Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Э. Ахмедова, А. В. Забродин, Эллиптическая параметризация пфаффовых интегрируемых иерархий в пределе нулевой дисперсии, *ТМФ*, 2015, том 185, номер 3, 410–422

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8853>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 14:16:55

© 2015 г.

В. Э. Ахмедова*, А. В. Забродин*^{†‡}

ЭЛЛИПТИЧЕСКАЯ ПАРАМЕТРИЗАЦИЯ ПФАФФОВЫХ ИНТЕГРИРУЕМЫХ ИЕРАРХИЙ В ПРЕДЕЛЕ НУЛЕВОЙ ДИСПЕРСИИ

Показано, что бездисперсионные пределы пфаффовой иерархии Кадомцева–Петвиашвили (также известной как пфаффова решетка и ДКП) и пфаффовой иерархии Тоды допускают переформулировку в терминах эллиптических функций. В эллиптической форме они выглядят как эллиптические деформации бездисперсионных иерархий Кадомцева–Петвиашвили и двумеризованной цепочки Тоды соответственно.

Ключевые слова: интегрируемые иерархии, эллиптические функции, уравнение Левнера.

DOI: 10.4213/tmf8853

1. ВВЕДЕНИЕ

Мы рассматриваем бездисперсионный предел пфаффовых иерархий Кадомцева–Петвиашвили (КП) и Тоды. Цель работы – дать параметризацию данных иерархий в терминах эллиптических функций. В такой форме они представляются как естественные “эллиптические деформации” обычных иерархий КП и двумерной цепочки Тоды в пределе нулевой дисперсии.

Работа обоих авторов была частично финансирована РФФИ (грант № 14-02-00627). Работа А. В. Забродина также была частично поддержана РФФИ (грант № 14-01-90405-Ukr) и Программой поддержки ведущих научных школ (грант НШ-1500.2014.2). Работа выполнена при финансовой поддержке Правительства РФ в рамках реализации “Дорожной карты” Программы 5/100 Национального исследовательского университета “Высшая школа экономики”.

*Национальный исследовательский университет “Высшая школа экономики”, Москва, Россия. E-mail: valeria-58@yandex.ru

[†]Институт биохимической физики РАН, Москва, Россия

[‡]Институт теоретической и экспериментальной физики, Москва, Россия.
E-mail: zabrodin@itep.ru

Пфаффова иерархия КП (также известная как иерархия ДКП, спаренная иерархия КП, пфаффова решетка) является иерархией с D_∞ -симметриями, она была впервые предложена Джимбо и Мивой в 1983 г. [1]. Впоследствии она появлялась под разными названиями в различных контекстах [2]–[8]. Ее алгебраическая структура и некоторые частные решения были изучены в работах [9]–[11]. Термин “пфаффова” обусловлен тем, что солитоноподобные решения выражаются через пфаффианы. Она имеет определенное сходство с иерархией КП и цепочкой Тоды, однако существенно отличается от них и на данный момент гораздо хуже изучена.

Двумерная пфаффова иерархия Тоды, предложенная в работах [12], [13], является обобщением пфаффовой иерархии КП и связана с ней так же, как двумерная цепочка Тоды связана с иерархией КП. В частности, это обобщение предполагает удвоение набора иерархических времен. В настоящей работе мы будем оперировать “вещественными формами” иерархий, это означает, что времена КП считаются действительными числами, в то время как два набора времен Тоды являются комплексно-сопряженными друг другу.

Бездисперсионная версия пфаффовой иерархии КП была предложена в работах [13], [14]. В форме Хироты она представляет собой бесконечную систему дифференциальных уравнений

$$e^{D(z)D(\zeta)F} \left(1 - \frac{1}{z^2\zeta^2} e^{2\partial_{t_0}(2\partial_{t_0}+D(z)+D(\zeta))F} \right) = 1 - \frac{\partial_{t_1}D(z)F - \partial_{t_1}D(\zeta)F}{z - \zeta}, \quad (1)$$

$$e^{-D(z)D(\zeta)F} \frac{z^2 e^{-2\partial_{t_0}D(z)F} - \zeta^2 e^{-2\partial_{t_0}D(\zeta)F}}{z - \zeta} = z + \zeta - \partial_{t_1}(2\partial_{t_0} + D(z) + D(\zeta))F \quad (2)$$

на функцию $F = F(\mathbf{t})$ от бесконечного числа (действительных) времен $\mathbf{t} = \{t_0, t_1, t_2, \dots\}$, где

$$D(z) = \sum_{k \geq 1} \frac{z^{-k}}{k} \partial_{t_k}. \quad (3)$$

Функция F является бездисперсионным аналогом тау-функции. Дифференциальные уравнения получаются из уравнений (1), (2) разложением по степеням z, ζ . Например, первые два уравнения иерархии имеют вид

$$\begin{aligned} 6F_{11}^2 + 3F_{22} - 4F_{13} &= 12e^{4F_{00}}, \\ 2F_{03} + 4F_{01}^3 + 6F_{01}F_{11} - 6F_{01}F_{02} &= 3F_{12}. \end{aligned} \quad (4)$$

Для краткости мы используем обозначения $F_{mn} \equiv \partial_{t_m} \partial_{t_n} F$.

Бездисперсионная версия пфаффовой иерархии Тоды [13] пишется для функции F , зависящей от бесконечного в обе стороны набора времен $\{\dots, \bar{t}_2, \bar{t}_1, r, s, t_1, t_2, \dots\}$. Поскольку различные иерархии в данной работе нигде не рассматриваются вместе, мы сохраним обозначение F для бездисперсионной тау-функции. Действительная форма иерархии, с которой мы будем иметь дело, подразумевает, что время $\bar{t}_k$ комплексно-сопряжено с t_k , s действительно, а r чисто мнимое. Основные уравнения выглядят следующим образом:

$$e^{D(z)D(\zeta)F} \left(1 - \frac{1}{z\zeta} e^{\partial_s(\partial_s+\partial_r+D(z)+D(\zeta))F} \right) = \frac{ze^{-\partial_r D(z)F} - \zeta e^{-\partial_r D(\zeta)F}}{z - \zeta}, \quad (5)$$

