Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Чуань-Чжун Ли, Цзин-Сун Хэ, О расширенной иерархии Z_N -Тоды, *ТМФ*, 2015, том 185, номер 2, 289–312

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8857>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.90.164.192

26 апреля 2023 г., 17:16:27

© 2015 г.

Чуань Чжун Ли*, Цзин Сун Хэ*

О РАСШИРЕННОЙ ИЕРАРХИИ Z_N -ТОДЫ

Построены расширенные уравнения потоков для новой иерархии Z_N -Тоды, принимающей значения в коммутативной подалгебре Z_N алгебры $gl(N, \mathbb{C})$. Представлены билинейные уравнения Хироты и тау-функции новой расширенной иерархии Z_N -Тоды. С учетом наличия логарифмических членов построены некоторые расширенные вершинные операторы в обобщенных билинейных уравнениях Хироты, которые могут оказаться полезными в топологической теории поля и в теории Громова–Виттена. Приводится преобразование Дарбу и бигамильтонова структура этой иерархии. С помощью гамильтоновой тау-симметрии получена другая тау-функция этой иерархии, обладающая некоторой неизвестной загадочной связью с тау-функцией, введенной с помощью теории Сато.

Ключевые слова: расширенная иерархия Z_N -Тоды, квадратное уравнение Хироты, преобразование Дарбу, бигамильтонова структура.

DOI: 10.4213/tmf8857

1. ВВЕДЕНИЕ

Будучи полностью интегрируемыми системами, иерархия Кадомцева–Петвиашвили (КП) и решеточная иерархия Тоды имеют много важных приложений в математике и физике, включая теорию представлений алгебры Ли, ортогональные полиномы и модель случайных матриц [1]–[5]. Системы КП и Тоды имеют различного рода редукции и обобщения, например иерархии ВКП, СКП, расширенная иерархия Тоды [6], [7], биградуированная иерархия Тоды [8]–[14] и т.д. Существуют обобщения другого типа – так называемая многокомпонентная система КП [15], [16] или

Чуань Чжун Ли поддержан National Natural Science Foundation of China (грант № 11201251, 11571192), Zhejiang Provincial Natural Science Foundation of China (грант № LY15A01004), The Natural Science Foundation of Ningbo (гранты № 2015A610157, 2014A610029). Цзин Сун Хэ поддержан The National Natural Science Foundation of China (грант № 11271210), K. C. Wong Magna Fund in Ningbo University.

*Department of Mathematics and Ningbo Collaborative Innovation Center of Nonlinear Hazard System of Ocean and Atmosphere, Ningbo University, Ningbo, China.
E-mail: lichuanzhong@nbu.edu.cn, hejingsong@nbu.edu.cn

многокомпонентная система Тоды, которые привлекают все большее внимание по причине их широкого использования во многих областях, таких как ортогональные многочлены многих переменных и броуновское движение без самопересечений.

Применение многокомпонентной иерархии КП в теории представлений и модели случайных матриц обсуждались в работах [15], [16]. В работе [3] отмечено, что тау-функции $2N$ -компонентного уравнения КП порождают решения N -компонентной иерархии двумерной цепочки Тоды. Многокомпонентная иерархия двумерной цепочки Тоды рассматривалась с точки зрения проблемы факторизации Гаусса–Бореля, теории совместно ортогональных матричных многочленов, броуновского движения без самопересечений и матричной проблемы Римана–Гильберта [17]–[20]. В действительности многокомпонентная иерархия двумерной цепочки Тоды, рассмотренная в работе [18], является периодической редукцией дважды-бесконечной матричной иерархии двумерной цепочки Тоды. Коэффициенты (или динамические переменные) многокомпонентной иерархии двумерной цепочки Тоды принимают значения комплексных конечномерных матриц. В качестве уравнения первого потока многокомпонентная иерархия двумерной цепочки Тоды содержит матричное уравнение Тоды.

Добавляя дополнительные логарифмические потоки к решеточной иерархии Тоды, получим расширенную иерархию Тоды [6], задаваемую оператором Лакса

$$L = \Lambda + u + e^v \Lambda^{-1}, \quad u, v \in \mathbb{C}, \quad (1.1)$$

который определяет инвариант Громова–Виттена для $\mathbb{CP}^1$. Потенциал Громова–Виттена для $\mathbb{CP}^1$ является по сути тау-функцией расширенной иерархии Тоды, т. е. потенциал Громова–Виттена τ для $\mathbb{CP}^1$ порождает следующее выражение:

$$\frac{d\lambda}{\lambda} (\Gamma^{\delta\#} \otimes \Gamma^{\delta}) (\Gamma^{\alpha} \otimes \Gamma^{-\alpha} - \Gamma^{-\alpha} \otimes \Gamma^{\alpha}) (\tau \otimes \tau), \quad (1.2)$$

входящее в квадратные уравнения Хироты [7] для расширенной иерархии Тоды, регулярное в λ и полученное при $q_0 - q'_0 = l\epsilon$ для всех $l \in \mathbb{Z}$. Расширенная биградуированная иерархия Тоды является расширением биградуированной иерархии Тоды, в которую входят дополнительные логарифмические потоки [8], [10]. В настоящей статье показано, что квадратные уравнения Хироты (1.2) можно получить из билинейных уравнений Хироты расширенной иерархии Z_N -Тоды (РИЗТ) как редукции на алгебре Ли. Поэтому важной мотивацией наших исследований является приложение билинейного уравнения Хироты для РИЗТ в теории Громова–Виттена. Билинейное уравнение Хироты для расширенной биградуированной иерархии Тоды было эквивалентным образом построено в нашей работе [9] и в недавней работе [21], так как потоки $t_{1,N}$ и $t_{0,N}$ для расширенной биградуированной иерархии Тоды эквивалентны. В то же время было доказано, что оно определяет инвариант Громова–Виттена полного дочернего потенциала для $\mathbb{P}^1$ -орбифолдов [21]. Естественно возникает вопрос о соответствующей расширенной многокомпонентной иерархии Тоды (как матричного обобщения расширенной иерархии Тоды [6]) и расширенной многокомпонентной биградуированной иерархии Тоды. Существует класс орбифолдов, который должен определяться некоторыми логарифмическими иерархиями. Именно поэтому мы считаем, что новая логарифмическая иерархия такого типа может быть полезной в теории инвариантов Громова–Виттена, обусловленной

этими двумя новыми иерархиями. При такой мотивации наша работа [22] посвящена построению некоторого вида квадратного уравнения Хироты, принимающего значения на дифференциальной матричной алгебре. Билинейные уравнения Хироты такого рода могут быть полезными в теории Громова-Виттена. В работе [23] была построена новая иерархия, названная иерархией Z_m -КП, принимающая значения в максимальной коммутативной подалгебре алгебры $gl(m, \mathbb{C})$, в то же время обсуждалась связь между многообразием Фробениуса и бездисперсионной редуцированной иерархией Z_m -КП. Это побудило нас рассмотреть квадратное уравнение Хироты для коммутативной версии расширенной многокомпонентной иерархии Тоды, которая может быть полезной в теории многообразий Фробениуса.

Статья организована следующим образом. В разделе 2 мы напоминаем проблему факторизации и строим логарифмические матричные операторы, с помощью которых определяем расширенный поток многокомпонентной иерархии Z_N -Тоды. В разделе 3 приведены уравнения Лакса для РИЗТ, в то же время в эту иерархию вводятся уравнения многокомпонентной иерархии Z_N -Тоды и расширенные уравнения. С помощью уравнений Сато в разделе 4 получены билинейные уравнения Хироты для РИЗТ. Тау-функция для РИЗТ определяется в разделе 5, формализм обобщенных матричных вершинных операторов и квадратные уравнения Хироты получены в разделе 6. В разделе 7 строятся многократные преобразования РИЗТ на основе техники детерминантов [24]. Для доказательства интегрируемости новой иерархии в разделе 8 строятся бигамильтонова структура и тау-симметрия для РИЗТ. Раздел 9 посвящен кратким выводам и обсуждениям.

2. ФАКТОРИЗАЦИЯ И ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ ОПЕРАТОРЫ

Предположим, что $\tilde{G}$ является группой, содержащей линейные обратимые элементы комплексной $(N \times N)$ -матрицы, а ее алгебра Ли $\tilde{\mathfrak{g}}$ означает ассоциативную алгебру комплексных $(N \times N)$ -матриц $M_N(\mathbb{C})$. Рассмотрим теперь линейное пространство функций $g: \mathbb{R} \rightarrow M_N(\mathbb{C})$ с оператором сдвига Λ , действующим на эти функции следующим образом: $(\Lambda g)(x) := g(x + \epsilon)$. Левое умножение на $X: \mathbb{R} \rightarrow M_N(\mathbb{C})$ имеет вид $X\Lambda^j$, $(X\Lambda^j)(g)(x) := X(x) \circ g(x + j\epsilon)$, оно вводит произведение

$$(X(x)\Lambda^i) \circ (Y(x)\Lambda^j) := X(x)Y(x + i\epsilon)\Lambda^{i+j}.$$

Тогда множество $\mathfrak{g}$ рядов Лорана по Λ , будучи ассоциативной алгеброй, является алгеброй Ли со стандартным коммутатором.

Эта алгебра Ли имеет следующее важное разбиение:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_+ \oplus \mathfrak{g}_-, \quad (2.1)$$

где

$$\mathfrak{g}_+ = \left\{ \sum_{j \geq 0} X_j(x)\Lambda^j, X_j(x) \in M_N(\mathbb{C}) \right\}, \quad \mathfrak{g}_- = \left\{ \sum_{j < 0} X_j(x)\Lambda^j, X_j(x) \in M_N(\mathbb{C}) \right\}.$$

Разбиение (2.1) позволяет рассмотреть следующую факторизацию функций $g \in G$:

$$g = g_-^{-1} \circ g_+, \quad g_{\pm} \in G_{\pm}, \quad (2.2)$$

где группы $G_{\pm}$ имеют алгебры $\mathfrak{g}_{\pm}$ в качестве своих алгебр Ли, G_{+} – множество линейных обратимых операторов вида $\sum_{j \geq 0} g_j(x) \Lambda^j$, а G_{-} – множество линейных обратимых операторов вида $1 + \sum_{j < 0} g_j(x) \Lambda^j$. Эта алгебра имеет максимальную коммутативную подалгебру $Z_N = \mathbb{C}[\Gamma]/(\Gamma^N)$ и $\Gamma = (\delta_{i,j+1})_{ij} \in gl(N, \mathbb{C})$. Обозначим $Z_N(\Lambda) := \mathfrak{g}_c$, тогда имеем следующее разбиение:

$$\mathfrak{g}_c = \mathfrak{g}_{c+} \oplus \mathfrak{g}_{c-}, \quad (2.3)$$

где

$$\mathfrak{g}_{c+} = \left\{ \sum_{j \geq 0} X_j(x) \Lambda^j, X_j(x) \in Z_N \right\}, \quad \mathfrak{g}_{c-} = \left\{ \sum_{j < 0} X_j(x) \Lambda^j, X_j(x) \in Z_N \right\}.$$

Разбиение (2.3) позволяет рассмотреть следующую факторизацию функций $g_c \in G_c$:

$$g_c = g_{c-}^{-1} \circ g_{c+}, \quad g_{c\pm} \in G_{c\pm}, \quad (2.4)$$

где группы $G_{c\pm}$ имеют алгебры $\mathfrak{g}_{c\pm}$ в качестве своих алгебр Ли, G_{c+} – множество линейных обратимых операторов вида $\sum_{j \geq 0} g_j(x) \Lambda^j$, а G_{c-} – множество линейных обратимых операторов вида $1 + \sum_{j < 0} g_j(x) \Lambda^j$.

