac{t}{b}\right)\dot{t} + \frac{b^2}{\sqrt{b^2 - r^2}} \cos \phi \sin \theta \sin\left(\frac{t}{b}\right)\dot{r} +$ $+ r\sqrt{b^2 - r^2} \cos \theta \cos \phi \sin\left(\frac{t}{b}\right)\dot{\theta} - r\sqrt{b^2 - r^2} \sin \theta \sin \phi \sin\left(\frac{t}{b}\right)\dot{\phi}$
$\mathbf{X}_9$	$\phi_7 = -\frac{r}{b}\sqrt{b^2 - r^2} \cos \theta \cos\left(\frac{t}{b}\right)\dot{t} + \frac{b^2}{\sqrt{b^2 - r^2}} \cos \theta \sin\left(\frac{t}{b}\right)\dot{r} -$ $- r\sqrt{b^2 - r^2} \sin \theta \sin\left(\frac{t}{b}\right)\dot{\theta}$
$\mathbf{X}_{10}$	$\phi_{10} = \frac{r}{b}\sqrt{b^2 - r^2} \cos \theta \sin\left(\frac{t}{b}\right)\dot{t} + \frac{b^2}{\sqrt{b^2 - r^2}} \cos \theta \cos\left(\frac{t}{b}\right)\dot{r} -$ $- r\sqrt{b^2 - r^2} \sin \theta \cos\left(\frac{t}{b}\right)\dot{\theta}$

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе представлен полный список сферически-симметричных статических пространств-времен. Показано, что лагранжиан сферически-симметричных статических пространств-времен может породить 5, 6, 7, 9, 11 или 17 симметрий Нётер. Несколько примеров пространств-времен с минимальным набором (т.е. набором из пяти) симметрий Нётер приведены в табл. 1. Говоря кратко, существуют два случая, в которых лагранжиан пространств-времен порождает шесть симметрий Нётер, четыре случая – семь, пять случаев – девять (включая метрики Робинсона–Бертотти и Эйнштейна) и только в одном случае мы имеем одиннадцать (известное пространство-время де Ситтера) и в одном случае – семнадцать (пространство-время Минковского) симметрий Нётер. Точно так же, как и в случае лагранжиана плоских симметричных статических пространств-времен, минимальное число симметрий Нётер для сферически-симметричных статических пространств-времен равно пяти, а максимальное число равно семнадцати. При этом минимальное число изометрий равно четырем, а их максимальное число – десяти. Это завершает классификацию сферически-симметричных статических про-

странств-времен по их симметриям Нётер. Аналогичная работа по цилиндрически-симметричным статическим пространствам-временам еще не закончена.

Существуют три новых класса, которых мы не нашли в литературе. О них следует кратко упомянуть. Перечислим также соответствующие ненулевые компоненты тензора Римана, тензора Риччи и выпишем скаляр Риччи.

Первый класс таков:

$$ds^2 = \sec^2 \frac{r}{a} (dt^2 - dr^2) - d\Omega^2;$$

и в этом случае мы получили семь симметрий Нётер и шесть векторов Киллинга. Скаляр Риччи и ненулевые компоненты тензоров Риччи и Римана следующие:

$$\begin{aligned} R_{\text{scalar}} &= \frac{2(a^2 - 1)}{a^2}, \\ R_{00} &= -\frac{\sec^2(r/a)}{a^2}, \quad R_{11} = \frac{\sec^2(r/a)}{a^2}, \quad R_{22} = -1, \quad R_{33} = -\sin^2 \theta, \\ R_{0101} &= -\frac{\sec^4(r/a)}{a^2}, \quad R_{2323} = -\sin^2 \theta. \end{aligned}$$

Во втором классе, где

$$ds^2 = \left(\frac{\alpha}{r}\right)^2 (dt^2 - dr^2) - d\Omega^2,$$

имеем семь симметрий Нётер и шесть векторов Киллинга. Заметим, что приведенную выше метрику можно представить в виде

$$r^2 ds^2 = \alpha^2 (dt^2 - dr^2) - r^2 d\Omega^2, \quad ds^2 = \frac{1}{r^2} d\tilde{s},$$

