Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. А. Бабажанов, А. Б. Хасанов, О периодической цепочке Тоды с интегральным источником, *ТМФ*, 2015, том 184, номер 2, 253–268

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8859>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.166.219.16

26 апреля 2023 г., 17:58:02

© 2015 г.

Б. А. Бабажанов*, А. Б. Хасанов*

О ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ЦЕПОЧКЕ ТОДЫ С ИНТЕГРАЛЬНЫМ ИСТОЧНИКОМ

Метод обратной спектральной задачи применен для интегрирования периодической цепочки Тоды с интегральным источником.

Ключевые слова: цепочка Тоды, дискретный оператор Хилла, интегральный источник, обратная спектральная задача, формулы следов.

DOI: 10.4213/tmf8859

1. ВВЕДЕНИЕ

Цепочка Тоды [1]

$$\frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2} = e^{u_{n-1}-u_n} - e^{u_n-u_{n+1}}, \quad n \in \mathbb{Z},$$

описывающая динамику частиц на прямой с экспоненциальным взаимодействием, в переменных Флашке [2] имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{a}_n &= a_n(b_n - b_{n+1}), \\ \dot{b}_n &= 2(a_{n-1}^2 - a_n^2), \quad n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

В настоящей работе рассматривается N -периодическая цепочка Тоды с интегральным источником

$$\begin{aligned} \dot{a}_n &= a_n(b_n - b_{n+1}) + a_n \int_E \tilde{\theta}_{N+1}(\lambda, t) [\psi_{n+1}^-(\lambda, t) \psi_{n+1}^+(\lambda, t) - \psi_n^-(\lambda, t) \psi_n^+(\lambda, t)] d\lambda, \\ \dot{b}_n &= 2(a_{n-1}^2 - a_n^2) + a_n \int_E \tilde{\theta}_{N+1}(\lambda, t) [\psi_n^-(\lambda, t) \psi_{n+1}^+(\lambda, t) + \psi_{n+1}^-(\lambda, t) \psi_n^+(\lambda, t)] d\lambda - \\ &\quad - a_{n-1} \int_E \tilde{\theta}_{N+1}(\lambda, t) [\psi_n^-(\lambda, t) \psi_{n-1}^+(\lambda, t) + \psi_{n-1}^-(\lambda, t) \psi_n^+(\lambda, t)] d\lambda, \\ a_{n+N} &= a_n, \quad b_{n+N} = b_n, \quad n \in \mathbb{Z}, \end{aligned} \tag{1}$$

*Ургенчский государственный университет им. Аль-Хорезми, Ургенч, Узбекистан.
E-mail: a.murod@mail.ru

при начальных условиях

$$a_n(0) = a_n^0, \quad b_n(0) = b_n^0, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (2)$$

с заданными N -периодическими последовательностями $a_n^0, b_n^0, n \in \mathbb{Z}$. В системе (1) $\{a_n(t)\}_{-\infty}^{\infty}, \{b_n(t)\}_{-\infty}^{\infty}, \{\psi_n^{\pm}(\lambda, t)\}_{-\infty}^{\infty}$ – неизвестные функции, причем функции $\{\psi_n^{\pm}(\lambda, t)\}_{-\infty}^{\infty}$ являются решениями Флоке–Блоха для дискретного уравнения Хилла

$$(L(t)y)_n \equiv a_{n-1}y_{n-1} + b_n y_n + a_n y_{n+1} = \lambda y_n \quad (3)$$

и нормированы условиями

$$\psi_1^{\pm}(\lambda, t) = 1. \quad (4)$$

В системе (1) E – спектр оператора $L(0)$, а множитель $\tilde{\theta}_{N+1}(\lambda, t)$ определяется из равенства

$$\tilde{\theta}_{N+1}(\lambda, t) = \prod_{j=1}^{N-1} (\lambda - \mu_j(t)),$$

где $\mu_1(t), \mu_2(t), \dots, \mu_{N-1}(t)$ являются корнями уравнения $\theta_{N+1}(\lambda, t) = 0$. Здесь $\theta_n(\lambda, t), n \in \mathbb{Z}$, решение уравнения (3) при начальных условиях $\theta_0(\lambda, t) = 1, \theta_1(\lambda, t) = 0$.

В работах [2]–[4] показана интегрируемость цепочки Тоды методом обратной задачи рассеяния в классе быстроубывающих функций. Периодическая цепочка Тоды рассматривалась в работах [5]–[8].

В последнее время в связи с различными физическими приложениями большой интерес вызывают нелинейные эволюционные уравнения с самосогласованными источниками. Как правило, правая часть нелинейных эволюционных уравнений с самосогласованным источником, интегрируемых методом обратной задачи, состоит из линейных слагаемых, умноженных на интегральные члены от всех динамических переменных. Выбор самосогласованных источников диктуется с учетом возможности применения стандартной схемы Захарова–Шабата. А именно, берется изоспектральная деформация L -оператора скалярными произведениями его собственных функций, при этом нелинейное уравнение приобретает правую часть заданного вида, а формула для решения строится по схеме обратной спектральной задачи L -оператора. Эта схема хорошо известна с 1980-х годов и неоднократно применялась для изучения возмущения солитонных решений [9].

Интегрируемость уравнения Кортевега–де Фриза (КдФ) с самосогласованным источником в классе быстроубывающих функций показана в работе [10], а для цепочки Тоды – в работах [11]–[14]. Нелинейные уравнения с самосогласованным источником в классе периодических функций изучались в работе [15]. В работе [16] проинтегрировано уравнение КдФ с самосогласованным источником в классе периодических функций, аналогичный результат в случае периодической цепочки Тоды получен в работе [17].

В настоящей работе получено представление для решения задачи (1)–(4) в рамках обратной спектральной задачи для уравнения (3), а именно найден аналог системы уравнений Дубровина для спектральных параметров дискретного оператора $L(t)$.

Хорошо известно, что разрешимость системы уравнений Дубровина в терминах тета-функций в случае периодической цепочки Тоды без источника изучена в работах [6], [7]. В этих работах решение обратной задачи по спектральным данным уравнения (3) было сведено к проблеме обращения Якоби абелевых интегралов и выведены явные формулы в терминах тета-функций для коэффициентов дискретного оператора $L(t)$ и тем самым найдено решение цепочки Тоды без источника. Аналогичные результаты имеют место и для рассматриваемой в настоящей работе задачи. Это видно из примера применения основной теоремы настоящей работы в частном однозонном случае, который приведен в конце статьи. Для однозонного случая выписаны явные формулы для решения аналога системы уравнений Дубровина и тем самым цепочки Тоды с источником (1), которые выражаются в терминах эллиптических функций Якоби.