Теперь введем свободные операторы $W_0, \bar{W}_0 \in G_c$:

$$\begin{aligned} W_0 &:= \exp \left[\sum_{j=0}^{\infty} t_j \frac{\Lambda^j}{\epsilon j!} + s_j \frac{\Lambda^j}{\epsilon j!} (\epsilon \partial - c_j) \right], & \partial &= \frac{\partial}{\partial x}, \\ \bar{W}_0 &:= \exp \left[\sum_{j=0}^{\infty} t_j \frac{\Lambda^{-j}}{\epsilon j!} + s_j \frac{\Lambda^{-j}}{\epsilon j!} (\epsilon \partial - c_j) \right], & c_j &= \sum_{i=1}^j \frac{1}{i}, \end{aligned} \quad (2.5)$$

где $t_j, s_j \in \mathbb{C}$ играют роль непрерывных времен.

Введем одевающие операторы $W, \bar{W}$

$$W := S \circ W_0, \quad \bar{W} := \bar{S} \circ \bar{W}_0, \quad S \in G_{c-}, \quad \bar{S} \in G_{c+}. \quad (2.6)$$

Для данного элемента $g \in G_c$, обозначив $t = (t_j)$, $s = (s_j)$, $j \in \mathbb{N}$, можно рассмотреть задачу факторизации в G_c , аналогичную рассмотренной в работе [18]:

$$W \circ g = \bar{W}, \quad (2.7)$$

т. е. задачу факторизации

$$S(t, s) \circ W_0 \circ g = \bar{S}(t, s) \circ \bar{W}_0. \quad (2.8)$$

Заметим, что операторы $S, \bar{S}$ имеют разложения вида

$$\begin{aligned} S &= \mathbb{I}_N + \omega_1(x) \Lambda^{-1} + \omega_2(x) \Lambda^{-2} + \cdots \in G_{c-}, \\ \bar{S} &= \bar{\omega}_0(x) + \bar{\omega}_1(x) \Lambda + \bar{\omega}_2(x) \Lambda^2 + \cdots \in G_{c+}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Введем также символьные обозначения $\mathbb{S}, \bar{\mathbb{S}}$ для операторов $S, \bar{S}$:

$$\begin{aligned} \mathbb{S} &= \mathbb{I}_N + \omega_1(x) \lambda^{-1} + \omega_2(x) \lambda^{-2} + \cdots, \\ \bar{\mathbb{S}} &= \bar{\omega}_0(x) + \bar{\omega}_1(x) \lambda + \bar{\omega}_2(x) \lambda^2 + \cdots. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Операторы S^{-1} , $\bar{S}^{-1}$, обратные к операторам S , $\bar{S}$, имеют следующие разложения:

$$\begin{aligned} S^{-1} &= \mathbb{I}_N + \omega'_1(x)\Lambda^{-1} + \omega'_2(x)\Lambda^{-2} + \cdots \in G_{c-}, \\ \bar{S}^{-1} &= \bar{\omega}'_0(x) + \bar{\omega}'_1(x)\Lambda + \bar{\omega}'_2(x)\Lambda^2 + \cdots \in G_{c+}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Введем также символьные обозначения $\mathbb{S}^{-1}$, $\bar{\mathbb{S}}^{-1}$ для операторов S^{-1} , $\bar{S}^{-1}$:

$$\begin{aligned} \mathbb{S}^{-1} &= \mathbb{I}_N + \omega'_1(x)\lambda^{-1} + \omega'_2(x)\lambda^{-2} + \cdots, \\ \bar{\mathbb{S}}^{-1} &= \bar{\omega}'_0(x) + \bar{\omega}'_1(x)\lambda + \bar{\omega}'_2(x)\lambda^2 + \cdots. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Операторы Лакса $\mathcal{L} \in G_c$ вводятся по формуле

$$\mathcal{L} := W \circ \Lambda \circ W^{-1} = \bar{W} \circ \Lambda^{-1} \circ \bar{W}^{-1} \quad (2.13)$$

и имеют следующие разложения:

$$\mathcal{L} = \Lambda + u_1(x) + u_2(x)\Lambda^{-1}. \quad (2.14)$$

Фактически операторы Лакса $\mathcal{L} \in G_c$ можно также ввести аналогичным образом по формуле

$$\mathcal{L} := S \circ \Lambda \circ S^{-1} = \bar{S} \circ \Lambda^{-1} \circ \bar{S}^{-1}. \quad (2.15)$$

Эти определения представляют собой непрерывным образом интерполированную версию многокомпонентной коммутативной иерархии Тоды, т. е. в эту иерархию введен непрерывный пространственный параметр x . Это подразумевает отсутствие непрерывного потока $\partial/\partial x$. Чтобы сделать этот поток полным, введем следующую логарифмическую матрицу:

$$\begin{aligned} \log_+ \mathcal{L} &= W \circ \epsilon \partial \circ W^{-1} = S \circ \epsilon \partial \circ S^{-1}, \\ \log_- \mathcal{L} &= -\bar{W} \circ \epsilon \partial \circ \bar{W}^{-1} = -\bar{S} \circ \epsilon \partial \circ \bar{S}^{-1}, \end{aligned} \quad (2.16)$$

где ∂ – производная по пространственной переменной x .

Комбинируя вместе эти логарифмические операторы, можно ввести следующую важную логарифмическую матрицу:

$$\log \mathcal{L} := \frac{1}{2}(\log_+ \mathcal{L} + \log_- \mathcal{L}) = \frac{1}{2}(S \circ \epsilon \partial \circ S^{-1} - \bar{S} \circ \epsilon \partial \circ \bar{S}^{-1}) := \sum_{i=-\infty}^{+\infty} W_i \Lambda^i \in G_c, \quad (2.17)$$

которая порождает множество уравнений потоков, содержащее пространственный поток, в уравнениях Лакса, которые будут введены ниже.

3. УРАВНЕНИЯ ЛАКСА ДЛЯ РИЗТ

В этом разделе мы воспользуемся задачей факторизации (2.7) для вывода уравнений Лакса. Сначала введем некоторые удобные обозначения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Матричные операторы B_j , D_j определим следующим образом:

$$B_j := \frac{\mathcal{L}^{j+1}}{(j+1)!}, \quad D_j := \frac{2\mathcal{L}^j}{j!}(\log \mathcal{L} - c_j), \quad c_j = \sum_{i=1}^j \frac{1}{i}, \quad j \geq 0. \quad (3.1)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. *Расширенная иерархия Z_N -Тоды* – это иерархия, в которой одевающие операторы $S, \bar{S}$ удовлетворяют следующим уравнениям Сато:

$$\begin{aligned} \epsilon \partial_{t_j} S &= -(B_j)_- S, & \epsilon \partial_{t_j} \bar{S} &= (B_j)_+ \bar{S}, \\ \epsilon \partial_{s_j} S &= -(D_j)_- S, & \epsilon \partial_{s_j} \bar{S} &= (D_j)_+ \bar{S}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Тогда легко получить следующее предложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Одевающие операторы $W, \bar{W}$ подчиняются следующим уравнениям Сато:*

$$\begin{aligned} \epsilon \partial_{t_j} W &= (B_j)_+ W, & \epsilon \partial_{t_j} \bar{W} &= (B_j)_+ \bar{W}, \\ \epsilon \partial_{s_j} W &= \left(\frac{\mathcal{L}^j}{j!} (\log_+ \mathcal{L} - c_j) - (D_j)_- \right) W, \\ \epsilon \partial_{s_j} \bar{W} &= \left(-\frac{\mathcal{L}^j}{j!} (\log_- \mathcal{L} - c_j) + (D_j)_+ \right) \bar{W}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Опираясь на предложение 1, выведем уравнения Лакса для операторов Лакса.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Уравнения Лакса для РИЗТ имеют вид*

$$\begin{aligned} \epsilon \partial_{t_j} \mathcal{L} &= [(B_j)_+, \mathcal{L}], & \epsilon \partial_{s_j} \mathcal{L} &= [(D_j)_+, \mathcal{L}], & \epsilon \partial_{t_j} \log \mathcal{L} &= [(B_j)_+, \log \mathcal{L}], \\ \epsilon (\log \mathcal{L})_{s_j} &= [-(D_j)_-, \log_+ \mathcal{L}] + [(D_j)_+, \log_- \mathcal{L}]. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Чтобы яснее разобраться в иерархии такого типа, представим уравнения Z_N -Тоды как уравнения t_0 -потока.

3.1. Расширенные уравнения Z_N -Тоды. С учетом задачи факторизации (2.7) и уравнений Сато, и приняв во внимание, что $S \in G_{c-}$ и $\bar{S} \in G_{c+}$, запишем t_0 -поток для $\mathcal{L}$ вида $\mathcal{L} = \Lambda + U + V\Lambda^{-1}$ следующим образом:

$$\epsilon \partial_{t_0} \mathcal{L} = [\Lambda + U, V\Lambda^{-1}], \quad (3.5)$$

что приводит к матричному уравнению Тоды

$$\begin{aligned} \epsilon \partial_{t_0} U &= V(x + \epsilon) - V(x), \\ \epsilon \partial_{t_0} V &= U(x)V(x) - V(x)U(x - \epsilon). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Конечно, можно поменять порядок матриц, поскольку подалгебра Z_N коммутативна. Положим

$$U = \begin{bmatrix} u_0 & 0 \\ u_1 & u_0 \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} v_0 & 0 \\ v_1 & v_0 \end{bmatrix}, \quad (3.7)$$

тогда специфическое спаренное уравнение Тоды имеет вид

$$\begin{aligned} \epsilon \partial_{t_0} u_0 &= v_0(x + \epsilon) - v_0(x), \\ \epsilon \partial_{t_0} u_1 &= v_1(x + \epsilon) - v_1(x), \\ \epsilon \partial_{t_0} v_0 &= u_0(x)v_0(x) - v_0(x)v_0(x - \epsilon), \\ \epsilon \partial_{t_0} v_1 &= (u_1(x) - u_1(x - \epsilon))v_0(x) - v_1(x)(u_0(x) - u_0(x - \epsilon)). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Чтобы получить стандартное матричное уравнение Тоды, нужно использовать альтернативные выражения

$$\begin{aligned} U &:= \omega_1(x) - \omega_1(x + \epsilon) = \epsilon \partial_{t_1} \phi(x), \\ V &:= e^{\phi(x)} e^{-\phi(x-\epsilon)} = -\epsilon \partial_{t_1} \omega_1(x). \end{aligned} \quad (3.9)$$

Из уравнения Сато выведем набор нелинейных дифференциально-разностных уравнений в частных производных

$$\begin{aligned} \omega_1(x) - \omega_1(x + \epsilon) &= \epsilon \partial_{t_1} (e^{\phi(x)}) e^{-\phi(x)}, \\ \epsilon \partial_{t_1} \omega_1(x) &= -e^{\phi(x)} e^{-\phi(x-\epsilon)}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Заметим, что если объединить два уравнения в одном, то получим

$$\epsilon^2 \partial_{t_1}^2 \phi(x) = e^{\phi(x+\epsilon)} e^{-\phi(x)} - e^{\phi(x)} e^{-\phi(x-\epsilon)},$$

что является $(N \times N)$ -матричным расширением уравнения Тоды, из которого можно получить первоначальное уравнение Тоды, положив $N = 1$. При $N = 2$ уравнение для $\phi = \begin{bmatrix} \phi_0 & 0 \\ \phi_1 & \phi_0 \end{bmatrix}$ представляет собой следующую спаренную систему Тоды:

$$\begin{aligned} \epsilon^2 \partial_{t_1}^2 \phi_0(x) &= e^{\phi_0(x+\epsilon)-\phi_0(x)} - e^{\phi_0(x)-\phi_0(x-\epsilon)}, \\ \epsilon^2 \partial_{t_1}^2 \phi_1(x) &= (\phi_1(x+\epsilon) - \phi_1(x)) e^{\phi_0(x+\epsilon)-\phi_0(x)} - (\phi_1(x) - \phi_1(x-\epsilon)) e^{\phi_0(x)-\phi_0(x-\epsilon)}. \end{aligned}$$

При расчетах использовалось тождество

$$\exp \begin{pmatrix} \phi_0 & 0 \\ \phi_1 & \phi_0 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\phi_0} & 0 \\ \phi_1 e^{\phi_0} & e^{\phi_0} \end{bmatrix}.$$

Кроме указанных уравнений Z_N -Тоды, вместе с логарифмическими потоками РИЗТ содержит некоторые расширенные уравнения потоков (см. ниже раздел 4). Здесь же мы рассмотрим расширенные уравнения потоков в простейшем случае, т. е. s_0 -поток для $\mathcal{L} = \Lambda + u_0 + u_1 \Lambda^{-1}$,

$$\epsilon \partial_{s_0} \mathcal{L} = [(S \epsilon \partial_x S^{-1})_+, \mathcal{L}] = [\epsilon \partial_x S S^{-1}, \mathcal{L}] = \epsilon \mathcal{L}_x, \quad (3.11)$$

который приводит к следующему уравнению:

$$\partial_{s_0} U = U_x, \quad \partial_{s_0} V = V_x. \quad (3.12)$$

Чтобы лучше понять расширенные уравнения, нужно переписать расширенные потоки в терминах уравнений Лакса для РИЗТ, как это сделано в следующей лемме.

