Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Т. Котвицкий, Гравитационное линзирование прямыми космическими струнами, *ТМФ*, 2015, том 184, номер 1, 160–174

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8858>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.206.68

26 апреля 2023 г., 10:36:29

© 2015 г.

А. Т. Котвицкий^{*†}

ГРАВИТАЦИОННОЕ ЛИНЗИРОВАНИЕ ПРЯМЫМИ КОСМИЧЕСКИМИ СТРУНАМИ

Рассматриваются эффекты, вызванные гравитационным линзированием от гипотетических космических струн. Дан краткий обзор фактов, касающихся бесконечных прямых струн, а также получено уравнение гравитационной линзы от бесконечной струны в классическом виде и подробно анализируются особенности гравитационного линзирования на данном объекте. Рассматривается конечная прямая струна. Приводятся каустики и критические кривые для струн различной длины, а также некоторые изображения, которые дает рассматриваемая гравитационная линза. Предлагается метод численного построения кривых блеска, в качестве примера работоспособности данного метода строится конкретная кривая блеска для определенных параметров гравитационной линзы.

Ключевые слова: гравитационные линзы, космические струны, микролинзирование, кривая блеска.

DOI: 10.4213/tmf8858

1. ВВЕДЕНИЕ

Гравитационное линзирование является очень важным инструментом в современной наблюдательной и теоретической физике. С одной стороны, изначально выбирая ту или иную космологическую модель, мы можем из наблюдательных данных определить ряд параметров этой модели. С другой стороны, анализируя наблюдательные данные, можно попытаться решить обратную задачу, т. е. определить, какая из моделей (гравитационной теории, космологии, гравитационной линзы) более адекватно описывает действительность.

Настоящая работа посвящена эффектам гравитационного линзирования на космических струнах (см., например, [1]–[3]). Очередной всплеск повышенного интереса к данной тематике произошел в 2004 году после обнаружения двойного изображения [4] и аномальных флуктуаций яркости квазара Q0957 +561 A,B [5]. Однако видимые свойства данных объектов можно объяснить и без введения космических

^{*}Харьковский национальный университет им. В. Н. Каразина, Харьков, Украина.
E-mail: kotvytskyi@gmail.com

[†]Радиоастрономический институт НАН Украины, Харьков, Украина

струн, но данное открытие побудило исследователей заняться тщательным изучением всевозможных эффектов гравитационного линзирования [6]–[15]. В работе [6] рассматривается струна, проходящая через черную дыру, в работе [7] изучается интересная возможность возникновения двойного кольца Эйнштейна. Примерами простых линзовых систем с интересными свойствами могут выступать диск с центральной массой [8] или N -точечные мультиплоскостные гравитационные линзы [9]. Гравитационное линзирование на произвольных космических струнах и угол отклонения луча света были подробно исследованы в работе [10]. Двойное изображение объекта CSL-1 с точки зрения возможного линзирования космической струной изучено в работах [11]–[13]. Возможные типы космических струн и их свойства рассмотрены в [14]. С эффектами микролинзирования на прямой космической струне можно ознакомиться в работе [15].

2. БЕСКОНЕЧНАЯ СТРУНА

2.1. Точное решение. Рассмотрим кратко вывод метрики для бесконечной космической струны (подробнее см. [1], [2]).

Запишем стандартные уравнения Эйнштейна

$$R_{\nu}^{\mu} - \frac{1}{2} R \delta_{\nu}^{\mu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\nu}^{\mu}, \quad (1)$$

где R_{ν}^{μ} , R – тензор Риччи и скалярная кривизна, T_{ν}^{μ} – тензор энергии-импульса. Цилиндрически-симметричный интервал имеет вид

$$ds^2 = e^{2\chi} c^2 dt^2 - e^{2\psi} (dr^2 + dz^2) - e^{2\omega} d\phi^2, \quad (2)$$

где $\chi(r)$, $\psi(r)$, $\omega(r)$ – неизвестные функции координаты r .

Расположим струну радиуса r_0 вдоль оси z (см. рис. 1), тогда ее тензор энергии-импульса можно представить в виде

$$T_t^t = T_z^z = \varepsilon, \quad T_r^r = T_{\phi}^{\phi} = 0, \quad (3)$$

где ε – плотность энергии струны.