$$e^{\overline{D}(\bar{z})\overline{D}(\bar{\zeta})F} \left(1 - \frac{1}{\bar{z}\bar{\zeta}} e^{\partial_s(\partial_s - \partial_r + \overline{D}(\bar{z}) + \overline{D}(\bar{\zeta}))F} \right) = \frac{\bar{z}e^{\partial_r\overline{D}(\bar{z})F} - \bar{\zeta}e^{\partial_r\overline{D}(\bar{\zeta})F}}{\bar{z} - \bar{\zeta}}, \quad (6)$$

$$e^{D(z)D(\zeta)F} \left(1 - \frac{1}{z\zeta} e^{\partial_r(\partial_s + \partial_r + D(z) + D(\zeta))F} \right) = \frac{ze^{-\partial_s D(z)F} - \zeta e^{-\partial_s D(\zeta)F}}{z - \zeta}, \quad (7)$$

$$e^{\overline{D}(\bar{z})\overline{D}(\bar{\zeta})F} \left(1 - \frac{1}{\bar{z}\bar{\zeta}} e^{-\partial_r(\partial_s - \partial_r + \overline{D}(\bar{z}) + \overline{D}(\bar{\zeta}))F} \right) = \frac{\bar{z}e^{-\partial_s \overline{D}(\bar{z})F} - \bar{\zeta}e^{-\partial_s \overline{D}(\bar{\zeta})F}}{\bar{z} - \bar{\zeta}}, \quad (8)$$

$$e^{-D(z)\overline{D}(\bar{\zeta})F} \left(1 - \frac{1}{z\bar{\zeta}} e^{\partial_r(\partial_r + D(z) - \overline{D}(\bar{\zeta}))F} \right) = 1 - \frac{1}{z\bar{\zeta}} e^{\partial_s(\partial_s + D(z) + \overline{D}(\bar{\zeta}))F}, \quad (9)$$

$$e^{-(\partial_s + \partial_r + D(z))\overline{D}(\bar{\zeta})F} - 1 = \frac{z}{\bar{\zeta}} e^{-\partial_r(\partial_s + D(z) + \overline{D}(\bar{\zeta}))F} \times \\ \times (e^{-(\partial_s - \partial_r + \overline{D}(\bar{\zeta}))D(z)F} - 1). \quad (10)$$

Здесь

$$\overline{D}(\bar{z}) = \sum_{k \geq 1} \frac{\bar{z}^{-k}}{k} \partial_{\bar{t}_k}$$

является комплексно-сопряженным аналогом дифференциального оператора (3). Заметим, что уравнения (6), (8) получаются соответственно из (5), (7) с помощью “оператора постановки черты” $D \rightarrow \overline{D}$, $z \rightarrow \bar{z}$, $\zeta \rightarrow \bar{\zeta}$, $t_k \rightarrow \bar{t}_k$, $s \rightarrow \bar{s} = s$, $r \rightarrow \bar{r} = -r$, действие которого можно рассматривать как комплексное сопряжение при условии, что функция F действительна. Мы видим, что у каждого уравнения есть “аналог с чертой”. В то же время уравнения (9) и (10) действительны, т. е. они не меняются при комплексном сопряжении. Далее в тексте мы не будем постоянно выписывать пары комплексно-сопряженных уравнений и ограничимся написанием лишь одного из каждой пары, не забывая при этом о том, что оба выполняются одновременно. Для дальнейшего удобно ввести комплексно-сопряженные “0-е времена” $t_0 = s + r$, $\bar{t}_0 = s - r$, тогда $\partial_{t_0} = (\partial_s + \partial_r)/2$, $\partial_{\bar{t}_0} = (\partial_s - \partial_r)/2$.

Дифференциальные уравнения иерархии получаются из уравнений (5)–(10) разложением по степеням z , ζ , $\bar{z}$, $\bar{\zeta}$. Первые два уравнения имеют вид

$$e^{F_{00}} F_{0\bar{1}} = e^{F_{\bar{0}\bar{0}}} F_{\bar{0}1}, \\ F_{1\bar{1}} = 2e^{F_{00} + F_{\bar{0}\bar{0}}} \operatorname{sh}(2F_{0\bar{0}}). \quad (11)$$

Мы используем обозначения $F_{mn} \equiv \partial_{t_m} \partial_{t_n} F$, $F_{m\bar{n}} \equiv \partial_{t_m} \partial_{\bar{t}_n} F$, $F_{\bar{m}\bar{n}} \equiv \partial_{\bar{t}_m} \partial_{\bar{t}_n} F$.

В настоящей работе мы покажем, что иерархии пфаффо-типа допускают красивую переформулировку в терминах эллиптических функций (тета-функций Якоби). После такой переформулировки число независимых уравнений уменьшается и несколько неуклюжие на вид уравнения (1), (2) и (5)–(10) обретают более привлекательную форму, в которой они выглядят как естественные эллиптические деформации бездисперсионной иерархии КП (или модифицированной иерархии КП) и двумерной цепочки Тоды (см. соответственно (44), (45) и (46) ниже). Отметим, что в эллиптической параметризации модулярный параметр τ является динамической переменной. Это свойство указывает на некоторое сходство с уравнениями Уизема для рода 1 [15] и интегрируемыми структурами, связанными с краевыми задачами в плоских двусвязных областях [16].

Эллиптическая форма для бездисперсионной пфаффовой иерархии КП была получена в нашей предыдущей работе [17]. Эти результаты описаны в разделе 2. В разделе 3 они обобщены на случай бездисперсионной пфаффовой иерархии Тоды. В разделе 4 проводится сравнение иерархий пфаффова типа с более привычными иерархиями.