ЛЕММА 1. *Расширенные потоки для РИЗТ можно эквивалентным образом выписать с помощью представления Лакса*

$$\begin{aligned} \epsilon \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial s_j} &= [D_j, \mathcal{L}], \\ D_j &= \left(\frac{\mathcal{L}^j}{j!} (\log_+ \mathcal{L} - c_j) \right)_+ - \left(\frac{\mathcal{L}^j}{j!} (\log_- \mathcal{L} - c_j) \right)_-, \end{aligned} \quad (3.13)$$

которое также можно представить в виде

$$\begin{aligned} \epsilon \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial s_n} &= [\bar{D}_n, \mathcal{L}], \\ \bar{D}_j &= \frac{\mathcal{L}^j}{j!} \epsilon \partial + \left[\frac{\mathcal{L}^j}{j!} \left(\sum_{k < 0} W_k(x) \Lambda^k - c_j \right) \right]_+ - \left[\frac{\mathcal{L}^j}{j!} \left(\sum_{k \geq 0} W_k(x) \Lambda^k - c_j \right) \right]_-. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Тогда можно вывести уравнение s_1 -потока для РИЗТ в виде

$$\begin{aligned} \epsilon U_{s_1} &= (1 - \Lambda)(V(\Lambda^{-1} - 1)^{-1} \epsilon (\log V)_x) - 2(\Lambda - 1)V + \frac{\epsilon}{2} U_x^2 + \epsilon V_x, \\ \epsilon V_{s_1} &= ((\Lambda^{-1} - 1)^{-1} \epsilon V_x V^{-1} + 2)(U(x - \epsilon) - U(x))V + \\ &\quad + \epsilon V_x U(x - \epsilon) + \epsilon (U_x(x - \epsilon) + U_x(x))V, \end{aligned}$$

где $U = U(x)$, $V = V(x)$. Для линейного описания РИЗТ мы введем матричные волновые функции ψ , $\bar{\psi}$, которые имеют вид

$$\psi = W \cdot \chi, \quad \bar{\psi} = \bar{W} \cdot \bar{\chi}, \quad (3.15)$$

где

$$\chi(z) := z^{x/\epsilon} \mathbb{I}_N, \quad \bar{\chi}(z) := z^{-x/\epsilon} \mathbb{I}_N \quad (3.16)$$

и точка означает действие оператора на функцию. Отметим, что $\Lambda \cdot \chi = z\chi$, поэтому можно ввести следующие асимптотические разложения:

$$\begin{aligned} \psi &= z^{x/\epsilon} (\mathbb{I}_N + \omega_1(x) z^{-1} + \dots) \psi_0(z), \\ \psi_0 &:= \exp \left[\sum_{j=1}^{\infty} t_j \frac{z^j}{\epsilon j!} + s_j \frac{z^j}{\epsilon j!} (\log z - c_j) \right], \quad z \rightarrow \infty, \\ \bar{\psi} &= z^{-x/\epsilon} (\bar{\omega}_0(x) + \bar{\omega}_1(x) z + \dots) \bar{\psi}_0(z), \\ \bar{\psi}_0 &:= \exp \left[\sum_{j=0}^{\infty} t_j \frac{z^{-j}}{\epsilon j!} + s_j \frac{z^{-j}}{\epsilon j!} (\log z - c_j) \right], \quad z \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (3.17)$$

В следующем предложении мы получим линейные уравнения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Матричные волновые функции $\psi, \bar{\psi}$ подчиняются следующим уравнениям Сато

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \cdot \psi &= z\psi, \quad \mathcal{L} \cdot \bar{\psi} = z\bar{\psi}, \\ \epsilon \partial_{t_j} \psi &= (B_j)_+ \cdot \psi, \quad \epsilon \partial_{t_j} \bar{\psi} = (B_j)_+ \cdot \bar{\psi}, \\ \epsilon \partial_{s_j} \psi &= \left(\frac{\mathcal{L}^j}{\epsilon j!} (\log_+ \mathcal{L} - c_j) - (D_j)_- \right) \cdot \psi, \\ \epsilon \partial_{s_j} \bar{\psi} &= \left(-\frac{\mathcal{L}^j}{\epsilon j!} (\log_- \mathcal{L} - c_j) + (D_j)_+ \right) \cdot \bar{\psi}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

4. БИЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ ХИРОТЫ

Из уравнений Лакса видно, что s_0 -поток эквивалентен пространственному потоку ∂_x . На основе этого замечания выведем в следующем предложении билинейные уравнения Хироты для РИЗТ, эквивалентные уравнениям Лакса.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Операторы W и $\bar{W}$ являются матрично-значными волновыми операторами РИЗТ тогда и только тогда, когда выполняются следующие билинейные уравнения Хироты:*

$$W\Lambda^r W^{-1} = \bar{W}\Lambda^{-r}\bar{W}^{-1}, \quad r \in \mathbb{N}. \quad (4.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots), \quad \beta = (\beta_1, \beta_2, \dots) \quad (4.2)$$

– мультииндексы, и

$$\partial^\alpha := \partial_{t_0}^{\alpha_0} \partial_{t_0}^{\alpha_1} \partial_{t_2}^{\alpha_2} \dots, \quad \partial^\beta := \partial_{s_1}^{\beta_1} \partial_{s_2}^{\beta_2} \dots \quad (4.3)$$

Пусть также $\partial^\theta = \partial^\alpha \partial^\beta$. Сначала докажем, что сформулированное утверждение приводит к выражению

$$W(x, t, \Lambda) \Lambda^r W^{-1}(x, t', \Lambda) = \bar{W}(x, t, \Lambda) \Lambda^{-r} \bar{W}^{-1}(x, t', \Lambda) \quad (4.4)$$

для всех целых $r \geq 0$. Используя тот же метод, что и в работах [7], [9], по индукции относительно α докажем, что

$$W(x, t, \Lambda) \Lambda^r (\partial^\theta W^{-1}(x, t, \Lambda)) = \bar{W}(x, t, \Lambda) \Lambda^{-r} (\partial^\theta \bar{W}^{-1}(x, t, \Lambda)). \quad (4.5)$$

При $\theta = 0$ это, очевидно, верно по определению матрично-значных волновых операторов. Предположим справедливость уравнения (4.5) при $\theta \neq 0$. Заметим, что

$$\epsilon \partial_{p_j} W := \begin{cases} [(\partial_{t_j} S) S^{-1} + S \Lambda^j S^{-1}] W, & p_j = t_j, \\ [(\partial_{s_j} S) S^{-1} + S \Lambda^j \partial_x S^{-1}] W, & p_j = s_j, \end{cases}$$

и

$$\epsilon \partial_{p_j} \bar{W} := \begin{cases} (\partial_{t_j} \bar{S}) \bar{S}^{-1} \bar{W}, & p_j = t_j, \\ [(\partial_{\bar{s}_j} \bar{S}) \bar{S}^{-1} + \bar{S} \Lambda^{-j} \partial_x \bar{S}^{-1}] \bar{W}, & p_j = s_j, \end{cases}$$

что ведет к

$$\epsilon \partial_{p_j} W := \begin{cases} (B_j)_+ W, & p_j = t_j, \\ [-(D_j)_- + \frac{\mathcal{L}^j}{\epsilon j!} (\log_+ \mathcal{L} - c_j)] W, & p_j = s_j, \end{cases}$$

и

$$\epsilon \partial_{p_j} \bar{W} := \begin{cases} (B_j)_+ \bar{W}, & p_j = t_j, \\ [(D_j)_+ - \frac{\mathcal{L}^j}{\epsilon j!} (\log_- \mathcal{L} - c_j)] \bar{W}, & p_j = s_j. \end{cases}$$

Далее, отсюда следует

$$(\partial_{p_j} W) \Lambda^r (\partial^\theta W^{-1}) = (\partial_{p_j} \bar{W}) \Lambda^{-r} (\partial^\theta \bar{W}^{-1}).$$

Учитывая уравнение (4.5), получим

$$W\Lambda^r(\partial_{p_j}\partial^\theta W^{-1}) = \bar{W}\Lambda^{-r}(\partial_{p_j}\partial^\theta \bar{W}^{-1}).$$

Таким образом, если увеличить степень ∂_{p_j} на 1, уравнение (4.5) по-прежнему остается справедливым. Доказательство по индукции завершено. Разлагая в ряд Тейлора обе части соотношения (4.4) вблизи $t = t'$, $s = s'$, закончим доказательство соотношения (4.4).