2. НЕОБХОДИМЫЕ СВЕДЕНИЯ О ПРЯМОЙ И ОБРАТНОЙ СПЕКТРАЛЬНЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ ДИСКРЕТНОГО УРАВНЕНИЯ ХИЛЛА

Рассмотрим дискретное уравнение Хилла [3], [11]

$$\begin{aligned}(Ly)_n &\equiv a_{n-1}y_{n-1} + b_n y_n + a_n y_{n+1} = \lambda y_n, \\ a_{n+N} &= a_n, \quad b_{n+N} = b_n, \quad n \in \mathbb{Z},\end{aligned}\tag{5}$$

со спектральным параметром λ и периодом $N > 0$. Обозначим как $\theta_n(\lambda)$ и $\varphi_n(\lambda)$, $n \in \mathbb{Z}$, решения уравнения (5) при начальных условиях

$$\theta_0(\lambda) = 1, \quad \theta_1(\lambda) = 0, \quad \varphi_0(\lambda) = 0, \quad \varphi_1(\lambda) = 1.$$

Для решений $\theta_n(\lambda)$ и $\varphi_n(\lambda)$ справедливы представления

$$\begin{aligned}\theta_n(\lambda) &= -a_0 \left(\prod_{j=1}^{n-1} a_j \right)^{-1} \left\{ \lambda^{n-2} - \left(\sum_{j=2}^{n-1} b_j \right) \lambda^{n-3} + \right. \\ &\quad \left. + \left[\frac{1}{2} \left(\sum_{j=2}^{n-1} b_j \right)^2 - \frac{1}{2} \sum_{j=2}^{n-1} b_j^2 - \sum_{j=2}^{n-2} a_j^2 \right] \lambda^{n-4} + \dots \right\}, \\ \varphi_n(\lambda) &= \left(\prod_{j=1}^{n-1} a_j \right)^{-1} \left\{ \lambda^{n-1} - \left(\sum_{j=1}^{n-1} b_j \right) \lambda^{n-2} + \right. \\ &\quad \left. + \left[\frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^{n-1} b_j \right)^2 - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n-1} b_j^2 - \sum_{j=1}^{n-2} a_j^2 \right] \lambda^{n-3} + \dots \right\}.\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}\Delta^2(\lambda) - 4 &= \left(\prod_{j=1}^N a_j \right)^{-2} \left\{ \lambda^{2N} - 2 \left(\sum_{j=1}^N b_j \right) \lambda^{2N-1} + \right. \\ &\quad \left. + \left[2 \left(\sum_{j=1}^N b_j \right)^2 - \sum_{j=1}^N b_j^2 - 2 \sum_{j=1}^N a_j^2 \right] \lambda^{2N-2} + \dots \right\}, \\ \theta_{N+1}(\lambda) &= -a_0 \left(\prod_{j=1}^N a_j \right)^{-1} \left\{ \lambda^{N-1} - \left(\sum_{j=2}^N b_j \right) \lambda^{N-2} + \right. \\ &\quad \left. + \left[\frac{1}{2} \left(\sum_{j=2}^N b_j \right)^2 - \frac{1}{2} \sum_{j=2}^N b_j^2 - \sum_{j=2}^{N-1} a_j^2 \right] \lambda^{N-3} + \dots \right\},\end{aligned}$$

где $\Delta(\lambda) = \theta_N(\lambda) + \varphi_{N+1}(\lambda)$.

Обозначим через $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{2N}$ корни уравнения $\Delta^2(\lambda) - 4 = 0$, а через $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{N-1}$ — корни уравнения $\theta_{N+1}(\lambda) = 0$. Как известно (см. [3]), все λ_i , $i = 1, 2, \dots, 2N$, и μ_j , $j = 1, 2, \dots, N-1$, являются действительными, корни μ_j простые, а среди корней λ_i могут встречаться двукратные. Нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned}\Delta^2(\lambda) - 4 &= \left(\prod_{j=1}^N a_j \right)^{-2} \prod_{j=1}^{2N} (\lambda - \lambda_j), \\ \theta_{N+1}(\lambda) &= -a_0 \left(\prod_{j=1}^N a_j \right)^{-1} \prod_{j=1}^{N-1} (\lambda - \mu_j).\end{aligned}\tag{6}$$

Спектр оператора L совпадает с множеством

$$E = \{\lambda \in \mathbb{R}: -2 \leq \Delta(\lambda) \leq 2\} = [\lambda_1, \lambda_2] \cup \dots \cup [\lambda_{2N-1}, \lambda_{2N}].$$

Введем обозначение

$$\sigma_j = \operatorname{sgn}[\theta_N(\mu_j) - \varphi_{N+1}(\mu_j)], \quad j = 1, 2, \dots, N-1.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Набор чисел μ_j и последовательности знаков σ_j , $j = 1, 2, \dots, N-1$, называются *спектральными параметрами дискретного уравнения Хилла* (5).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Набор спектральных параметров $\{\mu_j, \sigma_j\}_{j=1}^{N-1}$ и чисел λ_i , $i = 1, 2, \dots, 2N$, называется *спектральными данными дискретного уравнения Хилла* (5).

Нахождение спектральных данных и изучение их свойств представляет собой прямую спектральную задачу для дискретного уравнения Хилла. Восстановление коэффициентов a_n , b_n уравнения Хилла по его спектральным данным называется обратной спектральной задачей для уравнения (5).

Справедлива следующая лемма.

ЛЕММА 1. *Имеют место равенства*

$$\begin{aligned}
 b_1 &= \frac{\lambda_1 + \lambda_{2N}}{2} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N-1} (\lambda_{2j} + \lambda_{2j+1} - 2\mu_j), \\
 a_0^2 &= \frac{\lambda_1^2 + \lambda_{2N}^2}{8} + \frac{1}{8} \sum_{j=1}^{N-1} (\lambda_{2j}^2 + \lambda_{2j+1}^2 - 2\mu_j^2) - \\
 &\quad - \frac{1}{4} \left[\frac{\lambda_1 + \lambda_{2N}}{2} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N-1} (\lambda_{2j} + \lambda_{2j+1} - 2\mu_j) \right]^2 - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N-1} \frac{\sigma_j \sqrt{\prod_{i=1}^{2N} (\mu_j - \lambda_i)}}{\prod_{i=1, i \neq j}^{N-1} (\mu_j - \mu_i)}, \quad (7) \\
 a_1^2 &= \frac{\lambda_1^2 + \lambda_{2N}^2}{8} + \frac{1}{8} \sum_{j=1}^{N-1} (\lambda_{2j}^2 + \lambda_{2j+1}^2 - 2\mu_j^2) - \\
 &\quad - \frac{1}{4} \left[\frac{\lambda_1 + \lambda_{2N}}{2} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N-1} (\lambda_{2j} + \lambda_{2j+1} - 2\mu_j) \right]^2 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N-1} \frac{\sigma_j \sqrt{\prod_{i=1}^{2N} (\mu_j - \lambda_i)}}{\prod_{i=1, i \neq j}^{N-1} (\mu_j - \mu_i)}.
 \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство равенства (7) имеется в работе [17].