2. БЕЗДИСПЕРСИОННАЯ ПФАФФОВА ИЕРАРХИЯ КП

2.1. Алгебраическая формулировка. Для данной иерархии имеем набор вещественных времен $\mathbf{t} = \{t_0, t_1, t_2, \dots\}$. В дальнейшем мы будем использовать дифференциальный оператор

$$\nabla(z) = \partial_{t_0} + D(z), \quad (12)$$

который в данном случае удобнее, чем $D(z)$. Введем вспомогательные функции

$$p(z) = z - \partial_{t_1} \nabla(z) F, \quad w(z) = z^2 e^{-2\partial_{t_0} \nabla(z) F} \quad (13)$$

и с их помощью перепишем уравнения (1), (2) в более компактной и красивой форме:

$$e^{D(z)D(\zeta)F} \left(1 - \frac{1}{w(z)w(\zeta)} \right) = \frac{p(z) - p(\zeta)}{z - \zeta}, \quad (14)$$

$$e^{-D(z)D(\zeta)F + 2\partial_{t_0}^2 F} \frac{w(z) - w(\zeta)}{z - \zeta} = p(z) + p(\zeta). \quad (15)$$

Перемножив эти уравнения, получим соотношение

$$p^2(z) - e^{2F_{00}}(w(z) + w^{-1}(z)) = p^2(\zeta) - e^{2F_{00}}(w(\zeta) + w^{-1}(\zeta)),$$

откуда легко увидеть, что величина $p^2(z) - e^{2F_{00}}(w(z) + w^{-1}(z))$ не зависит от z . Устремив z к бесконечности, найдем, что эту величину можно выразить через производные функции F . В результате получим, что $p(z)$ и $w(z)$ удовлетворяют алгебраическому уравнению [13]

$$p^2(z) = r^2(w(z) + w^{-1}(z)) - v, \quad (16)$$

где $r = e^{F_{00}}$, $v = 2F_{11} + F_{01}^2 - F_{02}$ – некоторые вещественные параметры. Это уравнение задает алгебраическую кривую, причем w , p – алгебраические функции на ней. Локальный параметр в бесконечности – это z^{-1} . Как нетрудно видеть из (13), функции p и w имеют соответственно простой и двойной полюсы на бесконечности.

2.2. Эллиптическая параметризация. Следующий естественный шаг – это униформизация кривой (16) с помощью эллиптических функций sn , cn , dn или тета-функций¹⁾ $\theta_a(u) = \theta_a(u|\tau)$, $a = 1, 2, 3, 4$. Это можно сделать несколькими способами. Прежде всего заметим, что при данных r , v модулярный параметр $\tau \in \mathbb{H}$ ($\mathbb{H}$ – верхняя полуплоскость) не определен однозначно из-за возможности модулярных преобразований. Вещественность коэффициентов r^2 , v влечет за собой наличие ограничений на значения τ . В стандартной фундаментальной области

¹⁾Их определения и основные свойства описаны в приложении 4.2. В дальнейшем мы часто будем писать просто $\theta_a(u)$, это не должно вызвать путаницы.

$\{\tau \in \mathbb{H} \mid |\operatorname{Re} \tau| \leq 1/2, |\tau| \geq 1\}$ допустимыми значениями τ являются следующие:
а) $\tau = it, t \geq 1$, б) $\tau = 1/2 + it, t \geq \sqrt{3}/2$, в) $\tau = e^{i\rho}, \pi/3 \leq \rho \leq 2\pi/3$.

В дальнейшем мы будем считать τ чисто мнимым (случай а) и рассмотрим параметризацию, предложенную в [17]:

$$w(z) = \frac{\theta_4^2(u(z))}{\theta_1^2(u(z))}, \quad p(z) = \gamma \theta_4^2(0) \frac{\theta_2(u(z))\theta_3(u(z))}{\theta_1(u(z))\theta_4(u(z))} \quad (17)$$

с параметрами r, v , задаваемыми формулами

$$r = \gamma \theta_2(0)\theta_3(0), \quad v = \gamma^2(\theta_2^4(0) + \theta_3^4(0)). \quad (18)$$

Можно проверить, что уравнение кривой становится эквивалентным тождеству

$$\theta_4^4(0) \frac{\theta_2^2(u)\theta_3^2(u)}{\theta_1^2(u)\theta_4^2(u)} = \theta_2^2(0)\theta_3^2(0) \left(\frac{\theta_2^2(u)}{\theta_1^2(u)} + \frac{\theta_1^2(u)}{\theta_4^2(u)} \right) - (\theta_2^4(0) + \theta_3^4(0)), \quad (19)$$

которое доказывается стандартным способом из сравнения аналитических свойств обеих сторон. Как будет показано ниже, не зависящий от z параметр γ является динамической переменной, так же как и модулярный параметр τ : $\gamma = \gamma(\mathbf{t})$, $\tau = \tau(\mathbf{t})$. Функция u в (17) зависит от z и от всех времен: $u(z) = u(z, \mathbf{t})$. Из уравнений (13) видно, что функции $w(z)$, $p(z)$ принимают вещественные значения при вещественном z . Учитывая этот факт, удобно нормировать $u(z)$ условием $u(\infty) = 0$, так что разложение на бесконечности имеет вид

$$u(z, \mathbf{t}) = \frac{c_1(\mathbf{t})}{z} + \frac{c_2(\mathbf{t})}{z^2} + \dots, \quad c_i \in \mathbb{R}. \quad (20)$$

В эллиптической параметризации уравнения (14) и (15) становятся одинаковыми. Возьмем, например, уравнение (15) и запишем его в виде

$$(z_1^{-1} - z_2^{-1})e^{\nabla_1 \nabla_2 F} = -\frac{w_1 - w_2}{p_1 + p_2} \frac{r}{\sqrt{w_1 w_2}},$$

где $\nabla_i = \nabla(z_i)$, $p_i = p(z_i)$ и т. д. Тождество

$$\frac{w_1 - w_2}{p_1 + p_2} = -\frac{1}{\gamma \theta_2(0)\theta_3(0)} \frac{\theta_4(u_1)\theta_4(u_2)}{\theta_1(u_1)\theta_1(u_2)} \frac{\theta_1(u_{12})}{\theta_4(u_{12})}$$

(здесь и далее $u_i \equiv u(z_i)$, $u_{ik} \equiv u_i - u_k$) позволяет привести правую часть к очень простому виду:

$$(z_1^{-1} - z_2^{-1})e^{\nabla(z_1)\nabla(z_2)F} = \frac{\theta_1(u(z_1) - u(z_2))}{\theta_4(u(z_1) - u(z_2))}. \quad (21)$$

Данное уравнение задает бездисперсионную пфаффову иерархию КП. Заметим, что если устремить z_2 к бесконечности в (21), получим определение функции $u(z)$, эквивалентное первой формуле в (17):

$$e^{\partial_{t_0} \nabla(z)F} = z \frac{\theta_1(u(z))}{\theta_4(u(z))}. \quad (22)$$

Предел $z \rightarrow \infty$ дает $e^{F_{00}} = r = \pi c_1 \theta_2(0) \theta_3(0)$, следовательно,

$$c_1(\mathbf{t}) = \frac{\gamma(\mathbf{t})}{\pi}, \quad \gamma(\mathbf{t}) = \frac{e^{F_{00}}}{\theta_2(0|\tau) \theta_3(0|\tau)}. \quad (23)$$

Кроме того, из (18) можно получить, что

$$\frac{v}{r^2} = e^{-2F_{00}} (2F_{11} + F_{01}^2 - F_{02}) = \frac{\theta_2^2(0|\tau)}{\theta_3^2(0|\tau)} + \frac{\theta_3^2(0|\tau)}{\theta_2^2(0|\tau)}. \quad (24)$$

Таким образом, мы видим, что модулярный параметр τ выражается через производные второго порядка от функции F . Из (23) очевидно, что то же самое верно для c_1 и γ .