Подставляя (2) и (3) в уравнение (1), получаем два решения: внутреннее решение

$$ds^2 = c^2 dt^2 - (dr^2 + dz^2) - e^{2\omega} d\phi^2, \quad (4)$$

где $\omega(r)$ удовлетворяет уравнению

$$(e^{\omega})'' + \frac{8\pi G}{c^4} \varepsilon e^{\omega} = 0,$$

и внешнее решение

$$ds^2 = r^{2m} c^2 dt^2 - r^{2m(m-1)} (dr^2 + dz^2) - r^{2(1-m)} a_0 d\phi^2, \quad (5)$$

где m , a_0 – константы интегрирования.

Сшиваем решения, требуя чтобы компоненты метрики на границе струны и их производные были непрерывны. Получаем

$$m = 0, \quad a_0 = 1 - \frac{8\pi G}{c^4} \int_0^{r_0} \varepsilon e^{\omega} dr. \quad (6)$$

Рис. 1. Бесконечная струна радиуса r_0 расположена вдоль оси z в цилиндрических координатах.

Определим энергию единицы длины струны выражением

$$\mu = \int_0^{2\pi} \int_0^{r_0} \varepsilon e^\omega dr d\phi = 2\pi \int_0^{r_0} \varepsilon e^\omega dr, \quad (7)$$

тогда

$$a_0 = 1 - \frac{4G\mu}{c^4}. \quad (8)$$

Окончательно внешнее решение принимает вид

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dr^2 - dz^2 - \left(1 - \frac{4G\mu}{c^4}\right)^2 r^2 d\phi^2. \quad (9)$$

Интервал (9) описывает коническую метрику. Это легко увидеть, если ввести угловую координату

$$\vartheta = \left(1 - \frac{4G\mu}{c^4}\right) \phi. \quad (10)$$

Тогда (9) представляет собой обычную метрику Минковского

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dr^2 - dz^2 - r^2 d\vartheta^2, \quad (11)$$

но если угол ϕ изменяется в интервале $[0, 2\pi]$, то значения угла ϑ при этом принадлежат отрезку $\vartheta \in [0, 2\pi - 8\pi G\mu/c^4]$, т. е. имеется дефицит угла

$$\Delta\vartheta = \frac{8\pi G\mu}{c^4}. \quad (12)$$

2.2. Приближение слабого поля. В случае слабого возмущения метрики метрический тензор можно представить в виде

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad (13)$$

где $\eta_{\mu\nu}$ – метрический тензор Минковского, $|h_{\mu\nu}| \ll 1$ – малые поправки к метрике. Тогда (см., например, [16]) в гармонических координатах уравнения Эйнштейна принимают вид

$$\square h_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4} S_{\mu\nu}, \quad (14)$$

где $S_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}T/2$ определяется тензором энергии-импульса, а оператор $\square = \partial_\alpha \partial^\alpha = \partial^2/c^2 \partial^2 t - \Delta$ есть даламбертиан.

Решение данного уравнения рассмотрено во многих учебниках (см., например, [17]):

$$h_{\mu\nu} = -\frac{4G}{c^4} \int \frac{S_{\mu\nu}(t', \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3 x', \quad (15)$$

где $t' = t - |\vec{x} - \vec{x}'|/c$ – время запаздывания.

Плотность тензора энергии-импульса для бесконечной прямой струны вдоль оси z задается выражением (в системе координат (t, x, y, z))

$$T_\mu^\nu = \mu \delta(x) \delta(y) \text{diag}(1, 0, 0, 1). \quad (16)$$

Тогда получаем

$$\begin{aligned} h_{00} &= h_{33} = 0, \\ h_{11} &= h_{22} = \frac{8G\mu}{c^4} \ln \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{r_0}, \end{aligned} \quad (17)$$

где r_0 – радиус струны.

Переходя на плоскости (x, y) к полярным координатам r, ϕ , получаем

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dz^2 - \left(1 - \frac{8G\mu}{c^4} \ln \frac{r}{r_0}\right) (dr^2 + r^2 d\phi^2). \quad (18)$$

Введем новую переменную $\hat{r}$:

$$\left(1 - \frac{8G\mu}{c^4} \ln \frac{r}{r_0}\right) r^2 = \left(1 - \frac{8G\mu}{c^4}\right) \hat{r}^2, \quad (19)$$

тогда (в первом порядке по $G\mu/c^4 \ll 1$) новая компонента метрического тензора определяется выражением

$$\begin{aligned} g_{\hat{r}\hat{r}} &= \frac{\partial r}{\partial \hat{r}} \frac{\partial r}{\partial \hat{r}} g_{rr} = \left(1 + \frac{4G\mu}{c^4} \ln \frac{r}{r_0}\right)^2 \left(1 - \frac{8G\mu}{c^4} \ln \frac{r}{r_0}\right) = \\ &= \left(1 + \frac{8G\mu}{c^4} \ln \frac{r}{r_0}\right) \left(1 - \frac{8G\mu}{c^4} \ln \frac{r}{r_0}\right) = 1. \end{aligned} \quad (20)$$