Для определения коэффициентов $a_n, b_n, n \in \mathbb{Z}$, произведем сдвиг индексов в уравнении (5) на целое число k , т. е. рассмотрим следующее уравнение:

$$a_{n+k-1}y_{n-1} + b_{n+k}y_n + a_{n+k}y_{n+1} = \lambda y_n, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (8)$$

Для этого уравнения формулы следов (7) примут вид

$$\begin{aligned}
 b_{k+1} &= \frac{\lambda_1 + \lambda_{2N}}{2} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N-1} (\lambda_{2j} + \lambda_{2j+1} - 2\mu_{j,k}), \\
 a_k^2 &= \frac{\lambda_1^2 + \lambda_{2N}^2}{8} + \frac{1}{8} \sum_{j=1}^{N-1} (\lambda_{2j}^2 + \lambda_{2j+1}^2 - 2\mu_{j,k}^2) - \\
 &\quad - \frac{1}{4} \left[\frac{\lambda_1 + \lambda_{2N}}{2} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N-1} (\lambda_{2j} + \lambda_{2j+1} - 2\mu_{j,k}) \right]^2 - \\
 &\quad - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N-1} \frac{\sigma_{j,k} \sqrt{\prod_{i=1}^{2N} (\mu_{j,k} - \lambda_i)}}{\prod_{i=1, i \neq j}^{N-1} (\mu_{j,k} - \mu_{i,k})}, \quad (9)
 \end{aligned}$$

где $\mu_{j,k}, j = 1, 2, \dots, N-1$, – корни уравнения $\theta_{N+1,k}(\lambda) = 0$. Здесь $\theta_{n,k}(\lambda), n \in \mathbb{Z}$, – решение уравнения (8), удовлетворяющее начальному условию $\theta_{0,k}(\lambda) = 1, \theta_{1,k}(\lambda) = 0$.

Непосредственной проверкой доказывается следующая лемма.

ЛЕММА 2. Пусть функции $\{x_n(\lambda)\}_{-\infty}^{\infty}$ и $\{y_n(\mu)\}_{-\infty}^{\infty}$ являются решениями уравнений $Lx = \lambda x$ и $Ly = \mu y$ соответственно. Тогда справедливо равенство

$$(\lambda - \mu)x_n(\lambda)y_n(\mu) = W\{x_n(\lambda), y_n(\mu)\} - W\{x_{n-1}(\lambda), y_{n-1}(\mu)\}, \quad n \in \mathbb{Z},$$

где $W\{x_n(\lambda), y_n(\mu)\} = a_n[x_n(\lambda)y_{n+1}(\mu) - x_{n+1}(\lambda)y_n(\mu)]$.

3. ЭВОЛЮЦИЯ СПЕКТРАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ

В этом разделе доказан основной результат настоящей работы.

ТЕОРЕМА 1. Если функции $a_n(t)$, $b_n(t)$, $\psi_n^\pm(\lambda, t)$, $n \in \mathbb{Z}$, являются решением задачи (1)–(4), то спектр дискретного оператора Хилла (3) не зависит от t , а спектральные параметры $\mu_j(t)$, $j = 1, 2, \dots, N-1$, удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$\dot{\mu}_j(t) = \frac{2\sigma_j(t)\sqrt{\prod_{k=1}^{2N}(\mu_j(t) - \lambda_k(t))}}{\prod_{k=1, k \neq j}^{N-1}(\mu_j(t) - \mu_k(t))} \left\{ 1 - \int_E \tilde{\theta}_{N+1}(\lambda, t) \frac{1}{\lambda - \mu_j(t)} d\lambda \right\}. \quad (10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $y^j(t) = (y_0^j(t), y_1^j(t), \dots, y_N^j(t))^T$, $j = 1, 2, \dots, N-1$, нормированные собственные вектор-функции, соответствующие собственным значениям $\lambda = \mu_j(t)$, $j = 1, 2, \dots, N-1$, следующей граничной задачи:

$$\begin{aligned} (L(t)y)_n &\equiv a_{n-1}y_{n-1} + b_n y_n + a_n y_{n+1} = \lambda y_n, & 1 \leq n \leq N, \\ y_1 &= 0, & y_{N+1} = 0. \end{aligned}$$

Дифференцируя тождество

$$L(t)y^j = \mu_j(t)y^j$$

по t , имеем

$$\dot{L}(t)y^j + L(t)\dot{y}^j = \dot{\mu}_j(t)y^j + \mu_j(t)\dot{y}^j. \quad (11)$$

Умножая обе части (11) скалярно на y^j , выводим равенство

$$(\dot{L}(t)y^j, y^j) + (L(t)\dot{y}^j, y^j) = \dot{\mu}_j(t) + \mu_j(t)(\dot{y}^j, y^j). \quad (12)$$

Учитывая равенства

$$\begin{aligned} (L(t)\dot{y}^j, y^j) &= \sum_{n=1}^N [a_{n-1}(t)\dot{y}_{n-1}^j y_n^j + b_n(t)\dot{y}_n^j y_n^j + a_n(t)\dot{y}_{n+1}^j y_n^j] = \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} a_n(t)y_{n+1}^j \dot{y}_n^j + \sum_{n=2}^{N+1} a_{n-1}(t)y_{n-1}^j \dot{y}_n^j + \sum_{n=1}^N b_n(t)y_n^j \dot{y}_n^j = \\ &= \sum_{n=1}^N a_n(t)y_{n+1}^j \dot{y}_n^j + \sum_{n=1}^N a_{n-1}(t)y_{n-1}^j \dot{y}_n^j + \sum_{n=1}^N b_n(t)y_n^j \dot{y}_n^j = \mu_j(t)(\dot{y}^j, y^j), \end{aligned}$$

из (12) заключаем, что

$$\dot{\mu}_j(t) = \sum_{n=1}^N [\dot{a}_{n-1}(t)y_{n-1}^j y_n^j + \dot{b}_n(t)(y_n^j)^2 + \dot{a}_n(t)y_{n+1}^j y_n^j].$$