Для того чтобы записать уравнение (21) в еще одной полезной форме, введем функцию

$$S(u|\tau) := \ln \frac{\theta_1(u|\tau)}{\theta_4(u|\tau)}. \quad (25)$$

Она обладает следующими квазипериодическими свойствами: $S(u+1|\tau) = S(u|\tau) + i\pi$, $S(u+\tau|\tau) = S(u|\tau)$. Производная этой функции $S'(u) = \partial_u S(u|\tau)$ дается выражением

$$S'(u) = \pi \theta_4^2(0) \frac{\theta_2(u) \theta_3(u)}{\theta_1(u) \theta_4(u)}. \quad (26)$$

Эту формулу легко доказать, используя тождество (П.3) из приложения 4.2 и сравнивая аналитические свойства обеих сторон. Отметим, что выражение (19) можно рассматривать как нелинейное дифференциальное уравнение на функцию S :

$$\left(\frac{S'(u)}{\pi \theta_2(0) \theta_3(0)} \right)^2 = 2 \operatorname{ch} 2S(u) - \frac{\theta_2^2(0)}{\theta_3^2(0)} - \frac{\theta_3^2(0)}{\theta_2^2(0)}. \quad (27)$$

Прологарифмируем и возьмем производную по ∂_{t_0} от обеих сторон (21). В терминах функции $S(u)$ уравнение запишется в виде

$$\nabla(z_1) S(u(z_2)|\tau) = \partial_{t_0} S(u(z_1) - u(z_2)|\tau). \quad (28)$$

В частности, видно, что левая часть этого уравнения симметрична по отношению к перестановке $z_1 \leftrightarrow z_2$: $\nabla(z_1) S(u(z_2)|\tau) = \nabla(z_2) S(u(z_1)|\tau)$. Эта симметрия является проявлением интегрируемости. В пределе $z_2 \rightarrow \infty$ уравнение (28) дает

$$\nabla(z) \ln r = \partial_{t_0} S(u(z)|\tau). \quad (29)$$

Чтобы связать данную параметризацию с алгебраической формулировкой, заметим, что

$$S(u(z)|\tau) = -\frac{1}{2} \ln w(z), \quad c_1 S'(u(z)|\tau) = p(z). \quad (30)$$

Эти формулы следуют непосредственно из определений и из (26).

3. БЕЗДИСПЕРСИОННАЯ ПФАФФОВА ИЕРАРХИЯ ТОДЫ

3.1. Алгебраическая формулировка. Набор времен в данном случае будет $\mathbf{t} = \{\dots, \bar{t}_2, \bar{t}_1, \bar{t}_0, t_0, t_1, t_2, \dots\}$. Соответственно, оператор (12) приобретает “аналог с чертой” $\bar{\nabla}(\bar{z}) = \partial_{\bar{t}_0} + \bar{D}(\bar{z})$. С этого момента мы будем работать с временами $t_0, \bar{t}_0$ вместо s, r .

Введем вспомогательные функции

$$\begin{aligned} P(z) &= ze^{-(\partial_{t_0} + \partial_{\bar{t}_0})\nabla(z)F}, & W(z) &= ze^{-(\partial_{t_0} - \partial_{\bar{t}_0})\nabla(z)F}, \\ \bar{P}(z) &= ze^{-(\partial_{t_0} + \partial_{\bar{t}_0})\bar{\nabla}(z)F}, & \bar{W}(z) &= ze^{(\partial_{t_0} - \partial_{\bar{t}_0})\bar{\nabla}(z)F}, \end{aligned} \quad (31)$$

с их помощью мы можем переписать уравнения (5)–(10) в более компактной форме:

$$\begin{aligned} e^{D(z)D(\zeta)F} \left(1 - \frac{1}{P(z)P(\zeta)}\right) &= \frac{W(z) - W(\zeta)}{z - \zeta} e^{(\partial_{t_0} - \partial_{\bar{t}_0})\partial_{t_0}F}, \\ e^{D(z)D(\zeta)F} \left(1 - \frac{1}{W(z)W(\zeta)}\right) &= \frac{P(z) - P(\zeta)}{z - \zeta} e^{(\partial_{t_0} + \partial_{\bar{t}_0})\partial_{t_0}F}, \\ e^{D(z)\bar{D}(\bar{\zeta})F} \left(1 - \frac{1}{P(z)\bar{P}(\bar{\zeta})}\right) &= 1 - \frac{1}{W(z)\bar{W}(\bar{\zeta})}, \\ e^{D(z)\bar{D}(\bar{\zeta})F} (W(z) - \bar{W}(\bar{\zeta})) &= (P(z) - \bar{P}(\bar{\zeta})) e^{2\partial_{t_0}\partial_{\bar{t}_0}F}, \end{aligned} \quad (32)$$

где $\bar{P}(\bar{\zeta}) := \bar{P}(\bar{z})$, $\bar{W}(\bar{\zeta}) := \bar{W}(\bar{z})$. Разделив первое уравнение на второе, получим соотношение

$$W(z) + W^{-1}(z) - e^{2\partial_{t_0}\partial_{\bar{t}_0}F} (P(z) + P^{-1}(z)) = W(\zeta) + W^{-1}(\zeta) - e^{2\partial_{t_0}\partial_{\bar{t}_0}F} (P(\zeta) + P^{-1}(\zeta)),$$