Таким образом, интервал принимает вид

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dz^2 - d\hat{r}^2 - \left(1 - \frac{8G\mu}{c^4}\right) \hat{r}^2 d\phi^2 \quad (21)$$

или

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dz^2 - d\hat{r}^2 - \left(1 - \frac{4G\mu}{c^4}\right)^2 \hat{r}^2 d\phi^2. \quad (22)$$

Отсюда следует, что дефицит угла выражается формулой

$$\Delta\vartheta = \frac{8\pi G\mu}{c^4}, \quad (23)$$

которая в точности совпадает с (12). Таким образом, приближенное решение приводит к точно такому же ответу, как и точное решение.

2.3. Уравнение гравитационной линзы для бесконечной струны. Определим струну параметрическим способом в виде четырехмерного вектора $f^\mu(\tau, \mathbf{f}(\tau, \sigma))$, где σ – параметр вдоль струны, τ – собственное время на струне, $\mathbf{f}$ – трехмерный вектор. Тогда ее тензор энергии-импульса определяется выражением [1], [2]

$$T^{\alpha\beta} = \mu \int d\sigma (\dot{f}^\alpha \dot{f}^\beta - f'^\alpha f'^\beta) \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{f}(\tau, \sigma)), \quad (24)$$

где μ – линейная плотность энергии струны, точка над символом означает производную по собственному времени, а штрих – производную по σ . Разложим вектор $\mathbf{f}$ на две компоненты: $\vec{f}_n$ и $f_{||}$, где $\vec{f}_n$ – двумерный вектор, нормальный к невозмущенному направлению распространения света, $f_{||}$ – компонента, параллельная лучу (см. рис. 2).

Угол отклонения луча света можно представить как [10]

$$\vec{\alpha} = -\frac{4G\mu}{c^4} \int d\sigma \frac{\dot{f}_\alpha \dot{f}_\beta - f'_\alpha f'_\beta - \eta_{\alpha\beta} \dot{f}^2}{1 - \dot{f}_{||}} \gamma^\alpha \gamma^\beta \frac{\vec{f}_n}{f_n^2}. \quad (25)$$

Для плоской струны $(\dot{f}_\alpha \dot{f}_\beta - f'_\alpha f'_\beta - \eta_{\alpha\beta} \dot{f}^2) \gamma^\alpha \gamma^\beta = 1$ и $f_{||} = 0$.

В системе центра масс струны $\vec{\xi}^i = \vec{\xi} + \vec{f}_n$ (см. рис. 2)

$$\vec{\alpha} = \frac{4G\mu}{c^4} \int d\sigma \frac{\vec{\xi} - \vec{\xi}^i}{|\vec{\xi} - \vec{\xi}^i|^2}. \quad (26)$$

Расположим струну длиной L симметрично вдоль оси ξ_2 (см. рис. 3), тогда для угла отклонения получаем выражение

$$\vec{\alpha} = \frac{4G\mu}{c^4} \int_{-L/2}^{L/2} d\sigma \frac{\xi_1 \vec{i} + (\xi_2 - \sigma) \vec{j}}{\xi_1^2 + (\xi_2 - \sigma)^2}, \quad (27)$$

где (ξ_1, ξ_2) – координаты точки пересечения луча света с плоскостью линзы.

После элементарного интегрирования получаем следующие компоненты угла отклонения:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{4G\mu}{c^4} \left(\arctg \frac{L/2 + \xi_2}{\xi_1} + \arctg \frac{L/2 - \xi_2}{\xi_1} \right), \\ \alpha_2 &= \frac{2G\mu}{c^4} \ln \frac{\xi_1^2 + (\xi_2 + L/2)^2}{\xi_1^2 + (\xi_2 - L/2)^2}. \end{aligned} \quad (28)$$

Рис. 2. Произвольная струна (изображена тонкой замкнутой линией). Векторы $\vec{\xi}^1$ и $\vec{\xi}^2$ выходят из центра масс струны. Вектор $\mathbf{f}$ выходит из точки пересечения луча света (жирная пунктирная ломанная) с плоскостью линзы в произвольную точку струны. Компонента $\vec{f}_n$ лежит в плоскости линзы, $f_{||}$ – компонента вектора $\mathbf{f}$, параллельная падающему лучу света.