Следовательно,

$$\dot{\mu}_j(t) = \sum_{n=1}^N [2\dot{a}_n(t)y_n^j y_{n+1}^j + \dot{b}_n(t)(y_n^j)^2]. \quad (13)$$

На основании (1) последнее равенство можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \dot{\mu}_j(t) = & \sum_{n=1}^N [2a_n(b_n - b_{n+1})y_n^j y_{n+1}^j + 2(a_{n-1}^2 - a_n^2)(y_n^j)^2] + \\ & + \sum_{n=1}^N \left\{ 2a_n \int_E \tilde{\theta}_{N+1}(\lambda, t) [\psi_{n+1}^-(\lambda, t) \psi_{n+1}^+(\lambda, t) - \psi_n^-(\lambda, t) \psi_n^+(\lambda, t)] d\lambda \right\} y_n^j y_{n+1}^j + \\ & + \sum_{n=1}^N \left\{ a_n \int_E \tilde{\theta}_{N+1}(\lambda, t) [\psi_n^-(\lambda, t) \psi_{n+1}^+(\lambda, t) + \psi_{n+1}^-(\lambda, t) \psi_n^+(\lambda, t)] d\lambda \right\} (y_n^j)^2 - \\ & - \sum_{n=1}^N \left\{ a_{n-1} \int_E \tilde{\theta}_{N+1}(\lambda, t) [\psi_n^-(\lambda, t) \psi_{n-1}^+(\lambda, t) + \psi_{n-1}^-(\lambda, t) \psi_n^+(\lambda, t)] d\lambda \right\} (y_n^j)^2. \quad (14) \end{aligned}$$

Для удобства введем обозначение

$$\begin{aligned} F^j(\lambda, t) = & \sum_{n=1}^N \{ 2a_n [\psi_{n+1}^-(\lambda, t) \psi_{n+1}^+(\lambda, t) - \psi_n^-(\lambda, t) \psi_n^+(\lambda, t)] \} y_n^j y_{n+1}^j + \\ & + \sum_{n=1}^N \{ a_n [\psi_n^-(\lambda, t) \psi_{n+1}^+(\lambda, t) + \psi_{n+1}^-(\lambda, t) \psi_n^+(\lambda, t)] \} (y_n^j)^2 - \\ & - \sum_{n=1}^N \{ a_{n-1} [\psi_n^-(\lambda, t) \psi_{n-1}^+(\lambda, t) + \psi_{n-1}^-(\lambda, t) \psi_n^+(\lambda, t)] \} (y_n^j)^2. \end{aligned}$$

Тогда равенство (14) примет вид

$$\begin{aligned} \dot{\mu}^j(t) = & \sum_{n=1}^N (2a_n b_n y_n^j y_{n+1}^j - 2a_n b_{n+1} y_n^j y_{n+1}^j) + \\ & + \sum_{n=1}^N 2(a_{n-1}^2 - a_n^2)(y_n^j)^2 + \int_E \tilde{\theta}_{N+1}(\lambda, t) F^j(\lambda, t) d\lambda. \end{aligned}$$

После несложных вычислений из последнего равенства получим

$$\begin{aligned} \dot{\mu}_j(t) = & \sum_{n=1}^N [2a_n(\mu_j(t)y_n^j - a_{n-1}y_{n-1}^j - a_n y_{n+1}^j)y_{n+1}^j - \\ & - 2a_n(\mu_j(t)y_{n+1}^j - a_n y_n^j - a_{n+1}y_{n+2}^j)y_n^j] + \\ & + \sum_{n=1}^N 2(a_{n-1}^2 - a_n^2)(y_n^j)^2 + \int_E \tilde{\theta}_{N+1}(\lambda, t) F^j(\lambda, t) d\lambda = \\ = & \sum_{n=1}^{N-1} 2(-a_{n-1}a_n y_{n-1}^j y_{n+1}^j - a_n^2 (y_{n+1}^j)^2) + \\ & + \sum_{n=1}^N 2(a_n^2 (y_n^j)^2 + a_n a_{n+1} y_{n+2}^j y_n^j) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{n=1}^N 2(a_{n-1}^2 - a_n^2)(y_n^j)^2 + \int_E \tilde{\theta}_{N+1}(\lambda, t) F^j(\lambda, t) d\lambda = \\
& = 2a_0^2[(y_0^j)^2 - (y_N^j)^2] + \int_E \tilde{\theta}_{N+1}(\lambda, t) F^j(\lambda, t) d\lambda.
\end{aligned} \tag{15}$$

С учетом выражения для $F^j(\lambda, t)$ получим

$$\begin{aligned}
F^j(\lambda, t) &= \sum_{n=1}^N a_n \psi_{n+1}^-(\lambda, t) \psi_{n+1}^+(\lambda, t) y_n^j y_{n+1}^j - \sum_{n=1}^N a_n \psi_n^-(\lambda, t) \psi_{n+1}^+(\lambda, t) (y_{n+1}^j)^2 + \\
&+ \sum_{n=1}^N a_n \psi_{n+1}^-(\lambda, t) \psi_{n+1}^+(\lambda, t) y_n^j y_{n+1}^j - \sum_{n=1}^N a_n \psi_{n+1}^-(\lambda, t) \psi_n^+(\lambda, t) (y_{n+1}^j)^2 + \\
&+ \sum_{n=1}^N a_n \psi_n^-(\lambda, t) \psi_{n+1}^+(\lambda, t) (y_n^j)^2 - \sum_{n=1}^N a_n \psi_n^-(\lambda, t) \psi_n^+(\lambda, t) y_{n+1}^j y_n^j + \\
&+ \sum_{n=1}^N a_n \psi_{n+1}^-(\lambda, t) \psi_n^+(\lambda, t) (y_n^j)^2 - \sum_{n=1}^N a_n \psi_n^-(\lambda, t) \psi_n^+(\lambda, t) y_{n+1}^j y_n^j = \\
&= \sum_{n=1}^N a_n (\psi_{n+1}^+(\lambda, t) y_n^j - \psi_n^+(\lambda, t) y_{n+1}^j) \psi_n^-(\lambda, t) y_n^j + \\
&+ \sum_{n=1}^N a_n (\psi_{n+1}^+(\lambda, t) y_n^j - \psi_n^+(\lambda, t) y_{n+1}^j) \psi_{n+1}^-(\lambda, t) y_{n+1}^j + \\
&+ \sum_{n=1}^N a_n (\psi_{n+1}^-(\lambda, t) y_n^j - \psi_n^-(\lambda, t) y_{n+1}^j) \psi_n^+(\lambda, t) y_n^j + \\
&+ \sum_{n=1}^N a_n (\psi_{n+1}^-(\lambda, t) y_n^j - \psi_n^-(\lambda, t) y_{n+1}^j) \psi_{n+1}^+(\lambda, t) y_{n+1}^j = \\
&= \sum_{n=1}^N T_n \psi_n^-(\lambda, t) y_n^j + \sum_{n=1}^N T_n \psi_{n+1}^-(\lambda, t) y_{n+1}^j + \\
&+ \sum_{n=1}^N W_n \psi_n^+(\lambda, t) y_n^j + \sum_{n=1}^N W_n \psi_{n+1}^+(\lambda, t) y_{n+1}^j = \\
&= \sum_{n=1}^N \psi_{n+1}^-(\lambda, t) y_{n+1}^j (T_{n+1} + T_n) + \sum_{n=1}^N \psi_{n+1}^+(\lambda, t) y_{n+1}^j (W_{n+1} + W_n) = \\
&= \sum_{n=1}^N \frac{1}{\lambda - \mu_j(t)} (W_{n+1} - W_n) (T_{n+1} + T_n) + \\
&+ \sum_{n=1}^N \frac{1}{\lambda - \mu_j(t)} (T_{n+1} - T_n) (W_{n+1} + W_n) = \\
&= \frac{2}{\lambda - \mu_j(t)} \sum_{n=1}^N (W_{n+1} T_{n+1} - W_n T_n) = \frac{2}{\lambda - \mu_j(t)} (W_{N+1} T_{N+1} - W_1 T_1), \tag{16}
\end{aligned}$$