Наоборот, разделяя отрицательную и положительную части уравнения, можно доказать, что операторы S , $\bar{S}$ являются парой матрично-значных волновых операторов. ■

Чтобы предоставить описание в терминах матрично-значных волновых функций, нужно ввести символьные определения. Если ряды имеют вид

$$\begin{aligned} W(x, t, s, \Lambda) &= \sum_{i \in \mathbb{Z}} a_i(x, t, s, \partial_x) \Lambda^i, & \bar{W}(x, t, s, \Lambda) &= \sum_{i \in \mathbb{Z}} b_i(x, t, s, \partial_x) \Lambda^i, \\ W^{-1}(x, t, s, \Lambda) &= \sum_{i \in \mathbb{Z}} \Lambda^i a'_i(x, t, s, \partial_x), & \bar{W}^{-1}(x, t, s, \Lambda) &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} \Lambda^j b'_j(x, t, s, \partial_x), \end{aligned}$$

можно ввести их левые символы $\mathcal{W}$, $\bar{\mathcal{W}}$ и правые символы $\mathcal{W}^{-1}$, $\bar{\mathcal{W}}^{-1}$ следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathcal{W}(x, t, s, \lambda) &= \sum_{i \in \mathbb{Z}} a_i(x, t, s, \partial_x) \lambda^i, & \mathcal{W}^{-1}(x, t, s, \lambda) &= \sum_{i \in \mathbb{Z}} a'_i(x, t, s, \partial_x) \lambda^i, \\ \bar{\mathcal{W}}(x, t, s, \lambda) &= \sum_{i \in \mathbb{Z}} b_i(x, t, s, \partial_x) \lambda^i, & \bar{\mathcal{W}}^{-1}(x, t, s, \bar{\lambda}, \lambda) &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} b'_j(x, t, s, \partial_x) \lambda^j. \end{aligned}$$

Теперь можно записать билинейное уравнение Хироты в другой форме (см. ниже предложение 5), определив вычет по формуле

$$\text{Res}_\lambda \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n \lambda^n = \alpha_{-1}$$

и используя доказательство, аналогичное приведенным в работах [3], [7], [9].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Пусть $s_0 = s'_0$, тогда S и $\bar{S}$ являются матричными волновыми операторами иерархии Z_N -Тоды тогда и только тогда, когда для всех $m \in \mathbb{Z}$, $r \in \mathbb{N}$ выполняется следующее билинейное тождество Хироты:

$$\begin{aligned} \text{Res}_\lambda \{ \lambda^{r+m-1} \mathcal{W}(x, t, s, \epsilon \partial_x, \lambda) \mathcal{W}^{-1}(x - m\epsilon, t', s', \epsilon \partial_x, \lambda) \} = \\ = \text{Res}_\lambda \{ \lambda^{-r+m-1} \bar{\mathcal{W}}(x, t, s, \epsilon \partial_x, \lambda) \bar{\mathcal{W}}^{-1}(x - m\epsilon, t', s', \epsilon \partial_x, \lambda) \}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $m \in \mathbb{Z}$, $r \in \mathbb{N}$ и $s_0 = s'_0$. Положим

$$\begin{aligned} W(x, t, s, \Lambda) &= \sum_{i \in \mathbb{Z}} a_i(x, t, s, \partial_x) \Lambda^i, & \bar{W}(x, t, s, \Lambda) &= \sum_{i \in \mathbb{Z}} b_i(x, t, s, \partial_x) \Lambda^i, \\ W^{-1}(x, t, s, \Lambda) &= \sum_{i \in \mathbb{Z}} \Lambda^i a'_i(x, t, s, \partial_x), & \bar{W}^{-1}(x, t, \Lambda) &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} \Lambda^j b'_j(x, t, s, \partial_x) \end{aligned}$$

и сравним коэффициенты перед Λ^{-m} в уравнении (4.4):

$$\sum_{i+j=-m-r} a_i(x, t, s, \partial_x) a'_j(x - m\epsilon, t', s', \partial_x) = \sum_{i+j=-m+r} b_i(x, t, s, \partial_x) b'_j(x - m\epsilon, t', s', \partial_x).$$

Это равенство можно представить также в виде уравнения (4.6). ■

Чтобы выразить квадратную функцию Хироты через тау-функции, нужно сначала ввести определение тау-функции для РИЗТ и доказать ее существование, что будет сделано в следующем разделе.

5. ТАУ-ФУНКЦИИ ДЛЯ РИЗТ

Введем следующие последовательности:

$$t - [\lambda] := (t_j - \epsilon(j-1)! \lambda^j, 0 \leq j \leq \infty). \quad (5.1)$$

Матрично-значная функция $\tau \in Z_N$, зависящая только от динамических переменных t и ϵ , называется *матричной тау-функцией для РИЗТ*, если по ней можно построить символы, связанные с матрично-значными волновыми операторами, следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbb{S} &:= \frac{\tau(s_0 + x - \epsilon/2, t_j - \epsilon(j-1)!/\lambda^j, s; \epsilon)}{\tau(s_0 + x - \epsilon/2, t, s; \epsilon)}, \\ \mathbb{S}^{-1} &:= \frac{\tau(s_0 + x + \epsilon/2, t_j + \epsilon(j-1)!/\lambda^j, s; \epsilon)}{\tau(s_0 + x + \epsilon/2, t, s; \epsilon)}, \\ \bar{\mathbb{S}} &:= \frac{\tau(s_0 + x + \epsilon/2, t_j + \epsilon(j-1)! \lambda^j, s; \epsilon)}{\tau(s_0 + x - \epsilon/2, t, s; \epsilon)}, \\ \bar{\mathbb{S}}^{-1} &:= \frac{\tau(s_0 + x - \epsilon/2, t_j - \epsilon(j-1)! \lambda^j, s; \epsilon)}{\tau(s_0 + x + \epsilon/2, t, s; \epsilon)}. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Здесь деление означает умножение матрицы числителя на обратную матрицу знаменателя. Решение U, V , выраженное через тау-функции, имеет вид

$$U = (\log \tau)_{xx}, \quad V = \log \frac{\tau(x + \epsilon)\tau(x - \epsilon)}{\tau^2(x)}. \quad (5.3)$$

При $N = 2$ получаем

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} u_0 & 0 \\ u_1 & u_0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} (\log \tau_0)_{xx} & 0 \\ \left(\frac{\tau_1}{\tau_0}\right)_{xx} & (\log \tau_0)_{xx} \end{bmatrix}, \\ \exp \left(\begin{bmatrix} v_0 & 0 \\ v_1 & v_0 \end{bmatrix} \right) &= \begin{bmatrix} e^{v_0} & 0 \\ v_1 e^{v_0} & e^{v_0} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\tau_0(x + \epsilon)\tau_0(x - \epsilon)}{\tau_0} & 0 \\ \frac{\tau_1(x + \epsilon)\tau_0(x - \epsilon) + \tau_0(x + \epsilon)\tau_1(x - \epsilon)}{\tau_0} - \frac{\tau_0(x + \epsilon)\tau_0(x - \epsilon)\tau_1}{\tau_0^2} & \frac{\tau_0(x + \epsilon)\tau_0(x - \epsilon)}{\tau_0} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Это означает

$$\begin{aligned} u_0 &= (\log \tau_0)_{xx}, & u_1 &= \left(\frac{\tau_1}{\tau_0} \right)_{xx}, \\ v_0 &= \log \frac{\tau_0(x + \epsilon) \tau_0(x - \epsilon)}{\tau_0}, & v_1 &= (\Lambda - 1 + \Lambda^{-1}) \frac{\tau_1(x)}{\tau_0(x)}. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Опираясь на предложение 5, можно доказать следующую лемму.

ЛЕММА 2. *Справедливы уравнения*

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N \mathbb{S}(x, t, \lambda_1)_{ik} \mathbb{S}^{-1}(x + \epsilon, t + [\lambda_2], \lambda_1)_{kj} &= \sum_{k=1}^N \bar{\mathbb{S}}(x, t, \lambda_2)_{ik} \bar{\mathbb{S}}^{-1}(x, t - [\lambda_1^{-1}], \lambda_2)_{kj}, \\ \sum_{k=1}^N \mathbb{S}(x, t, \lambda_1)_{ik} \mathbb{S}^{-1}(x, t - [\lambda_2^{-1}], \lambda_1)_{kj} &= \sum_{k=1}^N \mathbb{S}(x, t, \lambda_2)_{ik} \mathbb{S}^{-1}(x, t - [\lambda_1^{-1}], \lambda_2)_{kj}, \\ \sum_{k=1}^N \bar{\mathbb{S}}(x, t, \lambda_1)_{ik} \bar{\mathbb{S}}^{-1}(x + \epsilon, t + [\lambda_2], \lambda_1)_{kj} &= \sum_{k=1}^N \bar{\mathbb{S}}(x, t, \lambda_2)_{ik} \bar{\mathbb{S}}^{-1}(x + \epsilon, t + [\lambda_1], \lambda_2)_{kj}. \end{aligned} \quad (5.5)$$

С помощью леммы 2 можно доказать важное предложение о существовании матрично-значных тау-функций.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. *Для данной пары волновых операторов $\mathbb{S}$ и $\bar{\mathbb{S}}$, связанных с РИЗТ, существует соответствующая матрично-значная обратимая тау-функция $\tau \in Z_N$, единственная с точностью до умножения на отличную от нуля функцию, не зависящую от $t_j, j \geq 1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отметим, что Z_N -значная тау-функция $\tau(x, \mathbf{t})$, соответствующая волновым операторам $\mathbb{S}$ и $\bar{\mathbb{S}}$, по сути имеет вид $\tau(x - \epsilon/2, \mathbf{t})$.

Система (5.5) эквивалентна следующей системе:

$$\begin{aligned} \log \mathbb{S} &= \left(\exp \left(-\epsilon \sum_{j=0}^{\infty} j! \lambda^{-(j+1)} \partial_{t_j} \right) - 1 \right) \log \tau, \\ \log \bar{\mathbb{S}} &= \left(\exp \left(\epsilon \partial_x + \epsilon \sum_{j=0}^{\infty} j! \lambda^{j+1} \partial_{t_j} \right) - 1 \right) \log \tau, \\ \partial_{s_0} \log \tau(x, \mathbf{t}) &= \partial_x \log \tau(x, \mathbf{t}). \end{aligned}$$

Тогда с помощью леммы 2 можно доказать существование тау-функций для этой иерархии. ■

При наличии тау-функций для РИЗТ возникает естественный вопрос о записи билинейного уравнения Хироты через тау-функции, на который будет дан ответ в следующем разделе с помощью обобщенных вершинных операторов.

6. ОБОБЩЕННЫЕ МАТРИЧНЫЕ ВЕРШИННЫЕ ОПЕРАТОРЫ И КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ ХИРОТЫ

В этом разделе мы продолжим обсуждение фундаментальных свойств тау-функции, связанной с РИЗТ, т. е. квадратные уравнения Хироты для РИЗТ. Итак, введем следующие вершинные операторы:

$$\begin{aligned}\Gamma^{\pm a} &:= \exp\left(\pm \frac{1}{\epsilon} \left(\sum_{j=0}^{\infty} t_j \frac{\lambda^{j+1}}{(j+1)!} + s_j \frac{\lambda^j}{j!} (\log \lambda - c_j)\right)\right) \times \exp\left(\mp \frac{\epsilon}{2} \partial_{s_0} \mp [\lambda^{-1}]_{\partial}\right), \\ \Gamma^{\pm b} &:= \exp\left(\pm \frac{1}{\epsilon} \left(\sum_{j=0}^{\infty} t_j \frac{\lambda^{-j-1}}{(j+1)!} - s_j \frac{\lambda^{-j}}{j!} (\log \lambda - c_j)\right)\right) \times \exp\left(\mp \frac{\epsilon}{2} \partial_{s_0} \mp [\lambda]_{\partial}\right),\end{aligned}$$

где

$$[\lambda]_{\partial} := \epsilon \sum_{j=0}^{\infty} j! \lambda^{j+1} \partial_{t_j}.$$

Из-за присутствия логарифма $\log \lambda$ вершинные операторы $\Gamma^{\pm a} \otimes \Gamma^{\mp a}$ и $\Gamma^{\pm b} \otimes \Gamma^{\mp b}$ являются многозначными функциями. При переходе между различными ветвями вокруг $\lambda = \infty$ появляются факторы монодромии

$$\begin{aligned}M^a &= \exp\left\{\pm \frac{2\pi i}{\epsilon} \sum_{j \geq 0} \frac{\lambda^j}{j!} (s_j \otimes 1 - 1 \otimes s_j)\right\}, \\ M^b &= \exp\left\{\pm \frac{2\pi i}{\epsilon} \sum_{j \geq 0} \frac{\lambda^{-j}}{j!} (s_j \otimes 1 - 1 \otimes s_j)\right\}.\end{aligned}\tag{6.1}$$