Рис. 3. Плоскость гравитационной линзы – (ξ_1, ξ_2) . Вектор $\vec{\eta}$ лежит в плоскости источника, D_d , D_s – расстояния от наблюдателя до линзы и до плоскости источника соответственно. D_{ds} – расстояние между источником и линзой.

Рис. 4. В точках O , L , S находятся наблюдатель, бесконечная струна и источник соответственно. Точки A_1 и A_2 являются точками пересечения лучей света с небесной сферой гравитационной линзы, при этом все лучи отклоняются на угол α . На небесной сфере источника в точках I_1 и I_2 находятся его изображения. Угол 2α , обозначенный жирными пунктирными линиями, является углом, который “вырезает” струна.

Устремим $L \rightarrow \infty$. Тогда в зависимости от знака ξ_1 получаем следующие выражения:

$$\alpha_1 = \pm \frac{4\pi G\mu}{c^4}, \quad \alpha_2 = 0, \quad (29)$$

где знак “плюс” выбираем, если $\xi_1 > 0$, и знак “минус” – если $\xi_1 < 0$.

Из (29) следует, что в случае бесконечной струны, расположенной вдоль оси ξ_2 , отклонение луча света происходит только вдоль оси ξ_1 , причем угол отклонения не зависит от того, на каком расстоянии от струны прошел свет. Физический смысл знаков $\pm$ состоит в том, что луч света отклоняется всегда к струне на соответствующий угол, а не от нее.

Это приводит к ряду интересных особенностей при линзировании на такой струне.

Рассмотрим рис. 4. В точке S находится источник, в точке O – наблюдатель, в точке L расположена бесконечная струна, перпендикулярная плоскости рисунка. Луч света, испущенный источником, пересекает небесную сферу гравитационной

линзы и отклонятся на угол α к струне. Так как отклонение не зависит от расстояния между струной и точкой пересечения небесной сферы линзы, мы получаем четырехугольник OA_1SA_2 , симметричный относительно диагонали OS . Из несложных геометрических рассуждений следует, что $\angle I_1AI_2 = 2\alpha$. Это приводит к тому, что если источник находится в секторе, вырезаемом углом 2α (на рис. 4 он изображен жирным пунктиром из точки L), то наблюдатель увидит два изображения I_1 и I_2 , симметрично расположенных относительно реального положения источника S , смещенных на угол $\angle I_1OS$, который для больших расстояний и малых углов отклонений равен

$$\angle I_1OS = \alpha \frac{D_{ds}}{D_s}, \quad (30)$$

где $D_s = OK = OS = OI_1 = OI_2$ – расстояние между наблюдателем и источником, $D_{ds} = LK$ – расстояние между линзой и источником. Если источник находится вне этого сектора, то наблюдатель видит только одно изображение, смещенное на тот же самый угол. Для источника, находящегося “ниже” вырезаемого сектора (на рис. 4 изображен жирным пунктиром), наблюдатель увидит изображение I_2 , если “выше”, – то I_1 . Так происходит потому, что в данном случае обе точки A_1 и A_2 будут находиться по одну сторону от линзы L , а физически осмысленным будет то отклонение, которое направлено к струне.

Таким образом, мы получили, что в случае прямой бесконечной струны вырезаемый угол будет равен

$$\Delta\theta = 2\alpha = \frac{8\pi G\mu}{c^4}. \quad (31)$$

Полученное выражение совпадает с (12) и (23).

Получим уравнение гравитационной линзы. Из рис. 3 следует, что

$$\vec{\eta} = \frac{D_s}{D_d} \vec{\xi} - D_{ds} \vec{\alpha}. \quad (32)$$

Введем переменные

$$\vec{y} = \frac{\vec{\eta}}{D_s}, \quad \vec{x} = \frac{\vec{\xi}}{D_d}, \quad \hat{\alpha} = \frac{D_{ds}}{D_s} \vec{\alpha}, \quad (33)$$

тогда уравнение гравитационной линзы принимает стандартный классический вид [18], [19]

$$\vec{y} = \vec{x} \pm \hat{\alpha}. \quad (34)$$

Если струна лежит в плоскости линзы, вдоль оси x_2 , то уравнение линзы можно переписать в компонентах

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 \pm \hat{\alpha}, \\ y_2 &= x_2, \end{aligned} \quad (35)$$