где $T_n = a_n(\psi_{n+1}^+(\lambda, t)y_n^j - \psi_n^+(\lambda, t)y_{n+1}^j)$ и $W_n = a_n(\psi_{n+1}^-(\lambda, t)y_n^j - \psi_n^-(\lambda, t)y_{n+1}^j)$. Нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} W_{N+1}T_{N+1} &= a_{N+1}(\psi_{N+2}^-(\lambda, t)y_{N+1}^j - \psi_{N+1}^-(\lambda, t)y_{N+2}^j) \times \\ &\quad \times a_{N+1}(\psi_{N+2}^+(\lambda, t)y_{N+1}^j - \psi_{N+1}^+(\lambda, t)y_{N+2}^j) = \\ &= (-\psi_{N+1}^-(\lambda, t)a_{N+1}y_{N+2}^j)(-\psi_{N+1}^+(\lambda, t)a_{N+1}y_{N+2}^j) = \\ &= (-\psi_{N+1}^-(\lambda, t)a_{N+1}y_{N+2}^j)(-\psi_{N+1}^+(\lambda, t)a_{N+1}y_{N+2}^j) = \\ &= \psi_{N+1}^-(\lambda, t)a_N y_N^j \psi_{N+1}^+(\lambda, t)a_N y_N^j = \\ &= a_N (y_N^j)^2 \psi_{N+1}^-(\lambda, t) \psi_{N+1}^+(\lambda, t) = a_N (y_N^j)^2, \end{aligned} \quad (17)$$

и $W_1T_1 = a_0^2(y_0^j)^2$. Таким образом, согласно (16) получим

$$F^j(\lambda, t) = \frac{2a_0^2}{\lambda - \mu_j(t)} [(y_N^j)^2 - (y_0^j)^2]. \quad (18)$$

Подставляя (18) в (15), выводим

$$\begin{aligned} \dot{\mu}_j(t) &= 2a_0^2[(y_0^j)^2 - (y_N^j)^2] + \int_E \tilde{\theta}_{N+1}(\lambda, t) \frac{2a_0^2}{\lambda - \mu_j(t)} [(y_N^j)^2 - (y_0^j)^2] d\lambda = \\ &= -2a_0^2[(y_N^j)^2 - (y_0^j)^2] \left\{ 1 - \int_E \tilde{\theta}_{N+1}(\lambda, t) \frac{1}{\lambda - \mu_j(t)} d\lambda \right\}. \end{aligned} \quad (19)$$

С учетом равенств

$$\begin{aligned} \|\theta^j\|^2 &= \sum_{n=1}^N (\theta_n^j)^2 = a_N \theta_N^j (\theta_{N+1}^j)'|_{\lambda=\mu_j}, \quad (\theta^j)' = \frac{d\theta^j}{d\lambda}, \\ (y_0^j)^2 &= \frac{(\theta_0^j)^2}{\|\theta^j\|^2}, \quad (y_N^j)^2 = \frac{(\theta_N^j)^2}{\|\theta^j\|^2} \end{aligned}$$

уравнение (19) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \dot{\mu}_j(t) &= -2a_0 \left(\theta_N^j(\mu_j(t), t) - \frac{1}{\theta_N^j(\mu_j(t), t)} \right) \frac{1}{(\theta_{N+1}^j)'|_{\lambda=\mu_j(t)}} \times \\ &\quad \times \left\{ 1 - \int_E \tilde{\theta}_{N+1}(\lambda, t) \frac{1}{\lambda - \mu_j(t)} d\lambda \right\}. \end{aligned} \quad (20)$$

Используя равенство

$$\theta_N(\lambda, t) \varphi_{N+1}(\lambda, t) - \theta_{N+1}(\lambda, t) \varphi_N(\lambda, t) = 1,$$

имеем

$$\begin{aligned} \Delta^2(\mu_j(t)) - 4 &= [\theta_N^j(\mu_j(t), t) - \varphi_{N+1}^j(\mu_j(t), t)]^2 + 4\theta_N^j(\mu_j(t), t) \varphi_{N+1}^j(\mu_j(t), t) - 4 = \\ &= [\theta_N^j(\mu_j(t), t) - \varphi_{N+1}^j(\mu_j(t), t)]^2 = \left(\theta_N^j(\mu_j(t), t) - \frac{1}{\theta_N^j(\mu_j(t), t)} \right)^2. \end{aligned}$$

Отсюда находим

$$\theta_N^j(\mu_j(t), t) - \frac{1}{\theta_N^j(\mu_j(t), t)} = \sigma_j(t) \sqrt{\Delta^2(\mu_j(t)) - 4}, \quad (21)$$

где

$$\sigma_j(t) = \operatorname{sgn} \left(\theta_N^j(\mu_j(t), t) - \frac{1}{\theta_N^j(\mu_j(t), t)} \right), \quad j = 1, 2, \dots, N-1.$$

Из разложений (6) следует

$$\Delta^2(\lambda) - 4 = \left(\prod_{k=1}^N a_k \right)^{-2} \prod_{k=1}^{2N} (\lambda - \lambda_k), \quad (22)$$

$$\theta_{N+1}(\lambda, t) = -a_0 \left(\prod_{j=1}^N a_j \right)^{-1} \prod_{k=1}^{N-1} (\lambda - \mu_k(t)). \quad (23)$$

Дифференцируя разложение (23) по λ и полагая $\lambda = \mu_j(t)$, имеем

$$\theta'_{N+1}(\lambda)|_{\lambda=\mu_j(t)} = -a_0 \left(\prod_{k=1}^N a_k \right)^{-1} \prod_{k=1, k \neq j}^{N-1} (\mu_j(t) - \mu_k(t)). \quad (24)$$

Подставляя (21), (22) и (24) в (20), получим равенство (10).