из которого следует, что выражение $W(z) + W^{-1}(z) - e^{2\partial_{t_0}\partial_{\bar{t}_0}F} (P(z) + P^{-1}(z)) := C$ не зависит от z . Устремляя z к бесконечности, мы можем выразить константу C через производные от функции F : $C = 2e^{-(\partial_{t_0} - \partial_{\bar{t}_0})\partial_{t_0}F} \partial_{\bar{t}_0} \partial_{t_1} F$. Разделив третье уравнение в (32) на четвертое, мы получаем соотношение, из которого следует, что C вещественно, т. е. $e^{\partial_{t_0}^2 F} \partial_{t_0} \partial_{\bar{t}_1} F = e^{\partial_{\bar{t}_0}^2 F} \partial_{\bar{t}_0} \partial_{t_1} F$. Это первое уравнение в (11). В результате получаем, что $P(z), W(z)$ удовлетворяют уравнению [13]

$$W(z) + W^{-1}(z) - R^2(P(z) + P^{-1}(z)) = C \quad (33)$$

с вещественными коэффициентами

$$R^2 = e^{2F_{0\bar{0}}}, \quad C = 2e^{F_{0\bar{0}} - F_{00}} F_{\bar{0}1}. \quad (34)$$

Функции $\bar{P}, \bar{W}$ удовлетворяют такому же уравнению. Как и в случае пфафовой иерархии КП, это уравнение задает эллиптическую кривую; P и W – алгебраические функции на ней, а z^{-1} – локальный параметр вблизи бесконечности. Как видно из (31), функции P и W имеют простые полюсы на бесконечности.

Для дальнейших вычислений удобнее пользоваться функциями

$$f(z) = \sqrt{P(z)W(z)} = ze^{-\partial_{t_0}\nabla(z)F}, \quad g(z) = \sqrt{\frac{P(z)}{W(z)}} = e^{-\partial_{\bar{t}_0}\nabla(z)F}. \quad (35)$$

У функции f простой полюс на бесконечности, а функция g на бесконечности регулярна. Комплексно-сопряженные к ним функции таковы: $\overline{f(z)} = \bar{f}(\bar{z}) = \bar{z}e^{-\partial_{\bar{t}_0}\bar{\nabla}(\bar{z})F}$, $\overline{g(z)} = \bar{g}(\bar{z}) = e^{-\partial_{\bar{t}_0}\bar{\nabla}(\bar{z})F}$. В терминах этих функций уравнение эллиптической кривой имеет вид

$$R^2(f^2g^2 + 1) + Cfg = f^2 + g^2. \quad (36)$$

Отметим симметрию $f \leftrightarrow g$. Функции $\bar{f}(z)$, $\bar{g}(z)$ удовлетворяют такому же уравнению.

3.2. Эллиптическая формулировка. Параметризация кривой (36) в терминах тета-функций $\theta_a(u) = \theta_a(u|\tau)$ может быть выбрана следующим образом:

$$f(z) = \frac{\theta_4(u(z))}{\theta_1(u(z))}, \quad g(z) = \frac{\theta_4(u(z) + \eta)}{\theta_1(u(z) + \eta)}. \quad (37)$$

Разложение $u(z) = u(z, \mathbf{t})$ вблизи бесконечности имеет тот же вид (20), но коэффициенты теперь комплексные, и, кроме того, имеется разложение $u(z) = \bar{u}(\bar{z}) = \bar{u}(\bar{z}, \mathbf{t})$ с комплексно-сопряженными коэффициентами:

$$u(z, \mathbf{t}) = \frac{c_1(\mathbf{t})}{z} + \frac{c_2(\mathbf{t})}{z^2} + \dots, \quad \bar{u}(z, \mathbf{t}) = \frac{\bar{c}_1(\mathbf{t})}{z} + \frac{\bar{c}_2(\mathbf{t})}{z^2} + \dots. \quad (38)$$

Параметр η , так же как γ в (17), является динамической переменной, как и модулярный параметр τ : $\eta = \eta(\mathbf{t})$, $\tau = \tau(\mathbf{t})$. Подставив (37) в уравнение кривой, можно заметить, что оно превращается в тождество, если

$$R = \frac{\theta_1(\eta)}{\theta_4(\eta)}, \quad C = 2 \frac{\theta_4^2(0)\theta_2(\eta)\theta_3(\eta)}{\theta_4^2(\eta)\theta_2(0)\theta_3(0)}. \quad (39)$$

Мы будем считать, что η вещественно, а τ чисто мнимо. Это согласуется с вещественностью R и C .

После параметризации только два уравнения в (32) остаются независимыми (скажем, первое и третье). Наша следующая задача состоит в представлении их в эллиптической форме. Сначала перепишем их в виде

$$(z_1^{-1} - z_2^{-1})e^{\nabla_1\nabla_2F} = R^{-1}g_1g_2 \frac{W_1 - W_2}{1 - P_1P_2},$$

$$e^{\nabla_1\bar{\nabla}_2F} = R^{-1}g_1\bar{g}_2 \frac{1 - W_1\bar{W}_2}{1 - P_1\bar{P}_2},$$

где $\nabla_i = \nabla(z_i)$, $\bar{\nabla}_i = \bar{\nabla}(\bar{z}_i)$, $g_i = g(z_i)$ и т. д. Тождества

$$\frac{W_1 - W_2}{1 - P_1P_2} = \frac{\theta_1(\eta)}{\theta_4(\eta)} \frac{\theta_1(u_1 + \eta)\theta_1(u_2 + \eta)}{\theta_4(u_1 + \eta)\theta_4(u_2 + \eta)} \frac{\theta_1(u_1 - u_2)}{\theta_4(u_1 - u_2)},$$

$$\frac{1 - W_1\bar{W}_2}{1 - P_1\bar{P}_2} = \frac{\theta_1(\eta)}{\theta_4(\eta)} \frac{\theta_1(u_1 + \eta)\theta_1(\bar{u}_2 + \eta)}{\theta_4(u_1 + \eta)\theta_4(\bar{u}_2 + \eta)} \frac{\theta_1(u_1 + \bar{u}_2 + \eta)}{\theta_4(u_1 + \bar{u}_2 + \eta)}$$