где знак “+” выбирается в случае $x_1 < 0$, а знак “–” – в случае $x_1 > 0$,

$$\hat{\alpha} = \frac{4\pi G\mu}{c^4} \frac{D_{ds}}{D_s}.$$

Из уравнения (35) следует, что если источник находится в интервале $(-\hat{\alpha}, \hat{\alpha})$, т. е. $y_1 \in (-\hat{\alpha}, \hat{\alpha})$, тогда имеется два решения $x_1 = y_1 - \hat{\alpha}$ для $x_1 < 0$ и $x_1 = y_1 + \hat{\alpha}$

для $x_1 > 0$. Если положение источника такое, что $y_1 > \hat{\alpha}$, то существует только одно решение $x_1 = y_1 + \hat{\alpha}$ для $x_1 > 0$, если же $y_1 < -\hat{\alpha}$, то существует другое решение $x_1 = y_1 - \hat{\alpha}$ для $x_1 < 0$.

Также из (35) следует, что

$$\det \frac{\partial \vec{y}}{\partial \vec{x}} = 1. \quad (36)$$

Следовательно, в данной системе отсутствуют каустики и критические кривые, а коэффициент усиления для любого изображения всегда равен единице, т. е. яркости источника и изображения одинаковые. Но так как в данной системе возможны от одного до двух изображений, то суммарная яркость может увеличиваться вдвое.

Суммируем особенности гравитационного линзирования на прямой бесконечной струне:

- 1) если источник попадает в сектор $\Delta\vartheta$, то наблюдатель видит два изображения;
- 2) каждая точка изображения смещена на один и тот же угол от соответствующих точек в источнике, т. е. изображения не искажаются;
- 3) если наблюдатель видит два изображения, то они расположены симметрично относительно источника.

3. СТРУНА КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ

3.1. Критические кривые и каустики. Перепишем формулу (26) для угла отклонения через полную массу струны M и ее длину L , а также расположим ее симметрично относительно начала координат в плоскости (ξ_1, ξ_2) вдоль оси ξ_1 , тогда выражение для данного угла примет вид

$$\vec{\alpha} = \frac{4GM}{Lc^2} \int_{-L/2}^{L/2} d\sigma \frac{(\xi_1 - \sigma)\vec{i} + \xi_2\vec{j}}{(\xi_1 - \sigma)^2 + \xi_2^2}. \quad (37)$$

Общий вид уравнения для гравитационной линзы совпадает с (32), но в данном случае удобнее использовать безразмерные переменные, полученные с помощью радиуса Эйнштейна–Хвольсона ξ_0 , который стандартно определяется как [8]

$$\xi_0 = \sqrt{\frac{4GM}{c^2} \frac{D_{\text{ds}} D_{\text{d}}}{D_{\text{s}}}}. \quad (38)$$

Определяя безразмерные переменные

$$\vec{y} = \frac{\vec{\eta}}{\xi_0} \frac{D_{\text{d}}}{D_{\text{s}}}, \quad \vec{x} = \frac{\vec{\xi}}{\xi_0}, \quad r = \frac{L}{\xi_0}, \quad (39)$$

перепишем уравнение (32) с учетом (37)–(39) в виде

$$\vec{y} = \vec{x} - \frac{1}{r} \int_{-r/2}^{r/2} d\lambda \frac{(x_1 - \lambda)\vec{i} + x_2\vec{j}}{(x_1 - \lambda)^2 + x_2^2}. \quad (40)$$

После интегрирования получаем

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 - \frac{1}{2r} \ln \frac{(x_1 + r/2)^2 + x_2^2}{(x_1 - r/2)^2 + x_2^2}, \\ y_2 &= x_2 - \frac{1}{r} \left(\arctg \frac{x_1 + r/2}{x_2} - \arctg \frac{x_1 - r/2}{x_2} \right). \end{aligned} \quad (41)$$

Рис. 5. Функции $a(\phi)$ при некоторых значениях r . Значению $r = 1.9$ соответствует штриховая линия, значению $r = 1.99$ – пунктирная линия, значению $r = 1.999$ – штрихпунктирная линия, значению $r = 2$ – сплошная линия.