где $d\tilde{s}^2$ – обычная метрика Минковского. Поэтому формула (7) представляет собой конформную метрику Минковского с конформным фактором $1/r^2$. Скаляр Риччи и ненулевые компоненты тензоров Риччи и Римана приведены ниже:

$$\begin{aligned} R_{\text{scalar}} &= \frac{\alpha^2 - 1}{\alpha^2}, \\ R_{00} &= -\frac{1}{r^2}, \quad R_{11} = \frac{1}{r^2}, \quad R_{22} = -1, \quad R_{33} = -\sin^2 \theta, \\ R_{0101} &= -\frac{\alpha^2}{r^4}, \quad R_{2323} = -\sin^2 \theta. \end{aligned}$$

Третий случай таков:

$$ds^2 = \left(\frac{\beta}{r}\right)^2 dt^2 - \left(\frac{\beta}{r}\right)^4 dr^2 - d\Omega^2,$$

и здесь существуют девять симметрий Нётер. Соответствующий скаляр Риччи и ненулевые компоненты тензоров Риччи и Римана следующие:

$$\begin{aligned} R_{\text{scalar}} &= 2, \\ R_{22} &= -1, \quad R_{33} = -\sin^2 \theta, \\ R_{2323} &= -\sin^2 \theta. \end{aligned}$$

Благодарности. Авторы глубоко признательны Хельмуту Рухланду и анонимному рецензенту за их искренний интерес и ценные предложения.

Список литературы

- [1] G. S. Hall, *Symmetries and Curvature Structure in General Relativity*, World Sci., Singapore, 2004.
- [2] A. R. Kashif, *Curvature collineations of some spacetimes and their physical interpretation*, PhD Thesis, Quaid-e-Azam University, Islamabad, Pakistan, 2003.
- [3] H. Stephani, D. Kramer, M. MacCallum, C. Hoenselaers, E. Herlt, *Exact Solutions of Einstein's Field Equations*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2003.
- [4] A. Qadir, M. Ziad, *Il Nuovo Cimento B Ser. 11*, **110**:3 (1995), 317–334.
- [5] B. O. J. Tupper, A. J. Keane, J. C. Carot, *Class. Quantum Grav.*, **29**:14 (2012), 145016, arXiv: 1206.6508.
- [6] J. M. Foyster, C. B. G. McIntosh, *Bull. Austral. Math. Soc.*, **8**:2 (1973), 187–190.
- [7] D. Ahmad, M. Ziad, *J. Math. Phys.*, **38**:5 (1997), 2547–2552.
- [8] A. V. Aminova, N. A.-M. Aminov, *Tensor (N. S.)*, **62**:1 (2000), 65–86.
- [9] T. Feroze, F. M. Mahomed, A. Qadir, *Nonlinear Dynam.*, **45**:1–2 (2006), 65–74.
- [10] A. H. Bokhari, A. H. Kara, A. R. Kashif, F. D. Zaman, *Internat. J. Theoret. Phys.*, **45**:6 (2006), 1029–1039.
- [11] A. H. Bokhari, A. H. Kara, A. R. Kashif, F. D. Zaman, *Internat. J. Theoret. Phys.*, **46**:11 (2007), 2795–2800.
- [12] A. H. Bokhari, A. H. Kara, *Gen. Rel. Grav.*, **39**:12 (2007), 2053–2059.
- [13] F. Ali, T. Feroze, *Internat. J. Theoret. Phys.*, **52**:9 (2013), 3329–3342.
- [14] H. Stephani, *Differential Equations. Their Solution Using Symmetries*, ed. M. MacCallum, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1990.
- [15] E. Noether, *Transport Theory Statist. Phys.*, **1**:3 (1971), 186–207, arXiv: physics/0503066.

Поступила в редакцию 15.12.2014,
после доработки 28.01.2015