Чтобы компенсировать трудности, обобщим понятие вершинных операторов, которые уже не будут скалярно-значными, а будут принимать значения в алгебре дифференциальных операторов в Z_N . Итак, введем следующие вершинные операторы:

$$\begin{aligned}\Gamma_a &= \exp\left(-\sum_{j>0} \frac{j! \lambda^{j+1}}{\epsilon} (\epsilon \partial_x) s_j\right) e^{x \partial_{s_0}}, \\ \Gamma_b &= \exp\left(-\sum_{j>0} \frac{j! \lambda^{-(j+1)}}{\epsilon} (\epsilon \partial_x) s_j\right) e^{x \partial_{s_0}}, \\ \Gamma_a^{\#} &= e^{x \partial_{s_0}} \exp\left(\sum_{j>0} \frac{j! \lambda^{j+1}}{\epsilon} (\epsilon \partial_x) s_j\right), \\ \Gamma_b^{\#} &= e^{x \partial_{s_0}} \exp\left(\sum_{j>0} \frac{j! \lambda^{-(j+1)}}{\epsilon} (\epsilon \partial_x) s_j\right).\end{aligned}\tag{6.2}$$

Тогда

$$\begin{aligned}\Gamma_a^{\#} \otimes \Gamma_a &= e^{x \partial_{s_0}} \exp\left(\sum_{j>0} \frac{j! \lambda^{j+1}}{\epsilon} (\epsilon \partial_x) (s_j - s'_j)\right) e^{x \partial_{s'_0}}, \\ \Gamma_b^{\#} \otimes \Gamma_b &= e^{x \partial_{s_0}} \exp\left(\sum_{j>0} \frac{j! \lambda^{-(j+1)}}{\epsilon} (\epsilon \partial_x) (s_j - s'_j)\right) e^{x \partial_{s'_0}}.\end{aligned}\tag{6.3}$$

После некоторых вычислений получим

$$\begin{aligned}
 (\Gamma_a^\# \otimes \Gamma_a) M^a &= \exp \left\{ \pm \frac{2\pi i}{\epsilon} \sum_{j>0} \frac{\lambda^j}{j!} (s_j - s'_j) \right\} \times \\
 &\times \exp \left(\pm \frac{2\pi i}{\epsilon} \left((s_0 + x) - \left(s'_0 + x + \sum_{j>0} \frac{\lambda^j}{j!} (s_j - s'_j) \right) \right) \right) (\Gamma_a^\# \otimes \Gamma_a) = \\
 &= \exp \left(\pm \frac{2\pi i}{\epsilon} (s_0 - s'_0) \right) (\Gamma_a^\# \otimes \Gamma_a), \\
 (\Gamma_b^\# \otimes \Gamma_b) M^b &= \exp \left\{ \pm \frac{2\pi i}{\epsilon} \sum_{j>0} \frac{\lambda^{-j}}{j!} (s_j - s'_j) \right\} \times \\
 &\times \exp \left(\pm \frac{2\pi i}{\epsilon} \left((s_0 + x) - \left(s'_0 + x + \sum_{j>0} \frac{\lambda^{-j}}{j!} (s_j - s'_j) \right) \right) \right) (\Gamma_b^\# \otimes \Gamma_b) = \\
 &= \exp \left(\pm \frac{2\pi i}{\epsilon} (s_0 - s'_0) \right) (\Gamma_b^\# \otimes \Gamma_b).
 \end{aligned}$$

Таким образом, если $s_0 - s'_0 \in \mathbb{Z}\epsilon$, то все $(\Gamma_a^\# \otimes \Gamma_a)(\Gamma^a \otimes \Gamma^{-a})$ и $(\Gamma_b^\# \otimes \Gamma_b)(\Gamma^{-b} \otimes \Gamma^b)$ однозначны вблизи $\lambda = \infty$.

Заметим, что приведенные выше вершинные операторы принимают значения в Z_N -значной алгебре дифференциальных операторов

$$\mathbb{C}[\partial, x, t, s, \epsilon] := \left\{ f(x, t, \epsilon) \mid f(x, t, s, \epsilon) = \sum_{i \geq 0} \sum_{k \geq 0} c_{ik}(x, t, s, \epsilon) \Gamma^k \partial^i \right\}.$$

ТЕОРЕМА 1. *Обратимая Z_N -значная матрица $\tau(t, s, \epsilon)$ является тау-функцией, связанной с РИЗТ, тогда и только тогда, когда она удовлетворяет следующему квадратному уравнению Хироты для РИЗТ:*

$$\text{Res}_\lambda \lambda^{r-1} (\Gamma_a^\# \otimes \Gamma_a) (\Gamma^a \otimes \Gamma^{-a}) (\tau \otimes \tau) = \text{Res}_\lambda \lambda^{-r-1} (\Gamma_b^\# \otimes \Gamma_b) (\Gamma^{-b} \otimes \Gamma^b) (\tau \otimes \tau), \quad (6.4)$$

вычисленному при $s_0 - s'_0 = l\epsilon$ для всех $l \in \mathbb{Z}$, $r \in \mathbb{N}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нужно всего лишь доказать, что билинейные уравнения Хироты эквивалентны предположению предложения 5. Непосредственными вычислениями получим следующие четыре тождества:

$$\begin{aligned}
 \Gamma_a^\# \Gamma^a \tau &= \tau \left(s_0 + x - \frac{\epsilon}{2}, t, s \right) \lambda^{s_0/\epsilon} \mathcal{W}(x, t, s, \epsilon \partial_x, \lambda) \lambda^{\mathbb{I}_N x / \epsilon}, \\
 \Gamma_a \Gamma^{-a} \tau &= \lambda^{-(s_0+x)/\epsilon} \mathcal{W}^{-1}(x, t, s, \epsilon \partial_x, \lambda) \tau \left(x + s_0 + \frac{\epsilon}{2}, t, s \right), \\
 \Gamma_b^\# \Gamma^{-b} \tau &= \tau \left(x + s_0 - \frac{\epsilon}{2}, t, s \right) \lambda^{s_0/\epsilon} \overline{\mathcal{W}}(x, t, s, \epsilon \partial_x, \lambda) \lambda^{x \mathbb{I}_N / \epsilon}, \\
 \Gamma_b \Gamma^b \tau &= \lambda^{-s_0/\epsilon} \lambda^{-x \mathbb{I}_N / \epsilon} \overline{\mathcal{W}}^{-1}(x, t, s, \epsilon \partial_x, \lambda) \tau \left(x + s_0 + \frac{\epsilon}{2}, t, s \right).
 \end{aligned} \tag{6.5}$$

Доказательство уравнений (6.5) можно провести методом, аналогичным изложенному в работах [7], [9]. Подставив уравнения (6.5) в билинейные уравнения Хироты (6.4), получим уравнение (4.6). ■

Производя преобразование вида $\lambda \rightarrow \lambda^{-1}$ в уравнении (6.4), придадим ему вид

$$\text{Res}_\lambda \lambda^{r-1} ((\Gamma_a^\# \otimes \Gamma_a)(\Gamma^a \otimes \Gamma^{-a} - \Gamma^{-a} \otimes \Gamma^a))(\tau \otimes \tau) = 0, \quad (6.6)$$

полученный при $s_0 - s'_0 = l\epsilon$ для всех $l \in \mathbb{Z}$, $r \in \mathbb{N}$. Это означает, что выражение

$$\frac{d\lambda}{\lambda} ((\Gamma_a^\# \otimes \Gamma_a)(\Gamma^a \otimes \Gamma^{-a} - \Gamma^{-a} \otimes \Gamma^a))(\tau \otimes \tau) \quad (6.7)$$

регулярно в λ при $s_0 - s'_0 = l\epsilon$ для всех $l \in \mathbb{Z}$. При $N = 1$ выражение (6.7) соответствует в точности квадратному уравнению Хироты (1.2) расширенной иерархии Тоды, полученному в работе [7]. Как известно, вершинный оператор действительно дает одно преобразование Беклунда специального вида для РИЗТ. Для получения большей информации о связи между разными решениями РИЗТ в следующем разделе мы построим преобразование Дарбу для РИЗТ, используя технику определителей, как в работах [24], [25].

7. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ДАРБУ ДЛЯ РИЗТ

В этом разделе мы рассмотрим действие преобразования Дарбу для РИЗТ на оператор Лакса

$$\mathcal{L} = \Lambda + U + V\Lambda^{-1}, \quad (7.1)$$

т. е.

$$\mathcal{L}^{[1]} = \Lambda + U^{[1]} + V^{[1]}\Lambda^{-1} = W\mathcal{L}W^{-1}, \quad (7.2)$$

где W – оператор преобразования Дарбу. Это означает, что после преобразования Дарбу спектральная задача для $(N \times N)$ -матрично-значной функции ϕ

$$\mathcal{L}\phi = \Lambda\phi + U\phi + V\Lambda^{-1}\phi = \lambda\phi \quad (7.3)$$

принимает вид

$$\mathcal{L}^{[1]}\phi^{[1]} = \lambda\phi^{[1]}. \quad (7.4)$$

Чтобы сохранить инвариантность пары Лакса для РИЗТ в предложении 2, т. е. чтобы выполнялись равенства

$$\begin{aligned} \partial_{t_j} \mathcal{L}^{[1]} &= [(B_j^{[1]})_+, \mathcal{L}^{[1]}], & \partial_{s_j} \mathcal{L}^{[1]} &= [(D_j^{[1]})_+, \mathcal{L}^{[1]}], \\ B_j^{[1]} &:= B_j(\mathcal{L}^{[1]}), & D_j^{[1]} &:= D_j(\mathcal{L}^{[1]}), \\ \partial_{t_j} \log \mathcal{L}^{[1]} &= [(B_j^{[1]})_+, \log \mathcal{L}^{[1]}], \\ (\log \mathcal{L}^{[1]})_{s_j} &= [-(D_j^{[1]})_-, \log_+ \mathcal{L}^{[1]}] + [(D_j^{[1]})_+, \log_- \mathcal{L}^{[1]}], \end{aligned} \quad (7.5)$$

одевающий оператор W должен подчиняться следующему одевающему уравнению:

$$W_{t_j} = -W(B_j)_+ + (WB_jW^{-1})_+W, \quad j \geq 0, \quad (7.6)$$

где W_{t_j} означает производную оператора W по t_j .

Теперь сформулируем важную теорему, которая будет использоваться для получения новых решений.

ТЕОРЕМА 2. Если ϕ – первая волновая функция для РИЗТ, то оператор преобразования Дарбу для РИЗТ

$$W(\lambda) = (1 - \phi(\phi(x - \epsilon))^{-1} \Lambda^{-1}) = \phi \circ (1 - \Lambda^{-1}) \circ \phi^{-1}, \quad (7.7)$$

порождает новые решения $U^{[1]}, V^{[1]}$ из затравочных решений U, V :

$$\begin{aligned} U^{[1]} &= U + (\Lambda - 1)\phi(\phi(x - \epsilon))^{-1}, \\ V^{[1]} &= \Lambda^{-1}V \frac{\phi\Lambda^{-2}\phi}{\Lambda^{-1}\phi^2}. \end{aligned} \quad (7.8)$$

Введем обозначение $\phi_i = \phi_i^{[0]} := \phi|_{\lambda=\lambda_i}$. Тогда можно выбрать специальное однократное преобразование Дарбу для РИЗТ в виде

$$W_1(\lambda_1) = \mathbb{I}_N - \phi_1(\phi_1(x - \epsilon))^{-1} \Lambda^{-1}. \quad (7.9)$$

В то же время действие преобразования Дарбу на волновую функцию ϕ можно получить следующим образом:

$$\phi^{[1]} = (\mathbb{I}_N - \phi_1(x)(\phi_1(x - \epsilon))^{-1} \Lambda^{-1})\phi. \quad (7.10)$$

Тогда, итерационно применяя преобразование Дарбу, запишем действие j -го преобразования Дарбу на $(j - 1)$ -е решение в виде

$$\begin{aligned} \phi^{[j]} &= \left(\mathbb{I}_N - \frac{\phi_j^{[j-1]}}{\Lambda^{-1}\phi_j^{[j-1]}} \Lambda^{-1} \right) \phi^{[j-1]}, \\ U^{[j]} &= U^{[j-1]} + (\Lambda - 1) \frac{\phi_j^{[j-1]}}{\Lambda^{-1}\phi_j^{[j-1]}}, \\ V^{[j]} &= (\Lambda^{-1}V^{[j-1]}) \frac{\phi_j^{[j-1]}}{\Lambda^{-1}\phi_j^{[j-1]}} \frac{\Lambda^{-2}\phi_j^{[j-1]}}{\Lambda^{-1}\phi_j^{[j-1]}}, \end{aligned} \quad (7.11)$$

где $\phi_i^{[j-1]} := \phi^{[j-1]}|_{\lambda=\lambda_i}$ – волновые функции, соответствующие различным значениям спектрального параметра и $(j - 1)$ -м решениям $U^{[j-1]}, V^{[j-1]}$. Можно проверить, что $\phi_i^{[j-1]} = 0$, $i = 1, 2, \dots, j - 1$.

