Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. П. Маслов, UD-статистика в подкритической области,
ТМФ, 2015, том 182, номер 2, 365–367

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8849>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.147.182.235

26 апреля 2023 г., 09:12:35

© 2015 г.

В. П. Маслов^{*†}

UD-СТАТИСТИКА В ПОДКРИТИЧЕСКОЙ ОБЛАСТИ

В подкритической области, в отличие от суперкритической, в которой изотермы идеально совпадают с изотермами модели Ван-дер-Ваальса, введено дополнительное условие достижения максимума энтропии Хартли на спинодали. Для определения параметров распределения и изотерм используется уравнение спинодали.

Ключевые слова: парадокс Гиббса, статистика Больцмана, парастатистика, модель Ван-дер-Ваальса, статистика Бозе–Эйнштейна, спинодаль.

DOI: 10.4213/tmf8849

Как известно, к распределению Больцмана, описывающему термодинамику, Гиббсом был приведен контрпример (так называемый парадокс Гиббса), который пытались разрешить великие математики Иоган фон Нейман и Анри Пуанкаре, а также 15 нобелевских лауреатов по физике. Автор, основываясь на теоремах теории чисел, привел новое распределение, которое отвечает современным экспериментам и которое решает парадокс Гиббса. Это распределение приведено в формулах (5)–(7) работы [1]. Однако это строго математически выведенное распределение вызвало недоверие со стороны физиков-теоретиков. Основной аргумент при этом был таким: не может быть, чтобы автор получил результат, который до него не могли получить такие крупные математики и физики.

Чтобы обойти парадокс Гиббса, физики обычно делят распределение Больцмана на $N!$, где N – число частиц. Авторы статьи [2] на приведенный выше аргумент физиков-теоретиков ответили остроумным контраргументом: не может быть, чтобы такие математики, как фон Нейман и Пуанкаре не догадались поделить распределение Больцмана на $N!$.

В этой работе мы проведем сравнение нового распределения UD-статистики [3] со знаменитой моделью газа Ван-дер-Ваальса, показатели для которого, как правило, приводятся в таблицах наряду с показателями для других (реальных) газов. Для этого из сравнения асимптотик при плотности, стремящейся к нулю, найдем

^{*}МИЭМ НИУ “Высшая школа экономики”, Москва, Россия. E-mail: v.p.maslov@mail.ru

[†]Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

Рис. 1. а – Совпадение изотерм газа по Ван-дер-Ваальсу (сплошные линии) с изотермами UD-статистики невзаимодействующих частиц (штриховые линии); $T_r = 1$, $T_r = 1.2$, $T_r = 1.5$, $T_r = 1.8$ при $\rho \leq \rho_c$. б – Точное совпадение с моделью Ван-дер-Ваальса в случае $\rho > \rho_c$ при соответствующем изменении параметра A в зависимости от давления P .

зависимость параметра γ UD-статистики (см. формулу (5) в работе [1]) от температуры, а из сравнения параметра k UD-статистики (см. формулы (5)–(7) в работе [1]) с критической изохорой Ван-дер-Ваальса найдем зависимость $k(\gamma)$.

Результат сравнения изотерм газа Ван-дер-Ваальса с изотермами UD-статистики в суперкритической области показан на рис. 1. При $\rho > \rho_c$ соответствующее изменение параметра A в зависимости от давления P дает точное совпадение с моделью Ван-дер-Ваальса (см. рис. 1б).

Отметим особенности изменения UD-статистики в области $T < T_c$. Как известно, в подкритической термодинамике из критической точки выходят две спинодали, одна из которых отвечает газовой ветви, другая – жидкой ветви. На диаграмме Хоггена–Ватсона они заканчиваются на прямой $P = 0$: жидкая спинодаль в точке $Z = 0$, газовая спинодаль около точки $Z \sim 1/2$.

При адденде $\gamma = 1/2$ распределение UD-статистики в области $T \leq 0.82 T_c$ в этом частном случае изоморфно распределению Бозе–Эйнштейна.

Ω -потенциал UD-статистики при адденде $\gamma_c < \gamma < 1/2$ принимает вид

$$\Omega = \frac{\Lambda(\gamma) T_r^{2+\gamma} \text{Li}_{2+\gamma}(a)}{\zeta(2+\gamma_c)}, \quad (1)$$

где $T_r = T/T_c$, $a = e^{\mu/T_r}$, μ – химический потенциал, $\zeta(x)$ – дзета-функция Римана, Li – полилогарифм, $\gamma_c = 0.318$, Λ – константа, зависящая от γ . Согласно концепции автора спинодаль совпадает с кривой $\mu = 0$, т. е. при активности $a = e^{\mu/T_r}$, равной единице.

Достичь спинодали экспериментально практически невозможно и невозможно определить газовую спинодаль из эксперимента.

Мы дополнительно предполагаем, что на спинодали возникает максимум энтропии Хартли [4], [5]. Это означает, что на газовой спинодали (на (P, Z) -диаграмме

Рис. 2. Совпадение изотерм газа по Ван-дер-Ваальсу (сплошные линии) с изотермами UD-статистики невзаимодействующих частиц (штриховые линии), где $T_r = 0.1$, $T_r = 0.2$, $T_r = 0.3$, $T_r = 0.4$, $T_r = 0.5$, $T_r = 0.6$, $T_r = 0.7$, $T_r = 0.8$, $T_r = 0.9$, $T_r = 1$, значения $\gamma(T_r)$ и $\Lambda(\gamma)$ определяются из уравнения спинодали $Z = Z(P_r)$.

Хоугена–Ватсона) достигается значение

$$Z = \frac{\zeta(2 + \gamma)}{\zeta(1 + \gamma)}, \quad (2)$$

где γ – адденд, значение которого постоянно на газовой ветви изотермы

$$Z = \frac{\text{Li}_{2+\gamma}(a)}{\text{Li}_{1+\gamma}(a)}, \quad P = \Lambda(\gamma) T_r^{2+\gamma} \frac{\text{Li}_{2+\gamma}(a)}{\zeta(2 + \gamma_c)}. \quad (3)$$

Для того чтобы из приведенных соотношений найти $\gamma(T_r)$ и $\Lambda(\gamma)$ и тем самым, зная газовую спинодаль, найти изотермы, заканчивающиеся в ней, достаточно использовать еще одно уравнение – уравнение спинодали [6]. Используя краевое условие на спинодали, получаем совпадение решения уравнений (1)–(3) с изотермой Ван-дер-Ваальса. Таким образом, мы получаем совпадение с UD-статистикой и в области $T < T_c$ (см. рис. 2).

Из указанного совпадения следует, что частицы газа не взаимодействуют между собой при $\delta < a < 1 - \delta$, подобно флюидам на изотермах на рис. 1 при $a > \delta$, $\rho < \rho_c - \delta$, где δ – сколь угодно малое фиксированное число.

Список литературы

- [1] В. П. Маслов, *ТМФ*, **180**:3 (2014), 394–432.
- [2] Е. М. Воробьев, В. Г. Данилов, С. Ю. Доброхотов и др., *ТВП*, **59**:2 (2014), 209–213.
- [3] V. P. Maslov, *Math. Notes*, **94**:5 (2013), 722–813.
- [4] А. М. Вершик, *Функц. анализ и его прил.*, **30**:2 (1996), 19–39.
- [5] В. П. Маслов, В. Е. Назайкинский, *Матем. заметки*, **83**:2 (2008), 232–263.
- [6] V. P. Maslov, *Russ. J. Math. Phys.*, **21**:1 (2014), 99–111.