Для определения критических кривых вычислим соответствующую матрицу

$$\frac{\partial y_i}{\partial x_j} = \frac{1}{z} \begin{pmatrix} z - 4(r^2 - 4x_1^2 + 4x_2^2) & 32x_1x_2 \\ 32x_1x_2 & z + 4(r^2 - 4x_1^2 + 4x_2^2) \end{pmatrix}, \quad (42)$$

где $z = r^4 + 8r^2(x_2^2 - x_1^2) + 16(x_2^2 + x_1^2)^2$. Ее детерминант равен

$$\det A = \left| \frac{\partial y_i}{\partial x_j} \right| = 1 - \frac{16}{r^4 + 8r^2(x_2^2 - x_1^2) + 16(x_2^2 + x_1^2)^2}. \quad (43)$$

Приравнявая это выражение к нулю, получаем уравнение критической кривой

$$\frac{1}{16}r^4 + \frac{1}{2}r^2(x_2^2 - x_1^2) + (x_2^2 + x_1^2)^2 = 1. \quad (44)$$

Для более удобного анализа полученной кривой перейдем к полярным координатам

$$x_1 = a \cos \phi, \quad x_2 = a \sin \phi, \quad (45)$$

тогда уравнение (44) примет вид

$$a = \frac{r}{2} \sqrt{\cos 2\phi + \sqrt{\left(\frac{2}{r}\right)^4 - \sin^2 2\phi}}. \quad (46)$$

Видно, что для выражения (46) существует критическое значение $r_{\text{cr}} = 2$. При $r \ll r_{\text{cr}}$ имеем $a \rightarrow 1$ для любого угла ϕ , т. е. мы имеем практически окружность единичного радиуса. При $r \rightarrow r_{\text{cr}}$ характер функции $a(\phi)$ резко меняется. На рис. 5 изображены функции $a(\phi)$ при некоторых значениях r . При $r \geq r_{\text{cr}}$ кривая терпит разрыв.

Рис. 6. Двенадцать каустик и критические кривые, соответствующие различным значениям параметра r , сгруппированы по три и представлены различными кривыми: штриховыми, пунктирными, штрихпунктирными; $r = 0.5, 1.2, 1.7$ (а); $r = 1.9, 1.99, 1.999$ (б); $r = 2.0, 2.1, 2.2$ (в); $r = 2.5, 3.0, 3.5$ (г). Критические кривые представляют собой модифицированные окружности или их фрагменты, а каустики – астронды.

Определив для каждого угла $\phi \in [0, 2\pi]$ значение a по формуле (46), вычисляем координаты x_1, x_2 по формулам (45), а затем подставляем их в уравнение гравитационной линзы (41) и получаем каустики для различных длин струн r . На рис. 6 изображены каустики и критические кривые, соответствующие двенадцати значениям параметра r , сгруппированным по три. Критические кривые представляют собой модифицированные окружности или их фрагменты, а каустики – астронды.

3.2. Построение кривой блеска. Если наблюдатель находится очень далеко от гравитационной линзы, то угловые расстояния между изображениями могут оказаться настолько малы, что углового разрешения прибора будет недостаточно для

визуального разделения изображений. В этом случае можно идентифицировать гравитационную линзу по изменению полной яркости изображений в зависимости от времени, т. е. фактически от взаимного расположения источника, линзы и наблюдателя. Подобный эффект получил название микролинзирования и подробно рассмотрен в ряде работ. Для систематического изучения можно рекомендовать [20], хороший обзор по этой теме на русском языке представлен в работе [21], пример применения микролинзирования двойных и кратных звезд можно посмотреть в работе [22]. Эффект микролинзирования на двойной гравитационной линзе был изучен в [23], [24]. Бесконечная космическая струна с этой точки зрения рассмотрена в работе [15].

Начиная с 1991 года поисками эффектов микролинзирования занимались две группы: группа американских и австралийских ученых (эксперимент MACHO [25]) и группа французских и чилийских ученых (эксперимент EROS [26]). Любопытно отметить тот факт, что результаты их исследований были опубликованы в одном и том же номере журнала Nature.

Таким образом, можно сделать вывод, что изучение эффектов микролинзирования на различных гравитационных линзах является очень важной задачей. Основной проблемой при изучении микролинзирования на конечной струне является то, что невозможно в общем случае обратить систему уравнений (41) для того, чтобы, зная положения источника (y_1, y_2) , определить координаты изображений (x_1, x_2) , а затем рассчитать коэффициент усиления

$$\mu = \frac{1}{\det A}, \quad (47)$$

где $\det A$ определен в (43), а μ – коэффициент усиления, и он никак не связан с линейной плотностью энергии, рассматриваемой в разделе 2. К сожалению, в литературе по космическим струнам данная буква зарезервирована за одним понятием, а в литературе по гравитационному линзированию – за другим, но так как в настоящей работе эти разделы не перемешиваются, то можно надеяться, что такая ситуация не приведет к путанице. Мы исходим из того, что невозможно представить коэффициент усиления в виде функциональной зависимости $\mu(y_1, y_2)$, поэтому предлагается следующий алгоритм решения данной задачи.