позволяют представить эти уравнения в следующем виде:

$$\begin{aligned} (z_1^{-1} - z_2^{-1})e^{\nabla(z_1)\nabla(z_2)F} &= \frac{\theta_1(u(z_1) - u(z_2))}{\theta_4(u(z_1) - u(z_2))}, \\ e^{\nabla(z_1)\bar{\nabla}(\bar{z}_2)F} &= \frac{\theta_1(u(z_1) + \bar{u}(\bar{z}_2) + \eta)}{\theta_4(u(z_1) + \bar{u}(\bar{z}_2) + \eta)}, \\ (z_1^{-1} - z_2^{-1})e^{\bar{\nabla}(z_1)\bar{\nabla}(z_2)F} &= \frac{\theta_1(\bar{u}(z_1) - \bar{u}(z_2))}{\theta_4(\bar{u}(z_1) - \bar{u}(z_2))}. \end{aligned} \quad (40)$$

Первое уравнение совпадает с (21). Это означает, что часть бездисперсионной пфаф-фовой иерархии Тоды (с фиксированными временами “с чертой”) совпадает с пфаф-фовой иерархией КП. Этот факт было бы нелегко заметить в алгебраической формулировке. Третье уравнение является комплексно-сопряженной версией первого. Оно представляет собой другую копию бездисперсионной пфаффовой иерархии КП, только уже относительно времен $\bar{t}_k$, с фиксированными t_k . Второе уравнение содержит смешанные производные по временам $\{t_k\}$ и $\{\bar{t}_k\}$ и, таким образом, объединяет две иерархии в одну более общую. Это уравнение инвариантно относительно комплексного сопряжения.

Устремляя z_2 к бесконечности в уравнении (40), получаем

$$e^{\partial_{t_0}\nabla(z)F} = z \frac{\theta_1(u(z))}{\theta_4(u(z))}, \quad e^{\partial_{\bar{t}_0}\nabla(z)F} = \frac{\theta_1(u(z) + \eta)}{\theta_4(u(z) + \eta)}, \quad (41)$$

что есть не что иное, как параметризация функций f и g (37) с учетом их определения (35). Дальнейшее разложение этих уравнений при $z \rightarrow \infty$ дает $e^{F_{00}} = \pi c_1 \theta_2(0) \theta_3(0)$ от лидирующих членов первого уравнения и $F_{\bar{0}1} = c_1 S'(\eta)$ от членов порядка $O(z^{-1})$ второго уравнения (функция S определена в (25)). Из (39) следует, что $R = e^{S(\eta)}$, $C/R = 2S'(\eta)/\pi \theta_2(0) \theta_3(0)$. Используя (27) вместе с подстановкой $u \rightarrow \eta$, получаем

$$R^2 + R^{-2} \left(1 - \frac{C^2}{4}\right) = 2 \operatorname{ch}(2F_{0\bar{0}}) - e^{-F_{00} - F_{\bar{0}\bar{0}}} F_{\bar{0}1} F_{0\bar{1}} = \frac{\theta_2^2(0|\tau)}{\theta_3^2(0|\tau)} + \frac{\theta_3^2(0|\tau)}{\theta_2^2(0|\tau)}. \quad (42)$$

Как и (24), это уравнение означает, что модулярный параметр τ выражается через частные производные второго порядка от функции F . То же самое верно и для c_1 и η .

Из уравнений (40) следуют соотношения

$$\begin{aligned} \nabla(z_1)S(u(z_2)) &= \partial_{t_0}S(u(z_1) - u(z_2)), \\ \bar{\nabla}(\bar{z}_1)S(u(z_2)) &= \partial_{\bar{t}_0}S(\bar{u}(\bar{z}_1) + u(z_2) + \eta), \\ \nabla(z_1)S(u(z_2) + \eta) &= \partial_{\bar{t}_0}S(u(z_1) - u(z_2)), \\ \bar{\nabla}(\bar{z}_1)S(u(z_2) + \eta) &= \partial_{\bar{t}_0}S(\bar{u}(\bar{z}_1) + u(z_2) + \eta). \end{aligned} \quad (43)$$

В частности, имеем $\nabla(z) \ln R = \partial_{\bar{t}_0}S(u(z)) = \partial_{\bar{t}_0}S(u(z) + \eta)$.

4. СРАВНЕНИЕ С ДРУГИМИ ИЕРАРХИЯМИ

Полезно сравнить бездисперсионные пфаффовы иерархии с более знакомыми бездисперсионными иерархиями КП (бездисперсионной иерархией КП – dKP, бездисперсионной модифицированной иерархией КП – dmKP) и бездисперсионной двумерной цепочкой Тоды (d2DTL):

$$\text{dKP :} \quad e^{D(z)D(\zeta)F} = 1 - \frac{\partial_{t_1}(D(z) - D(\zeta))F}{z - \zeta}, \quad (44)$$

$$\text{dmKP :} \quad e^{D(z)D(\zeta)F} = \frac{ze^{-\partial_{t_0}D(z)F} - \zeta e^{-\partial_{t_0}D(\zeta)F}}{z - \zeta}, \quad (45)$$

$$\text{d2DTL :} \quad \begin{cases} e^{D(z)D(\zeta)F} = \frac{ze^{-\partial_{t_0}D(z)F} - \zeta e^{-\partial_{t_0}D(\zeta)F}}{z - \zeta}, \\ e^{-D(z)\bar{D}(\bar{\zeta})F} = 1 - (z\bar{\zeta})^{-1}e^{\partial_{t_0}(\partial_{t_0}+D(z)+\bar{D}(\bar{\zeta}))F}. \end{cases} \quad (46)$$

В случае dKP имеется набор (вещественных) времен $\{t_1, t_2, \dots\}$. В случае dmKP этот набор дополняется вещественным t_0 . В случае d2DTL время t_0 по-прежнему вещественное, в то время как остальные становятся комплексными, т.е. имеются два набора времен $\{t_1, t_2, \dots\}$ и $\{\bar{t}_1, \bar{t}_2, \dots\}$, которые комплексно-сопряжены друг другу. Заметим, что первое уравнение в (46) и уравнение (45) идентичны (подробнее см. в [18], [19]).