Теперь покажем, что $\lambda_k(t)$ не зависит от t . Пусть $\{g_n^k(t)\}$ – нормированная собственная функция оператора $L(t)$, соответствующая собственному значению $\lambda_k(t)$, $k = 1, 2, \dots, 2N$, т. е.

$$a_{n-1}g_{n-1}^k + b_n g_n^k + a_n g_{n+1}^k = \lambda_k g_n^k.$$

Дифференцируя это равенство по t , умножая на g_n^k и суммируя по n , получим

$$\frac{d\lambda_k}{dt} = \sum_{n=1}^N (2\dot{a}_n(t)g_n^k g_{n+1}^k + \dot{b}_n(t)(g_n^k)^2). \quad (25)$$

Используя уравнения (1), равенство (25) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda_k}{dt} &= \sum_{n=1}^N (2a_n b_n g_n^k g_{n+1}^k - 2a_n b_{n+1} g_n^k g_{n+1}^k) + \sum_{n=1}^N 2(a_{n-1}^2 - a_n^2)(g_n^k)^2 + \\ &+ \int_E \tilde{\theta}_{N+1}(\lambda, t) G^k(\lambda, t) d\lambda, \end{aligned} \quad (26)$$

где

$$\begin{aligned} G^k(\lambda, t) &= \sum_{n=1}^N \{2a_n [\psi_{n+1}^-(\lambda, t) \psi_{n+1}^+(\lambda, t) - \psi_n^-(\lambda, t) \psi_n^+(\lambda, t)]\} g_n^k g_{n+1}^k + \\ &+ \sum_{n=1}^N \{a_n [\psi_n^-(\lambda, t) \psi_{n+1}^+(\lambda, t) + \psi_{n+1}^-(\lambda, t) \psi_n^+(\lambda, t)]\} (g_n^k)^2 - \\ &- \sum_{n=1}^N \{a_{n-1} [\psi_n^-(\lambda, t) \psi_{n-1}^+(\lambda, t) + \psi_{n-1}^-(\lambda, t) \psi_n^+(\lambda, t)]\} (g_n^k)^2. \end{aligned}$$

Используя (3), преобразуем правую часть равенства (26):

$$\begin{aligned}
 \frac{d\lambda_k}{dt} &= \sum_{n=1}^N \{ 2a_n [\lambda_k(t)g_n^k - a_{n-1}g_{n-1}^k - a_n g_{n+1}^k] g_{n+1}^k - \\
 &\quad - 2a_n [\lambda_k(t)g_{n+1}^k - a_n g_n^k - a_{n+1}g_{n+2}^k] g_n^k \} + \\
 &\quad + \sum_{n=1}^N 2(a_{n-1}^2 - a_n^2)(g_n^k)^2 + \int_E \tilde{\theta}_{N+1}(\lambda, t) G^k(\lambda, t) d\lambda = \\
 &= \sum_{n=1}^N 2[-a_{n-1}a_n g_{n-1}^k g_{n+1}^k - a_n^2 (g_{n+1}^k)^2] + \sum_{n=1}^N 2[a_n^2 (g_n^k)^2 + a_n a_{n+1} g_{n+2}^k g_n^k] + \\
 &\quad + \sum_{n=1}^N 2(a_{n-1}^2 - a_n^2)(g_n^k)^2 + \int_E \tilde{\theta}_{N+1}(\lambda, t) G^k(\lambda, t) d\lambda = \\
 &= -\sum_{n=1}^N 2a_{n-1}a_n g_{n-1}^k g_{n+1}^k + \sum_{n=2}^{N+2} 2a_{n-1}a_n g_{n-1}^k g_{n+1}^k - \\
 &\quad - \sum_{n=2}^{N+1} 2a_{n-1}^2 (g_n^k)^2 + \sum_{n=1}^N 2a_{n-1}^2 (g_n^k)^2 + \int_E \theta_{N+1}(\lambda, t) G^k(\lambda, t) d\lambda = \\
 &= \int_E \tilde{\theta}_{N+1}(\lambda, t) G^k(\lambda, t) d\lambda.
 \end{aligned} \tag{27}$$

Пусть $\lambda \neq \lambda_k$, тогда согласно лемме 2

$$G^k(\lambda, t) = \frac{2a_0^2}{\lambda - \lambda_k} [(g_N^k)^2 - (g_0^k)^2] = 0. \tag{28}$$

При $\lambda = \lambda_k$ легко заметить, что $G^k(\lambda, t) = 0$. Согласно (27) и (28) имеем $\dot{\lambda}_k(t) = 0$. Таким образом, из равенства (24) и независимости от t собственных значений $\lambda_k(t)$ следует доказательство теоремы. Теорема доказана.

Дополним этот результат следующей теоремой.

ТЕОРЕМА 2. *Дискретное уравнение Хилла (5) однозначно восстанавливается по своим спектральным данным.*

Это довольно известный результат, но здесь мы представим другой метод решения обратной задачи, который более удобен для численного моделирования.