Итерационно применяя преобразование Дарбу, можно обобщить его до n -кратного преобразования.

ТЕОРЕМА 3. n -Кратное преобразование Дарбу для РИЗТ имеет следующий вид:

$$W_n = \mathbb{I}_N + t_1^{[n]} \Lambda^{-1} + t_2^{[n]} \Lambda^{-2} + \dots + t_n^{[n]} \Lambda^{-n}, \quad (7.12)$$

где

$$W_n \cdot \phi_i|_{i \leq n} = 0. \quad (7.13)$$

Преобразование Дарбу строит новое решение из затравочного:

$$\begin{aligned} U^{[n]} &= U + (\Lambda - 1)t_1^{[n]}, \\ V^{[n]} &= t_n^{[n]}(x)(\Lambda^{-n}V)t_n^{[n]-1}(x - \epsilon), \end{aligned} \quad (7.14)$$

где

$$(W_n)_{ij} = \frac{1}{\Delta_n} \left| \begin{array}{cccccc} \delta_{ij} & 0 & \dots & \Lambda^{-1} & \dots & 0 \\ 0 & \phi_{1,11}(x-\varepsilon) & \dots & \phi_{1,j1}(x-\varepsilon) & \dots & \phi_{1,N1}(x-\varepsilon) \\ 0 & \phi_{1,12}(x-\varepsilon) & \dots & \phi_{1,j2}(x-\varepsilon) & \dots & \phi_{1,N2}(x-\varepsilon) \\ -\phi_{1,ii}(x) & \phi_{1,1i}(x-\varepsilon) & \dots & \phi_{1,ji}(x-\varepsilon) & \dots & \phi_{1,Ni}(x-\varepsilon) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \phi_{1,1N}(x-\varepsilon) & \dots & \phi_{1,jN}(x-\varepsilon) & \dots & \phi_{1,NN}(x-\varepsilon) \\ 0 & \phi_{2,11}(x-\varepsilon) & \dots & \phi_{2,j1}(x-\varepsilon) & \dots & \phi_{2,N1}(x-\varepsilon) \\ 0 & \phi_{2,12}(x-\varepsilon) & \dots & \phi_{2,j2}(x-\varepsilon) & \dots & \phi_{2,N2}(x-\varepsilon) \\ -\phi_{2,ii}(x) & \phi_{2,1i}(x-\varepsilon) & \dots & \phi_{2,ji}(x-\varepsilon) & \dots & \phi_{2,Ni}(x-\varepsilon) \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \phi_{2,1N}(x-\varepsilon) & \dots & \phi_{2,jN}(x-\varepsilon) & \dots & \phi_{2,NN}(x-\varepsilon) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \phi_{n,11}(x-\varepsilon) & \dots & \phi_{n,j1}(x-\varepsilon) & \dots & \phi_{n,N1}(x-\varepsilon) \\ 0 & \phi_{n,12}(x-\varepsilon) & \dots & \phi_{n,j2}(x-\varepsilon) & \dots & \phi_{n,N2}(x-\varepsilon) \\ -\phi_{n,ii}(x) & \phi_{n,1i}(x-\varepsilon) & \dots & \phi_{n,ji}(x-\varepsilon) & \dots & \phi_{n,Ni}(x-\varepsilon) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \phi_{n,1N}(x-\varepsilon) & \dots & \phi_{n,jN}(x-\varepsilon) & \dots & \phi_{n,NN}(x-\varepsilon) \end{array} \right|$$

$$\dots \left| \begin{array}{cccccc} 0 & \dots & 0 & \dots & \Lambda^{-n} & \dots & 0 \\ \phi_{1,11}(x-2\varepsilon) & \dots & \phi_{1,N1}(x-2\varepsilon) & \dots & \phi_{1,j1}(x-n\varepsilon) & \dots & \phi_{1,N1}(x-n\varepsilon) \\ \phi_{1,12}(x-2\varepsilon) & \dots & \phi_{1,N2}(x-2\varepsilon) & \dots & \phi_{1,j2}(x-n\varepsilon) & \dots & \phi_{1,N2}(x-n\varepsilon) \\ \phi_{1,1i}(x-2\varepsilon) & \dots & \phi_{1,Ni}(x-2\varepsilon) & \dots & \phi_{1,ji}(x-n\varepsilon) & \dots & \phi_{1,Ni}(x-n\varepsilon) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{1,1N}(x-2\varepsilon) & \dots & \phi_{1,NN}(x-2\varepsilon) & \dots & \phi_{1,jN}(x-n\varepsilon) & \dots & \phi_{1,NN}(x-n\varepsilon) \\ \phi_{2,21}(x-2\varepsilon) & \dots & \phi_{2,N1}(x-2\varepsilon) & \dots & \phi_{2,j1}(x-n\varepsilon) & \dots & \phi_{2,N1}(x-n\varepsilon) \\ \phi_{2,12}(x-2\varepsilon) & \dots & \phi_{2,N2}(x-2\varepsilon) & \dots & \phi_{2,j2}(x-n\varepsilon) & \dots & \phi_{2,N2}(x-n\varepsilon) \\ \dots & \phi_{2,1i}(x-2\varepsilon) & \dots & \phi_{2,Ni}(x-2\varepsilon) & \dots & \phi_{2,ji}(x-n\varepsilon) & \dots & \phi_{2,Ni}(x-n\varepsilon) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{2,1N}(x-2\varepsilon) & \dots & \phi_{2,NN}(x-2\varepsilon) & \dots & \phi_{2,jN}(x-n\varepsilon) & \dots & \phi_{2,NN}(x-n\varepsilon) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{n,21}(x-2\varepsilon) & \dots & \phi_{n,N1}(x-2\varepsilon) & \dots & \phi_{n,j1}(x-n\varepsilon) & \dots & \phi_{n,N1}(x-n\varepsilon) \\ \phi_{n,12}(x-2\varepsilon) & \dots & \phi_{n,N2}(x-2\varepsilon) & \dots & \phi_{n,j2}(x-n\varepsilon) & \dots & \phi_{n,N2}(x-n\varepsilon) \\ \phi_{n,1i}(x-2\varepsilon) & \dots & \phi_{n,Ni}(x-2\varepsilon) & \dots & \phi_{n,ji}(x-n\varepsilon) & \dots & \phi_{n,Ni}(x-n\varepsilon) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{n,1N}(x-2\varepsilon) & \dots & \phi_{n,NN}(x-2\varepsilon) & \dots & \phi_{n,jN}(x-n\varepsilon) & \dots & \phi_{n,NN}(x-n\varepsilon) \end{array} \right|,$$

$$\Delta_n = \left| \begin{array}{cccc} \phi_1(x-\epsilon) & \phi_1(x-2\epsilon) & \dots & \phi_1(x-n\epsilon) \\ \phi_2(x-\epsilon) & \phi_2(x-2\epsilon) & \dots & \phi_2(x-n\epsilon) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \phi_n(x-\epsilon) & \phi_n(x-2\epsilon) & \dots & \phi_n(x-n\epsilon) \end{array} \right|.$$

Легко проверить, что $W_n \phi_i = 0$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Возьмем затравочное решение $U = (0)_{N \times N}$, $V = \mathbb{I}_N$, тогда из теоремы 3 можно получить n -е новое решение для РИЗТ вида

$$\begin{aligned} U^{[n]} &= (1 - \Lambda^{-1}) \partial_{t_0} \log \bar{W}_r(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n), \\ V^{[n]} &= e^{(1 - \Lambda^{-1})(1 - \Lambda^{-1}) \log \bar{W}_r(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n)}, \end{aligned} \quad (7.15)$$

где $\bar{W}_r(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n)$ – функция Ханкеля, выраженная через Γ ,

$$\bar{W}_r(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n) = \det(\Lambda^{-j+1} \phi_{n+1-i})_{1 \leq i, j \leq n}. \quad (7.16)$$

В определении функции Ханкеля, выраженной через Γ , подразумевается, что в процессе вычислений мы обрабатываем каждый элемент ϕ_{n+1-i} не в матричном виде, а как скалярный полином элемента Γ . После нахождения значений $U^{[n]}$, $V^{[n]}$ в терминах Γ представляем результат в матричном виде.

7.1. Солитонные решения. Выше мы исследовали первое преобразование Дарбу для РИЗТ, теперь мы используем его для получения новых решений из тривиальных затравочных. В частности, с помощью первого преобразования Дарбу найдем некоторые матрично-значные солитонные решения.

При $N = 2$ возьмем затравочное решение вида $U = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $V = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, тогда начальная волновая функция ϕ_i удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} \Lambda \phi + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Lambda^{-1} \phi &= \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ \lambda_2 & \lambda_1 \end{bmatrix} \phi, \quad 1 \leq i \leq n. \\ \phi &= \exp\left(\frac{x}{\epsilon} \log \begin{bmatrix} z_1 & 0 \\ z_2 & z_1 \end{bmatrix}\right), \quad z_1 \neq 0, \end{aligned} \quad (7.17)$$

при этом

$$\begin{aligned} z_1 + z_1^{-1} &= \lambda_1, \quad z_2 + z_1^{-1} - \frac{z_2}{z_1^2} = \lambda_2. \\ S &= E + \omega_1 \Lambda^{-1} + v \frac{x}{\epsilon} \Lambda^{-1} - \frac{x}{\omega_1} \epsilon \Lambda^{-2} + \dots, \quad \omega_1 = \text{const}. \end{aligned} \quad (7.18)$$

С таким начальным условием оператор A_1 в лемме 1 принимает вид

$$\begin{aligned} A_1 &= \left(\Lambda + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Lambda^{-1} \right) \epsilon \partial - \left(\Lambda - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Lambda^{-1} \right), \\ \frac{\partial \phi}{\partial s_1} &= \left[\left(\Lambda + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Lambda^{-1} \right) \epsilon \partial - \left(\Lambda - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Lambda^{-1} \right) \right] \phi. \end{aligned} \quad (7.19)$$

Тогда решение ϕ , выраженное через x , s_1 , можно выбрать в виде

$$\phi = \exp\left(\frac{x + \lambda s_1}{\epsilon} \log Z + \frac{s_1}{\epsilon} (-Z + Z^{-1})\right), \quad Z = \begin{bmatrix} z_1 & 0 \\ z_2 & z_1 \end{bmatrix}, \quad \lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ \lambda_2 & \lambda_1 \end{bmatrix}, \quad (7.20)$$

где

$$Z + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} Z^{-1} = \begin{bmatrix} z_1 & 0 \\ z_2 & z_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1^{-1} & 0 \\ -\frac{z_2}{z_1^2} & z_1^{-1} \end{bmatrix} = \lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ \lambda_2 & \lambda_1 \end{bmatrix},$$