4.1. Сравнение пфаффовой иерархии КП с dKP и dmKP. В первую очередь, заметим, что из уравнения dmKP (45) следует (44). Действительно, переписав (45) в виде $z_{12}e^{D_1D_2F} = z_1e^{-D_1F_0} - z_2e^{-D_2F_0}$ и просуммировав уравнения для пар 12, 23, 31, найдем $z_{12}e^{D_1D_2F} + z_{23}e^{D_2D_3F} + z_{31}e^{D_1D_3F} = 0$. Устремив z_3 к бесконечности, получим (44). Действуя таким образом, можно показать, что из уравнения (45), переписанного с помощью оператора $\nabla(z)$ в форме $(z_1^{-1} - z_2^{-1})e^{\nabla_1\nabla_2F} = z_1^{-1}e^{-\nabla_1F_0} - z_2^{-1}e^{-\nabla_2F_0}$, следует уравнение

$$\begin{vmatrix} 1 & z_1^{-1} & e^{\nabla_2\nabla_3F} \\ 1 & z_2^{-1} & e^{\nabla_1\nabla_3F} \\ 1 & z_3^{-1} & e^{\nabla_1\nabla_2F} \end{vmatrix} = 0. \quad (47)$$

В свою очередь, из этого уравнения следуют аналогичные детерминантные соотношения, содержащие больше переменных. В частности, легко показать, что из (47) следует уравнение

$$\begin{vmatrix} 1 & z_1^{-1} & z_1^{-2} & e^{(\nabla_2\nabla_3+\nabla_3\nabla_4+\nabla_4\nabla_2)F} \\ 1 & z_2^{-1} & z_2^{-2} & e^{(\nabla_1\nabla_3+\nabla_3\nabla_4+\nabla_4\nabla_1)F} \\ 1 & z_3^{-1} & z_3^{-2} & e^{(\nabla_1\nabla_2+\nabla_2\nabla_4+\nabla_4\nabla_1)F} \\ 1 & z_4^{-1} & z_4^{-2} & e^{(\nabla_1\nabla_2+\nabla_2\nabla_3+\nabla_3\nabla_1)F} \end{vmatrix} = 0. \quad (48)$$

На самом деле это бездисперсионный предел одного из высших уравнений разностной иерархии Хироты [20]. Теперь рассмотрим пфаффову иерархию КП в эллиптической форме. Подставляя левую часть уравнения (21) (для различных пар переменных) в тождество

$$\begin{aligned} & \frac{\theta_1(u_{12})\theta_1(u_{23})\theta_1(u_{31})}{\theta_4(u_{12})\theta_4(u_{23})\theta_4(u_{31})} - \frac{\theta_1(u_{12})\theta_1(u_{24})\theta_1(u_{41})}{\theta_4(u_{12})\theta_4(u_{24})\theta_4(u_{41})} + \\ & + \frac{\theta_1(u_{13})\theta_1(u_{34})\theta_1(u_{41})}{\theta_4(u_{13})\theta_4(u_{34})\theta_4(u_{41})} - \frac{\theta_1(u_{23})\theta_1(u_{34})\theta_1(u_{42})}{\theta_4(u_{23})\theta_4(u_{34})\theta_4(u_{42})} = 0, \end{aligned} \quad (49)$$

мы получаем соотношение для функции F точно в такой же форме (48), как и высшее уравнение иерархии dmKP. В то же время ни одно из решений этой иерархии не удовлетворяет уравнениям (1), (2) пфаффовой иерархии КП. Действительно, как было показано выше, уравнение (44) выполняется для иерархии dmKP; подставляя его в уравнение (1), получим $e^{2\partial_{t_0}(2\partial_{t_0}+D(z)+D(\zeta))F} = 0$, что невозможно для любой функции F . Например, простейшим решением для (47) и (48) является $F = 0$, что не является решением уравнения (1). Таким образом, из (47) следует (48), но не наоборот.

4.2. Бездисперсионная цепочка Тоды. Отметим также известную редукцию иерархии d2DTL, получающуюся при наложении условий $\partial_{t_k} F = \partial_{t_k} F$ для всех $k \geq 1$, что означает $D(z)F = \bar{D}(z)F$. Эта иерархия называется бездисперсионной цепочкой Тоды (dTC):

$$\text{dTC} : \quad \begin{cases} e^{D(z)D(\zeta)F} = \frac{ze^{-\partial_{t_0}D(z)F} - \zeta e^{-\partial_{t_0}D(\zeta)F}}{z - \zeta}, \\ e^{-D(z)D(\zeta)F} = 1 - (z\zeta)^{-1}e^{\partial_{t_0}(2\partial_{t_0}+D(z)+D(\zeta))F}. \end{cases} \quad (50)$$

С помощью функции $\omega(z) = ze^{-F_{00}/2 - \partial_{t_0}D(z)F}$ мы можем переписать (50) в виде

$$\begin{aligned} e^{-F_{00}/2 + D(z)D(\zeta)F} &= \frac{\omega(z) - \omega(\zeta)}{z - \zeta}, \\ e^{-D(z)D(\zeta)F} &= 1 - \frac{1}{\omega(z)\omega(\zeta)}. \end{aligned} \quad (51)$$

Отметим схожесть с уравнениями (14), (15). Согласно [10], перемножив эти уравнения, мы приходим к выводу, что выражение $z - e^{F_{00}/2}(\omega(z) + \omega^{-1}(z))$ не зависит от z . Устремляя z к бесконечности, находим, что эта константа равна F_{01} . Таким образом, переменные z и ω удовлетворяют алгебраическому уравнению

$$z = e^{F_{00}/2} \left(\omega(z) + \frac{1}{\omega(z)} \right) + F_{01}, \quad (52)$$

которое определяет рациональную (рода 0) кривую.

Наконец, можно показать, что бездисперсионная пфаффова иерархия КП (1), (2) содержит бездисперсионную цепочку Тоды как редукцию (см. [10], утверждение 4.1). Рассмотрим такие решения пфаффовой иерархии КП, что $\partial_{t_{2k+1}} F = 0$ для всех $k \geq 0$.