ШАГ 1. Задаем границу кругового источника радиуса r_s и определяем его движение в некоторой ограниченной области. Представляем движение источника в виде его последовательных положений.

ШАГ 2. Для каждого положения источника методом трассировки находим его изображения. Для этого разбиваем определенную прямоугольную область в плоскости (x_1, x_2) на $N \times N$ малых ячеек, затем каждому узлу получившейся сетки по формулам (41) ставим в соответствие узел на плоскости (y_1, y_2) . Для построения изображений перебираем все точки источника в плоскости (y_1, y_2) и по найденному ранее отображению определяем соответствующие точки в плоскости (x_1, x_2) .

ШАГ 3. Задав минимальное расстояние между изображениями (т. е. то расстояние, при котором изображения считаются различными), разбиваем весь массив изображений на кластеры, каждый из которых содержит ровно одно изображение.

ШАГ 4. В каждом кластере изображений определяем все внешние (граничные) точки и перенумеровываем их последовательно.

Рис. 7. Зависимость коэффициента усиления $\mu(t)$ от положения источника, которое определяется параметром $t \in [-1, 1]$. Для выбранных девяти значений параметра t , отмеченных кружками $I1 - I9$, на рис. 8 показаны соответствующие изображения.

ШАГ 5. Представляем граничные точки каждого изображения как многоугольник и вычисляем его площадь по формуле

$$S = \frac{1}{2} \left(\left| \begin{matrix} x_1^{(1)} & x_2^{(1)} \\ x_1^{(2)} & x_2^{(2)} \end{matrix} \right| + \left| \begin{matrix} x_1^{(2)} & x_2^{(2)} \\ x_1^{(3)} & x_2^{(3)} \end{matrix} \right| + \dots + \left| \begin{matrix} x_1^{(n)} & x_2^{(n)} \\ x_1^{(1)} & x_2^{(1)} \end{matrix} \right| \right), \quad (48)$$

где верхний индекс в круглых скобках пробегает от 1 до n и указывает на все граничные точки (последовательно перенумерованные) одного изображения.

ШАГ 6. Сумма площадей всех изображений от одного положения источника дает общую площадь изображений. Разделив ее на площадь источника πr_s^2 , получим коэффициент усиления от кругового источника для данного положения. Прodelав такую работу для каждого положения, определим кривую блеска для заданного движения источника.

Работа данного алгоритма проиллюстрирована на рис. 7 и рис. 8. Зависимость коэффициента усиления от положения источника представлена на рис. 7, где его положение определяется параметром $t \in [-1, 1]$, который связан с координатами центра кругового источника следующим образом:

$$\begin{aligned} y_1 &= 1.5t + 0.15, \\ y_2 &= 1.5t. \end{aligned} \quad (49)$$

Гравитационная линза определяется безразмерным параметром $r = 1.5$. Радиус источника $r_s = 0.05$. На рис. 8 представлены девять положений источника ($I1, \dots, I9$),

Рис. 8. Изображения $I1, \dots, I9$ (соответствующие рис. 7) от гравитационной линзы ($r = 1.5$) кругового источника радиусом $r_s = 0.05$. Источник движется вдоль пунктирной прямой снизу вверх. Когда источник пересекает каустик (модифицированную астроиду), его изображения вытягиваются вдоль критической кривой (вытянутая окружность).

который движется вдоль пунктирной прямой снизу вверх, и изображения, которые дает данная гравитационная линза, представленная отрезком длиной 1.5, лежащим на оси x_1 . Видно, что если источник пересекает каустик (модифицированную астроиду), то его изображения вытягиваются вдоль критической кривой (вытянутая окружность).

Благодарности. Автор выражает свою глубокую признательность В. М. Шульге за полезные обсуждения и конструктивные замечания, а также институту Henri Poincaré (Париж) и центру Emile Borel за гостеприимство и финансовую поддержку.