и

$$\begin{aligned}
 U^{[1]} &= (\Lambda - 1) \frac{\text{ch}(((x + \lambda s_1)/\epsilon) \log Z + (s_1/\epsilon)(-Z + Z^{-1}))}{\text{ch}(((x + \lambda s_1)/\epsilon) \log Z + (s_1/\epsilon)(-Z + Z^{-1}) - \log Z)}, \\
 V^{[1]} &= (1 - \Lambda^{-1})^2 \log \left[2 \text{ch} \left(\frac{x + \lambda s_1}{\epsilon} \log Z + \frac{s_1}{\epsilon} (-Z + Z^{-1}) \right) \right].
 \end{aligned} \tag{7.21}$$

Используя соотношения

$$\log Z = \begin{bmatrix} \log z_1 & 0 \\ \frac{z_2}{z_1} & \log z_1 \end{bmatrix}, \quad \text{ch} \left(\begin{bmatrix} a & 0 \\ b & a \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \text{ch } a & 0 \\ b \text{ch } a & \text{ch } a \end{bmatrix},$$

можно получить конкретные элементы новых решений $U^{[1]}, V^{[1]}$ в виде

$$\begin{aligned}
 u_0^{[1]} &= (\Lambda - 1) \frac{\text{ch}((x/\epsilon) \log z_1 + (s_1/\epsilon)(\lambda_1 - z_1 + z_1^{-1}))}{\text{ch}(((x - \epsilon)/\epsilon) \log z_1 + (s_1/\epsilon)(\lambda_1 - z_1 + z_1^{-1}))}, \\
 u_1^{[1]} &= \left(\frac{x}{\epsilon} \frac{z_2}{z_1} + \frac{s_1}{\epsilon} \left(\lambda_2 - z_2 - \frac{z_2}{z_1^2} \right) \right) \times \\
 &\quad \times \frac{\text{ch}((x/\epsilon) \log z_1 + (s_1/\epsilon)(\lambda_1 - z_1 + z_1^{-1}))}{\text{ch}(((x - \epsilon)/\epsilon) \log z_1 + (s_1/\epsilon)(\lambda_1 - z_1 + z_1^{-1}))} - \\
 &\quad - \left(\frac{x - \epsilon}{\epsilon} \frac{z_2}{z_1} + \frac{s_1}{\epsilon} \left(\lambda_2 - z_2 - \frac{z_2}{z_1^2} \right) \right) \times \\
 &\quad \times \frac{\text{ch}((x/\epsilon) \log z_1 + (s_1/\epsilon)(\lambda_1 - z_1 + z_1^{-1}))}{\text{ch}^2(((x - \epsilon)/\epsilon) \log z_1 + (s_1/\epsilon)(\lambda_1 - z_1 + z_1^{-1}))}, \\
 v_0^{[1]} &= (1 - \Lambda^{-1})^2 \log \left[2 \text{ch} \left(\frac{x}{\epsilon} \log z_1 + \frac{s_1}{\epsilon} (\lambda_1 - z_1 + z_1^{-1}) \right) \right], \\
 v_1^{[1]} &= (1 - \Lambda^{-1})^2 \log \left(\frac{x}{\epsilon} \frac{z_2}{z_1} + \frac{s_1}{\epsilon} \left(\lambda_2 - z_2 - \frac{z_2}{z_1^2} \right) \right).
 \end{aligned} \tag{7.22}$$

Положив $z_2 = \lambda_2 = u_1^{[1]} = v_1^{[1]} = 0$, приведенное выше солитонное решение сведем к солитонному решению скалярно-значной расширенной цепочки Тоды [26].

8. БИГАМИЛЬТОНОВА СТРУКТУРА И ТАУ-СИММЕТРИЯ

В этом разделе для описания интегрируемости РИЗТ мы построим бигамильтонову структуру и тау-симметрию для РИЗТ, следуя работе [23]. Для матрицы $A = (a_{ij}) = \sum_{i=0}^{N-1} a_i \Gamma^i$ введем векторное поле ∂_A над РИЗТ по формуле

$$\partial_A = \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{k \geq 0} a_i^{(k)} \left(\frac{\partial}{\partial u_i^{(k)}} + \frac{\partial}{\partial v_i^{(k)}} \right). \tag{8.1}$$

Для функции $\bar{f} = \int f dx$ имеем

$$\partial_A \bar{f} = \int \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{k \geq 0} a_i^{(k)} \left(\frac{\partial f}{\partial u_i^{(k)}} + \frac{\partial f}{\partial v_i^{(k)}} \right) dx = \int \text{Tr}_N \sum_{k \geq 0} A^{(k)} \left(\frac{\delta f}{\delta u^{(k)}} + \frac{\delta f}{\delta v^{(k)}} \right) dx, \tag{8.2}$$

где

$$\left(\frac{\delta}{\delta u} \right)_{ij} = \frac{\delta}{\delta u_{ji}}, \quad \left(\frac{\delta}{\delta v} \right)_{ij} = \frac{\delta}{\delta v_{ji}} \tag{8.3}$$

и

$$\mathrm{Tr}_N A = \mathrm{Tr} \begin{bmatrix} \frac{1}{N} & \frac{1}{N-1} & \cdots & 1 \\ 0 & \frac{1}{N} & \cdots & \frac{1}{2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{N} \end{bmatrix} A. \quad (8.4)$$

В этом разделе рассмотрим РИЗТ, используя оператор Лакса

$$\mathcal{L} = \Lambda + u + e^v \Lambda^{-1}, \quad u, v \in Z_N. \quad (8.5)$$

Тогда можно ввести гамильтонову скобку вида

$$\{\bar{f}, \bar{g}\} = \int \mathrm{Tr}_N \sum_{w, w'} \frac{\delta f}{\delta w} \{w, w'\} \frac{\delta g}{\delta w'} dx, \quad (8.6)$$

$$w, w' = u_i \text{ или } v_j, \quad 0 \leq i, j \leq N-1.$$

Для $u(x) = \sum_{i=0}^{N-1} u_i(x) \Gamma^i$, $v(x) = \sum_{i=0}^{N-1} v_i(x) \Gamma^i$ можно определить бигамильтонову структуру для РИЗТ с помощью следующих двух совместных скобок Пуассона, что является матричным обобщением расширенной иерархии Тоды, приведенной в работе [6]:

$$\begin{aligned} \{v_i(x), v_j(y)\}_1 &= \{u_i(x), u_j(y)\}_1 = 0, \\ \{u_i(x), v_j(y)\}_1 &= \frac{1}{\epsilon} \delta_{ij} [e^{\epsilon \partial_x} - 1] \delta(x-y), \\ \{u_i(x), u_j(y)\}_2 &= \frac{1}{\epsilon} \delta_{ij} [e^{\epsilon \partial_x} e^{v(x)} - e^{v(x)} e^{-\epsilon \partial_x}]_i \delta(x-y), \\ \{u_i(x), v_j(y)\}_2 &= \frac{1}{\epsilon} \delta_{ij} u_i(x) [e^{\epsilon \partial_x} - 1] \delta(x-y), \\ \{v_i(x), v_j(y)\}_2 &= \frac{1}{\epsilon} \delta_{ij} [e^{\epsilon \partial_x} - e^{-\epsilon \partial_x}] \delta(x-y). \end{aligned} \quad (8.7)$$

Для любого разностного оператора $A = \sum_k A_k \Lambda^k$ введем вычет $\mathrm{Res} A = A_0$. В следующей теореме доказано, что упомянутая структура Пуассона может рассматриваться в качестве гамильтоновой структуры для РИЗТ.

ТЕОРЕМА 4. *Потоки РИЗТ являются гамильтоновыми системами вида*

$$\frac{\partial u_i}{\partial t_{k,j}} = \{u_i, H_{k,j}\}_1, \quad \frac{\partial v_i}{\partial t_{k,j}} = \{v_i, H_{k,j}\}_1, \quad k = 0, 1, \quad j \geq 0, \quad (8.8)$$

при этом $t_{0,j} = t_j$, $t_{1,j} = s_j$. Они удовлетворяют следующим бигамильтоновым рекуррентным соотношениям:

$$\{\cdot, H_{1,n-1}\}_2 = n\{\cdot, H_{1,n}\}_1 + 2\{\cdot, H_{0,n-1}\}_1, \quad \{\cdot, H_{0,n-1}\}_2 = (n+1)\{\cdot, H_{0,n}\}_1.$$

Здесь гамильтонианы имеют вид

$$H_{k,j} = \int h_{k,j}(u, v; u_x, v_x; \dots; \epsilon) dx, \quad k = 0, 1, \quad j \geq 0, \quad (8.9)$$

где

$$h_{0,j} = \frac{1}{(j+1)!} \text{Tr}_N \text{Res} \mathcal{L}^{j+1}, \quad h_{1,j} = \frac{2}{j!} \text{Tr}_N \text{Res}[\mathcal{L}^j (\log \mathcal{L} - c_j)]. \quad (8.10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $\beta = 0$, что соответствует начальной иерархии Тоды, доказательство совпадает с приведенным в работе [6].

Теперь докажем, что потоки $\partial/\partial t_{1,n}$ также являются гамильтоновыми системами по отношению к первой скобке Пуассона. В работе [6] доказано тождество

$$\text{Tr}_N \text{Res}[\mathcal{L}^n d(S\epsilon\partial_x S^{-1})] \sim \text{Tr}_N \text{Res} \mathcal{L}^{n-1} d\mathcal{L}, \quad (8.11)$$

которое демонстрирует справедливость следующего соотношения эквивалентности:

$$\text{Tr}_N \text{Res}(\mathcal{L}^n d \log_+ \mathcal{L}) \sim \text{Tr}_N \text{Res}(\mathcal{L}^{n-1} d\mathcal{L}). \quad (8.12)$$

Здесь соотношение эквивалентности $\sim$ реализуется с точностью до x -производной другой 1-формы.

По аналогии с (8.11) получим следующее соотношение эквивалентности:

$$\text{Tr}_N \text{Res}[\mathcal{L}^n d(\bar{S}\epsilon\partial_x \bar{S}^{-1})] \sim -\text{Tr}_N \text{Res} \mathcal{L}^{n-1} d\mathcal{L}, \quad (8.13)$$

т. е.

$$\text{Tr}_N \text{Res}(\mathcal{L}^n d \log_- \mathcal{L}) \sim \text{Tr}_N \text{Res}(\mathcal{L}^{n-1} d\mathcal{L}). \quad (8.14)$$

Комбинируя (8.12) с (8.14), получим

$$\text{Tr}_N \text{Res}(\mathcal{L}^n d \log \mathcal{L}) \sim \text{Tr}_N \text{Res}(\mathcal{L}^{n-1} d\mathcal{L}). \quad (8.15)$$

Предположим

$$A_{\alpha,n} = \sum_k a_{\alpha,n+1;k} \Lambda^k. \quad (8.16)$$

Тогда из

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t_{k,n}} = [(B_{k,n})_+, \mathcal{L}] = [-(B_{k,n})_-, \mathcal{L}], \quad B_{0,n} = B_n, B_{1,n} = D_n, \quad (8.17)$$

выведем уравнения

$$\begin{aligned} \epsilon \frac{\partial u}{\partial t_{\beta,n}} &= a_{\beta,n;1}(x + \epsilon) - a_{\beta,n;1}(x) \in Z_N, \\ \epsilon \frac{\partial v}{\partial t_{\beta,n}} &= a_{\beta,n;0}(x - \epsilon)e^{v(x)} - a_{\beta,n;0}(x)e^{v(x+\epsilon)} \in Z_N, \quad \beta = 0, 1. \end{aligned} \quad (8.18)$$