Пусть $\theta_{n,k}(\lambda)$ и $\varphi_{n,k}(\lambda)$ – решения уравнения (8) при следующих начальных условиях:

$$\theta_{0,k}(\lambda) = 1, \quad \theta_{1,k}(\lambda) = 0; \quad \varphi_{0,k}(\lambda) = 0, \quad \varphi_{1,k}(\lambda) = 1.$$

Легко проверить, что справедливы равенства

$$\begin{aligned}
 \theta_{n,k}(\lambda) &= \frac{a_k}{a_0} [\varphi_{k+1}(\lambda)\theta_{n+k}(\lambda) - \theta_{k+1}(\lambda)\varphi_{n+k}(\lambda)], \\
 \varphi_{n,k}(\lambda) &= \frac{a_k}{a_0} [-\varphi_k(\lambda)\theta_{n+k}(\lambda) + \theta_k(\lambda)\varphi_{n+k}(\lambda)].
 \end{aligned} \tag{29}$$

Используя (29) и периодичность a_n, b_n , можно легко вывести следующие равенства:

$$\begin{aligned}\theta_{N+1,k+1}(\lambda) &= \frac{a_{k+1}}{a_0} \{ \theta_{N+1}(\lambda) \varphi_{k+2}^2(\lambda) + [\theta_N(\lambda) - \varphi_{N+1}(\lambda)] \theta_{k+2}(\lambda) \varphi_{k+2}(\lambda) - \\ &\quad - \varphi_N(\lambda) \theta_{k+2}^2(\lambda) \}, \\ \varphi_{N,k}(\lambda) &= \frac{a_k}{a_0} \{ -\theta_{N+1}(\lambda) \varphi_k^2(\lambda) - [\theta_N(\lambda) - \varphi_{N+1}(\lambda)] \theta_k(\lambda) \varphi_k(\lambda) + \\ &\quad + \varphi_N(\lambda) \theta_k^2(\lambda) \}.\end{aligned}\quad (30)$$

Вспоминая, что $\varphi_n(\lambda)$ и $\theta_n(\lambda)$ – решения уравнения (3), из равенств (30) получим

$$\begin{aligned}\theta_{N+1,k+1} &= \frac{(\lambda - b_{k+1})^2}{a_k a_{k+1}} \theta_{N+1,k} - \frac{2(\lambda - b_{k+1})}{a_{k+1}} (\theta_{N,k} - \varphi_{N+1,k}) - \frac{a_k}{a_{k+1}} \varphi_{N,k}, \\ \theta_{N,k+1}(\lambda) - \varphi_{N+1,k+1}(\lambda) &= \frac{2(\lambda - b_{k+1})}{a_k} \theta_{N+1,k}(\lambda) - (\theta_{N,k}(\lambda) - \varphi_{N+1,k}(\lambda)).\end{aligned}\quad (31)$$

Используя равенства

$$\begin{aligned}[u_{N,k}(\lambda) - \nu_{N+1,k}(\lambda)]^2 &= [u_{N,k}(\lambda) + \nu_{N+1,k}(\lambda)]^2 - 4u_{N,k}(\lambda) \nu_{N+1,k}(\lambda), \\ \theta_{N,k}(\lambda) \varphi_{N+1,k}(\lambda) - \varphi_{N,k}(\lambda) \theta_{N+1,k}(\lambda) &= 1,\end{aligned}$$

получим

$$[\theta_{N,k}(\lambda) - \varphi_{N+1,k}(\lambda)]^2 + 4\varphi_{N,k}(\lambda) \theta_{N+1,k}(\lambda) = \Delta^2(\lambda) - 4. \quad (32)$$

На основании равенств (6) заключаем, что справедливы следующие разложения:

$$\begin{aligned}\theta_{N+1,k}(\lambda) &= -a_k \left(\prod_{j=1}^N a_{j+k} \right)^{-1} \left(\prod_{j=1}^{N-1} (\lambda - \mu_{j,k}) \right), \\ \varphi_{N,k}(\lambda) &= -\frac{a_k}{a_{k-1}} \theta_{N+1,k-1} = a_k \left(\prod_{j=1}^N a_{j+k-1} \right)^{-1} \left(\prod_{j=1}^{N-1} (\lambda - \mu_{j,k-1}) \right).\end{aligned}\quad (33)$$

Согласно равенству (32) имеем

$$\begin{aligned}[\theta_{N,k}(\lambda) - \varphi_{N+1,k}(\lambda)]|_{\lambda=\mu_{j,k}} &= \sigma_{j,k} \sqrt{\Delta^2(\mu_{j,k}) - 4}, \\ \sigma_{j,k} &= \operatorname{sgn}[\theta_{N,k}(\mu_{j,k}) - \varphi_{N+1,k}(\mu_{j,k})].\end{aligned}$$

Введем следующие обозначения:

$$R(\lambda) = \prod_{j=1}^{2N} (\lambda - \lambda_j), \quad (34)$$

$$S_k(\lambda) = \prod_{j=1}^{N-1} (\lambda - \mu_{j,k}), \quad (35)$$

$$Q_k(\lambda) = \frac{\varphi_{N+1,k}(\lambda) - \theta_{N,k}(\lambda)}{A}, \quad (36)$$

где $A = \prod_{j=1}^N a_j$. Из равенств (33) легко вывести следующую формулу:

$$Q_k(\lambda) = (\lambda - b_{k+1})S_k(\lambda) + S_k(\lambda) \sum_{j=1}^{N-1} \frac{Q_k(\mu_{j,k})}{S'_k(\mu_{j,k})(\lambda - \mu_{j,k})}, \quad (37)$$

где

$$Q_k(\mu_{j,k}) = \tau_{j,k} \sqrt{R(\mu_{j,k})}, \quad \tau_{j,k} = \operatorname{sgn} Q_k(\mu_{j,k}). \quad (38)$$

Из (31), (32) с учетом (34)–(36) имеем

$$Q_k^2(\lambda) = R(\lambda) + 4a_k^2 S_{k-1}(\lambda) S_k(\lambda), \quad (39)$$

$$S_{k+1}(\lambda) = \frac{a_k^2}{a_{k+1}} S_{k-1}(\lambda) - \frac{\lambda - b_{k+1}}{a_{k+1}^2} Q_k(\lambda) + \frac{(\lambda - b_{k+1})^2}{a_{k+1}^2} S_k(\lambda), \quad (40)$$

$$Q_{k+1}(\lambda) = 2(\lambda - b_{k+1})S_k(\lambda) - Q_k(\lambda). \quad (41)$$

Таким образом, мы получили алгоритм решения обратной задачи для дискретного уравнения Хилла.

Нам дана система спектральных параметров $\{\mu_j, \sigma_j\}_{j=1}^{N-1}$ и числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{2N}$.