Список литературы

- [1] M. R. Anderson, *The Mathematical Theory of Cosmic Strings. Cosmic Strings in the Wire Approximation*, IOP Publ., Bristol, 2003.
- [2] A. Vilenkin, E. P. S. Shellard, *Cosmic Strings and Other Topological Defects*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1994.
- [3] Б. Э. Мейерович, *УФН*, **171**:10 (2001), 1033–1049.
- [4] M. Sazhin, G. Longo, M. Capaccioli, J. M. Alcalá, R. Silvotti, G. Covone, O. Khovanskaya, M. Pavlov, M. Pannella, M. Radovich, V. Testa, *MNRAS*, **343**:2 (2003), 353–359, arXiv: astro-ph/0302547.
- [5] R. Schild, I. S. Masnyak, B. I. Hnatyk, V. I. Zhdanov, *Astron. Astrophys.*, **422**:2 (2004), 477–482.
- [6] H. Cheng, H. Wang, J. Man, *The strong field gravitational lensing in the Schwarzschild black hole pierced by a cosmic string*, arXiv: 1010.2308.
- [7] P. F. González-Díaz, *Is the 2008 NASA/ESA double Einstein ring actually a ringhole signature?*, arXiv: 1001.3778.
- [8] E. Yu. Bannikova, A. T. Kotvytskiy, *MNRAS*, **445**:4 (2014), 4435–4445, arXiv: 1410.7946.
- [9] А. Т. Котвицкий, Д. В. Крючков, *Вестн. ХНУ. Сер. “Физика”*, **1113**:20 (2014), 63–73.
- [10] A. de Laix, T. Vachaspati, *Phys. Rev. D*, **54**:8 (1996), 4780–4791, arXiv: astro-ph/9605171.
- [11] M. V. Sazhin, O. S. Khovanskaya, M. Capaccioli, G. Longo, M. Paolillo, G. Covone, N. A. Grogin, E. J. Schreier, *MNRAS*, **376**:4 (2007), 1731–1739, arXiv: astro-ph/0611744.
- [12] M. V. Sazhin, O. S. Sazhina, M. Capaccioli, G. Longo, M. Paolillo, G. Riccio, *The Open Astron. J.*, **3**:1 (2010), 200–206.
- [13] S. V. Krasnikov, *Gravit. Cosmol.*, **15**:1 (2009), 62–64.
- [14] P. G. Gavrilenko, L. V. Zadorozhna, *Ukr. J. Phys.*, **54**:3 (2009), 319–324.
- [15] K. Kuijken, X. Siemens, T. Vachaspati, *MNRAS*, **384**:1 (2008), 161–164, arXiv: 0707.2971.
- [16] С. Вейнберг, *Гравитация и космология. Принципы и приложения общей теории относительности*, Мир, М., 1975.
- [17] В. Г. Левич, *Курс теоретической физики*, т. 1: *Теория электромагнитного поля. Теория относительности. Статистическая физика. Электромагнитные процессы в веществе*, Физматгиз, М., 1969.
- [18] P. Schneider, J. Ehlers, E. E. Falco, *Gravitational Lenses*, Springer, Berlin–Heidelberg, 1999.
- [19] А. Ф. Захаров, *Гравитационные линзы и микролинзы*, Янус-К, М., 1997.
- [20] J. Wambsganss, “Gravitational microlensing”, *Gravitational Lensing: Strong, Weak and Micro*, Saas-Fee Advanced Courses, **33**, eds. P. Schneider, Ch. Kochanek, J. Wambsganss, Springer, Berlin, 2006, 453–540.
- [21] А. Ф. Захаров, М. В. Сажин, *УФН*, **168**:10 (1998), 1042–1082.
- [22] М. В. Сажин, А. М. Черепашук, *Письма в Астрон. журн.*, **20**:9 (1994), 613–619.
- [23] S. Mao, B. Paczynski, *Astrophys. J. Lett.*, **374** (1991), L37–L40.
- [24] H. Asada, *Progr. Theor. Phys.*, **110**:3 (2003), 425–432, arXiv: astro-ph/0308280.
- [25] C. Alcock, C. W. Akerlof, R. A. Allsman, T. S. Axelrod, D. P. Bennett, S. Chan, K. H. Cook, K. C. Freeman, K. Griest, S. L. Marshall, H. S. Park, S. Perlmutter, B. A. Peterson, M. R. Pratt, P. J. Quinn, A. W. Rodgers, C. W. Stubbs, W. Sutherland, *Nature*, **365**:6447 (1993), 621–623, arXiv: astro-ph/9309052.
- [26] E. Aubourg, P. Bareyre, S. Bréhin, M. Gros, M. Lachièze-Rey, B. Laurent, E. Lesquoy, C. Magneville, A. Milsztajn, L. Moscoso, F. Queinnec, J. Rich, M. Spiro, L. Vigroux, S. Zylberajch, R. Ansari, F. Cavalier, M. Moniez, J.-P. Beaulieu, R. Ferlet, Ph. Grison, A. Vidal-Madjar, J. Guibert, O. Moreau, F. Tajahmady, E. Maurice, L. Prévôt, C. Gry, *Nature*, **365**:6447 (1993), 623–625.