Переопределим времена следующим образом: $\tilde{t}_n = 2t_{2n}$, $n \geq 1$, $\tilde{t}_0 = t_0/2$. Тогда легко проверить, что уравнения (1), (2) превращаются в систему уравнений

$$\begin{aligned} e^{\tilde{D}(z^2)\tilde{D}(\zeta^2)\tilde{F}} &= \frac{z^2 e^{-\partial_{\tilde{t}_0}\tilde{D}(z^2)\tilde{F}} - \zeta^2 e^{-\partial_{\tilde{t}_0}\tilde{D}(\zeta^2)\tilde{F}}}{z^2 - \zeta^2}, \\ e^{-\tilde{D}(z^2)\tilde{D}(\zeta^2)\tilde{F}} &= 1 - (z^2 \zeta^2)^{-1} e^{\partial_{\tilde{t}_0}(\partial_{\tilde{t}_0} + \tilde{D}(z^2) + \tilde{D}(\zeta^2))\tilde{F}} \end{aligned} \quad (53)$$

на функцию $\tilde{F}(\tilde{t}_0, \tilde{t}_1, \tilde{t}_2, \dots) = F(t_0, 0, t_2, 0, t_4, 0, \dots)$, где

$$\tilde{D}(z) = \sum_{k \geq 1} \frac{z^{-k}}{k} \frac{\partial}{\partial \tilde{t}_k},$$

что эквивалентно (50).

ПРИЛОЖЕНИЕ

Тета-функции Якоби $\theta_a(u) = \theta_a(u | \tau)$, $a = 1, 2, 3, 4$, определяются формулами

$$\begin{aligned} \theta_1(u) &= - \sum_{k \in \mathbb{Z}} \exp \left\{ \pi i \tau \left(k + \frac{1}{2} \right)^2 + 2\pi i \left(u + \frac{1}{2} \right) \left(k + \frac{1}{2} \right) \right\}, \\ \theta_2(u) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \exp \left\{ \pi i \tau \left(k + \frac{1}{2} \right)^2 + 2\pi i u \left(k + \frac{1}{2} \right) \right\}, \\ \theta_3(u) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \exp \{ \pi i \tau k^2 + 2\pi i u k \}, \\ \theta_4(u) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \exp \left\{ \pi i \tau k^2 + 2\pi i \left(u + \frac{1}{2} \right) k \right\}, \end{aligned} \quad (П.1)$$

где τ является комплексным параметром (модулярным параметром) таким, что $\text{Im } \tau > 0$. Функция $\theta_1(u)$ является нечетной, остальные три – четные. Индекс a понимается по модулю 4, т.е. справедливо тождество $\theta_a(z) \equiv \theta_{a+4}(z)$. Положим $\omega_0 = 0$, $\omega_1 = 1/2$, $\omega_2 = (1 + \tau)/2$, $\omega_3 = \tau/2$, тогда функция $\theta_a(u)$ имеет простые нули в точках решетки $\omega_{a-1} + \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau$.

Тета-функции обладают следующими квазипериодическими свойствами при сдвигах на 1 и τ :

$$\begin{aligned} \theta_a(u + 1) &= e^{\pi i(1 + 2\partial_\tau \omega_{a-1})} \theta_a(u), \\ \theta_a(u + \tau) &= e^{\pi i(a + 2\partial_\tau \omega_{a-1})} e^{-\pi i \tau - 2\pi i u} \theta_a(u). \end{aligned} \quad (П.2)$$

Сдвиги на полупериоды связывают различные тета-функции. Отметим также соотношение

$$\theta'_1(0) = \pi \theta_2(0) \theta_3(0) \theta_4(0). \quad (П.3)$$

Много полезных формул с тета-функциями можно найти в работе [21].

Благодарности. Авторы благодарны С. Харчеву, И. Кричеву, С. Натанзону, А. Орлову и Т. Такебе за обсуждения. Часть результатов данной публикации вошли в доклад, сделанный на Четвертом Международном семинаре “Комбинаторика пространств модулей, кластерные алгебры и топологическая рекурсия”.

Список литературы

- [1] M. Jimbo, T. Miwa, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, **19**:3 (1983), 943–1001.
- [2] R. Hirota, Y. Ohta, *J. Phys. Soc. Japan*, **60**:3 (1991), 798–809.
- [3] M. Adler, E. Horozov, P. van Moerbeke, *Internat. Math. Res. Notices*, **1999**:11 (1999), 569–588.
- [4] M. Adler, T. Shiota, P. van Moerbeke, *Math. Ann.*, **322**:3 (2002), 423–476.
- [5] S. Kakei, *J. Phys. Soc. Japan*, **68**:9 (1999), 2875–2877.
- [6] S. Isojima, R. Willox, J. Satsuma, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **35**:32 (2002), 6893–6909.
- [7] J. van de Leur, *J. Nonlinear Math. Phys.*, **8**:2 (2001), 288–310.
- [8] A. Orlov, *Phys. Lett. A*, **378**:4 (2014), 319–328.
- [9] Y. Kodama, K.-I. Maruno, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **39**:15 (2006), 4063–4086, arXiv: nlin/0602031.
- [10] Y. Kodama, V. Pierce, *Commun. Math. Phys.*, **292**:2 (2009), 529–568, arXiv: 0811.0351.
- [11] M. Adler, V. Kuznetsov, P. van Moerbeke, *Ergodic Theory Dynam. Systems*, **22**:5 (2002), 1365–1405.
- [12] R. Willox, *Glasg. Math. J.*, **47**:A (2005), 221–231.
- [13] K. Takasaki, *SIGMA*, **5** (2009), 109, 34 pp.
- [14] K. Takasaki, “Differential Fay identities and auxiliary linear problem of integrable hierarchies”, *Exploring New Structures and Natural Constructions in Mathematical Physics* (Nagoya, Japan, March 5–8, 2007), Advanced Studies in Pure Mathematics, **61**, eds. K. Hasegawa, T. Hayashi, S. Hosono, Y. Yamada, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2011, 387–441.
- [15] И. М. Кричевер, *Функц. анализ и его прил.*, **22**:3 (1988), 37–52.
- [16] I. Krichever, A. Marshakov, A. Zabrodin, *Commun. Math. Phys.*, **259**:1 (2005), 1–44, arXiv: hep-th/0309010.
- [17] V. Akhmedova, A. Zabrodin, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **47**:39 (2014), 392001, 13 pp., arXiv: 1404.5135.
- [18] T. Takasaki, T. Takebe, *Rev. Math. Phys.*, **7**:5 (1995), 743–808.
- [19] T. Takebe, *Rikkyo Center of Mathematical Physics*, **2** (2014), 1–95.
- [20] А. В. Забродин, *ТМФ*, **113**:2 (1997), 179–230.
- [21] S. Kharchev, A. Zabrodin, *J. Geom. Phys.*, **94** (2015), 19–31, arXiv: 1502.04603.