Теперь соотношение эквивалентности (8.12) легко следует из двух приведенных выше уравнений. Используя (8.12), получим

$$\begin{aligned} d\tilde{h}_n &= \frac{2}{n!} d \text{Tr}_N \text{Res}[\mathcal{L}^n (\log_+ \mathcal{L} - c_n)] \sim \\ &\sim \frac{2}{(n-1)!} \text{Tr}_N \text{Res}[\mathcal{L}^{n-1} (\log_+ \mathcal{L} - c_n) d\mathcal{L}] + \frac{2}{n!} \text{Tr}_N \text{Res}[\mathcal{L}^{n-1} d\mathcal{L}] = \\ &= \frac{2}{(n-1)!} \text{Tr}_N \text{Res}[\mathcal{L}^{n-1} (\log_+ \mathcal{L} - c_{n-1}) d\mathcal{L}] = \\ &= \text{Tr}_N \text{Res}[a_{1,n;0}(x) du + a_{1,n;1}(x - \epsilon)e^{v(x)} dv]. \end{aligned} \quad (8.19)$$

Это дает следующие тождества:

$$\frac{\delta H_{1,n}}{\delta u} = a_{1,n;0}(x), \quad \frac{\delta H_{1,n}}{\delta v} = a_{1,n;1}(x - \epsilon)e^{v(x)}. \quad (8.20)$$

Эти тождества согласуются с уравнением Лакса

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_i}{\partial t_{1,n}} &= \{u_i, H_{1,n}\}_1 = \frac{1}{\epsilon} [e^{\epsilon \partial_x} - 1] \frac{\delta H_{1,n}}{\delta v_i} = \frac{1}{\epsilon} (a_{1,n;1}(x + \epsilon) - a_{1,n;1}(x))_i, \\ \frac{\partial v_i}{\partial t_{1,n}} &= \{v_i, H_{1,n}\}_1 = \frac{1}{\epsilon} [1 - e^{\epsilon \partial_x}] \frac{\delta H_{1,n}}{\delta u_i} = \\ &= \frac{1}{\epsilon} [a_{1,n;0}(x - \epsilon)e^{v(x)} - a_{1,n;0}(x)e^{v(x+\epsilon)}]_i. \end{aligned} \quad (8.21)$$

Из полученных тождеств видно, что потоки $\partial/\partial t_{1,n}$ являются гамильтоновыми системами вида (8.8). В случае $\beta = 1$ рекуррентное соотношение получим из следующих тривиальных тождеств:

$$\begin{aligned} n \frac{2}{n!} \mathcal{L}^n (\log_{\pm} \mathcal{L} - c_n) &= \mathcal{L} \frac{2}{(n-1)!} \mathcal{L}^{n-1} (\log_{\pm} \mathcal{L} - c_{n-1}) - 2 \frac{1}{n!} \mathcal{L}^n = \\ &= \frac{2}{(n-1)!} \mathcal{L}^{n-1} (\log_{\pm} \mathcal{L} - c_{n-1}) \mathcal{L} - 2 \frac{1}{n!} \mathcal{L}^n. \end{aligned}$$

Тогда для $\beta = 1$ получим

$$\begin{aligned} na_{1,n+1;1}(x) &= a_{1,n;0}(x + \epsilon) + ua_{1,n;1}(x) + e^v a_{1,n;2}(x - \epsilon) - 2a_{0,n+1;1}(x) = \\ &= a_{1,n;0}(x) + u(x + \epsilon)a_{1,n;1}(x) + e^{v(x+2\epsilon)} a_{1,n;2}(x) - 2a_{0,n+1;1}(x). \end{aligned}$$

Отсюда также следует выражение

$$\begin{aligned} \{u_i, H_{1,n-1}\}_2 &= \{[\Lambda e^{v(x)} - e^{v(x)} \Lambda^{-1}] a_{1,n;0}(x) + u(x)[\Lambda - 1] a_{1,n;1}(x - \epsilon)e^{v(x)}\}_i = \\ &= n[a_{1,n+1;1}(x)e^{v(x+\epsilon)} - a_{1,n+1;1}(x - \epsilon)e^{v(x)}]_i + \\ &\quad + 2[a_{0,n+1;0}(x)e^{v(x+\epsilon)} - a_{0,n+1;0}(x - \epsilon)e^{v(x)}]_i. \end{aligned}$$

Это в точности рекуррентное соотношение для потоков в терминах u . Аналогичный рекуррентный поток для v можно вывести тем же способом. ■

Как и в работе [6], существование тау-симметрии для РИЗТ доказано в следующей теореме.

ТЕОРЕМА 5. *РИЗТ обладает следующим свойством тау-симметрии:*

$$\frac{\partial h_{\alpha,m}}{\partial t_{\beta,n}} = \frac{\partial h_{\beta,n}}{\partial t_{\alpha,m}}, \quad \alpha, \beta = 0, 1, \quad m, n \geq 0. \quad (8.22)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем теорему для случая $\alpha = 1, \beta = 0$ (теорема для других случаев доказывается аналогично):

$$\begin{aligned} \frac{\partial h_{1,m}}{\partial t_{0,n}} &= \frac{2}{m!(n+1)!} \text{Tr}_N \text{Res}[-(\mathcal{L}^{n+1})_-, \mathcal{L}^m (\log_+ \mathcal{L} - c_m)] = \\ &= \frac{2}{m!(n+1)!} \text{Tr}_N \text{Res}[(\mathcal{L}^m (\log_+ \mathcal{L} - c_m))_+, (\mathcal{L}^{n+1})_-] = \\ &= \frac{2}{m!(n+1)!} \text{Tr}_N \text{Res}[(\mathcal{L}^m (\log_+ \mathcal{L} - c_m))_+, \mathcal{L}^{n+1}] = \frac{\partial h_{0,n}}{\partial t_{1,m}}. \quad \blacksquare \end{aligned} \quad (8.23)$$

Это свойство подтверждает следующее альтернативное определение тау-функции другого типа для РИЗТ.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Другую тау-функцию в Z_N для РИЗТ можно ввести с помощью следующего выражения в терминах плотностей гамильтонианов:

$$h_{\beta,n} = \epsilon(\Lambda - 1) \frac{\partial \log \bar{\tau}}{\partial t_{\beta,n}}, \quad \beta = 0, 1, \quad n \geq 0, \quad (8.24)$$

где $t_{0,j} = t_j$, $t_{1,j} = s_j$.

Имея два различных определения тау-функций для этой иерархии, мы задались вопросом о наличии некоторых загадочных связей между этими двумя видами тау-функций. Одна функция возникает из теории Сато, а другая – из тау-симметрии гамильтониана.

9. ВЫВОДЫ И ОБСУЖДЕНИЯ

В настоящей работе построена новая иерархия, названная РИЗТ, для нее построена расширенная теория Сато, включая уравнения Сато, матричные волновые операторы, квадратные уравнения Хироты, условия существования тау-функций. Как и расширенная иерархия Тоды и расширенная биградуированная иерархия Тоды в теории Громова–Виттена для $\mathbb{CP}^1$ и орбифолдов соответственно, эта иерархия заслуживает дальнейшего изучения ввиду ее потенциального использования в топологических квантовых полях и теории Громова–Виттена. Ввиду приведенных двух определений тау-функций для этой иерархии интересным становится вопрос выявления загадочных глубоких связей между указанными тау-функциями двух видов, из которых одна определена с помощью теории Сато, а другая возникает из тау-симметрии гамильтониана. Это нелегко, мы планируем изучить этот вопрос в дальнейшем.

Благодарности. Авторы благодарны Т. Е. Миланову и Да Фэн Цзо за полезные обсуждения.

Список литературы

- [1] M. Toda, *J. Phys. Soc. Japan*, **22**:2 (1967), 431–436.
- [2] M. Toda, *Nonlinear Waves and Solitons*, Mathematics and its Applications (Japanese Series), **5**, Kluwer, Dordrecht, 1989.
- [3] K. Ueno, K. Takasaki, “Toda lattice hierarchy”, *Group Representations and Systems of Differential Equations* (Tokyo, 1982), Advanced Studies in Pure Mathematics, **4**, ed. K. Okamoto, North-Holland, Amsterdam, 1984, 1–95.
- [4] E. Witten, “Two-dimensional gravity and intersection theory on moduli space”, *Surveys in Differential Geometry*, v.I: *Proceedings of the Conference on Geometry and Topology* (Harvard University, April 27–29, 1990), eds. S. T. Yau, H. B. Lawson, Jr., AMS, Providence, RI, 1991, 243–310.
- [5] B. A. Dubrovin, “Geometry of 2D topological field theories”, *Integrable Systems and Quantum Groups* (Montecatini Terme, Italy, June 14–22, 1993), Lecture Notes in Mathematics, **1620**, eds. M. Francaviglia, S. Greco, Springer, Berlin, 1996, 120–348.
- [6] G. Carlet, B. Dubrovin, Y. Zhang, *Mosc. Math. J.*, **4**:2 (2004), 313–332.
- [7] T. Milanov, *Duke Math. J.*, **138**:1 (2007), 161–178.

- [8] G. Carlet, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **39**:30 (2006), 9411–9435, arXiv: math-ph/0604024.
- [9] C. Z. Li, J. S. He, K. Wu, Y. Cheng, *J. Math. Phys.*, **51**:4 (2010), 043514, 32 pp., arXiv: 1003.5987.
- [10] S. Aoyama, Y. Kodama, *Commun. Math. Phys.*, **182**:1 (1996), 185–219, arXiv: hep-th/9505122.
- [11] T. Milanov, H. H. Tseng, *J. Reine Angew. Math.*, **2008**:622 (2008), 189–235.
- [12] C. Z. Li, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **44**:25 (2011), 255201, 29 pp., arXiv: 1011.4684.
- [13] C. Z. Li, J. S. He, *Rev. Math. Phys.*, **24**:7 (2012), 1230003, 34 pp.
- [14] C. Z. Li, J. S. He, Y. C. Su, *J. Math. Phys.*, **53**:1 (2012), 013517, 24 pp.
- [15] V. G. Kac, J. W. van de Leur, *J. Math. Phys.*, **44**:8 (2003), 3245–3293, arXiv: hep-th/9308137.
- [16] M. Adler, P. van Moerbeke, P. Vanhaecke, *Commun. Math. Phys.*, **286**:1 (2009), 1–38.
- [17] M. Mañas, L. Martínez Alonso, *Inverse Problems*, **25**:11 (2009), 115020, 22 pp.
- [18] M. Mañas, L. Martínez Alonso, C. Álvarez Fernández, *Inverse Problems*, **25**:6 (2009), 065007, 31 pp., arXiv: 0809.2720.
- [19] C. Álvarez Fernández, U. Fidalgo Prieto, M. Mañas, *Inverse Problems*, **26**:5 (2010), 055009, 15 pp., arXiv: 0911.0941.
- [20] C. Álvarez Fernández, U. Fidalgo Prieto, M. Mañas, *Adv. Math.*, **227**:4 (2011), 1451–1525.
- [21] G. Carlet, J. van de Leur, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **46**:40 (2013), 405205, 16 pp.
- [22] C. Z. Li, J. S. He, *Math. Phys.: Anal. Geom.*, **17**:3–4 (2014), 377–407, arXiv: 1410.3657.
- [23] D. F. Zuo, *Local matrix generalizations of W-algebras*, arXiv: 1401.2216.
- [24] C. Z. Li, J. S. He, K. Porsezian, *Phys. Rev. E*, **87**:1 (2013), 012913, 13 pp., arXiv: 1205.1191.
- [25] J. S. He, L. Zhang, Y. Cheng, Y. S. Li, *Sci. China Ser. A*, **49**:12 (2006), 1867–1878.
- [26] G. Carlet, *Extended Toda hierarchy and its Hamiltonian structure*, PhD Thesis, SISSA, Trieste, 2003.

Поступила в редакцию 21.01.2015,
после доработки 5.03.2015