1. С помощью соотношений (7) определим b_1, a_0, a_1 .
2. Положим $\sigma_{j,0} = \sigma_j, \mu_{j,0} = \mu_j, j = 1, 2, \dots, N-1$.
3. Из равенств (34), (35) и (38) находим $R(\lambda), S_0(\lambda)$ и $Q_0(\mu_{j,0})$.
4. Используя (37), построим $Q_0(\lambda)$.
5. Из равенства (39) найдем $S_{-1}(\lambda)$.
6. Определим многочлен $S_1(\lambda)$ из (40) и найдем его корни $\{\mu_{j,1}\}_{j=1}^{N-1}$.
7. Определяя из (41) $Q_1(\lambda)$, найдем знаки $\tau_{j,1} = \operatorname{sgn} Q_1(\mu_{j,1})$.
8. Из равенств (9) находим b_2 и a_2 .
9. Продолжая этот алгоритм, находим последовательности b_k и $a_k, k \in \mathbb{Z}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. На каждом шаге этого алгоритма можно определять решения Флоке. Для этого сначала находим базисные решения $\theta_n(\lambda)$ и $\varphi_n(\lambda)$ с помощью соотношений

$$\begin{aligned} \theta_2(\lambda) &= -\frac{a_0}{a_1}, & \theta_3(\lambda) &= \frac{\lambda - b_2}{a_2} \theta_2(\lambda), \\ \theta_{k+1}(\lambda) &= \frac{(\lambda - b_k) \theta_k(\lambda) - a_{k-1} \theta_{k-1}(\lambda)}{a_k}, & k &\in \mathbb{Z}, \\ \varphi_2(\lambda) &= \frac{\lambda - b_1}{a_1}, & \varphi_3(\lambda) &= \frac{(\lambda - b_2) \varphi_2(\lambda) - a_1}{a_2}, \\ \varphi_{k+1}(\lambda) &= \frac{(\lambda - b_k) \varphi_k(\lambda) - a_{k-1} \varphi_{k-1}(\lambda)}{a_k}, & k &\in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Далее определим решения Флоке по следующей формуле:

$$\psi_n^\pm(\lambda) = \frac{Q_0(\lambda) \pm \sqrt{R(\lambda)}}{2a_0 S_0(\lambda)} \theta_n(\lambda) + \varphi_n(\lambda), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Теоремы 1 и 2 дают метод решения задачи (1)–(4). Для этого сначала найдем спектральные данные $\lambda_i, \mu_j(0), \sigma_j(0)$ по заданным последовательностям $\{a_n^0\}$ и $\{b_n^0\}$. Затем, используя приведенный выше алгоритм решения обратной задачи, определим $\mu_{j,k}(0), \sigma_{j,k}(0)$. Применяя теорему 1, вычислим $\mu_{j,k}(t), \sigma_{j,k}(t)$. С учетом независимости от k и t собственных значений $\lambda_{i,k}$, используя равенства (9), находим $a_k(t), b_k(t)$ и, следовательно, $\psi_k^\pm(\lambda, t)$.

СЛЕДСТВИЕ 1. Если $N = 2p$ и число p является периодом для начальных последовательностей $\{a_n^0\}$ и $\{b_n^0\}$, то все корни уравнения $\Delta(\lambda) + 2 = 0$ являются двукратными. Так как функция Ляпунова, соответствующая коэффициентам $a_n(t)$ и $b_n(t)$, совпадает с $\Delta(\lambda)$, то согласно аналогу обратной теоремы Борга для дискретного уравнения Хилла (см. [18]) число p является также периодом для решения $a_n(t), b_n(t)$ по переменной n .

Проиллюстрируем применение теоремы 1 к решению задачи (1), (2) для заданного начального условия

$$(a_n^0)^2 = \frac{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}{4} - (-1)^n \frac{\alpha_1 \alpha_2}{2}, \quad b_n^0 = 0, \quad n \in \mathbb{Z},$$

где α_1, α_2 – заданные числа, удовлетворяющие условию $0 < \alpha_1 < \alpha_2$. В этом случае

$$N = 2, \quad \lambda_1 = -\alpha_2, \quad \lambda_2 = -\alpha_1, \quad \lambda_3 = \alpha_1, \quad \lambda_4 = \alpha_2, \quad \mu_1(0) = 0, \quad \sigma_1(0) = 1.$$

Используя замечание 2, получим

$$\begin{aligned} a_n^2(t) &= \frac{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}{4} - \frac{1}{2} \mu^2(t) - (-1)^n \frac{\sigma(t)}{2} \sqrt{(\mu^2(t) - \alpha_1^2)(\mu^2(t) - \alpha_2^2)}, \\ b_n(t) &= (-1)^n \mu(t), \quad n \in \mathbb{Z}, \\ \psi_0^\pm(\lambda, t) &= \frac{\lambda^2 - \mu^2(t) - \sigma(t) \sqrt{(\mu^2(t) - \alpha_1^2)(\mu^2(t) - \alpha_2^2)} \pm \sqrt{(\lambda^2 - \alpha_1^2)(\lambda^2 - \alpha_2^2)}}{2a_0(t)(\lambda - \mu(t))}, \\ \psi_1^\pm(\lambda, t) &= 1, \end{aligned}$$

где $\mu(t)$ определяется из уравнения

$$\frac{d\mu(t)}{dt} = 2[1 - 2(\alpha_2 - \alpha_1)]\sigma(t) \sqrt{(\mu^2(t) - \alpha_1^2)(\mu^2(t) - \alpha_2^2)}$$

с начальными условиями $\mu(0) = 0, \sigma(0) = 1$ и функция $\sigma(t)$ меняет свой знак при каждом столкновении точки $\mu(t)$ с концами лакуны $[-\alpha_1, \alpha_1]$.

Введя преобразование $\mu(t) = \alpha_1 \sin x(t)$, с учетом равенства

$$\operatorname{sgn} \sigma(t) \cdot \operatorname{sgn} [\cos x(t)] = \sigma(0)$$

получим

$$a_n^2(t) = \frac{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}{4} - \frac{\alpha_1^2}{2} \sin^2 x(t) - (-1)^n \frac{\alpha_1 \alpha_2}{2} \cos x(t) \sqrt{1 - \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^2 \sin^2 x(t)},$$

$$b_n(t) = (-1)^n \alpha_1 \sin x(t),$$

$$\psi_n^\pm(\lambda, t) = \frac{\lambda^2 - \alpha_1^2 \sin^2 x(t) - \alpha_1 \alpha_2 \cos x(t) \sqrt{1 - \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^2 \sin^2 x(t)} \pm \sqrt{(\lambda^2 - \alpha_1^2)(\lambda^2 - \alpha_2^2)}}{2a_0(t)(\lambda - \alpha_1 \sin x(t))},$$

где $x(t)$ – решение следующей задачи Коши:

$$\dot{x}(t) = 2\alpha_1 \alpha_2 [1 - 2(\alpha_2 - \alpha_1)] \sqrt{1 - \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^2 \sin^2 x(t)},$$

$$x(0) = 0.$$

Известно (см. [19]), что

$$x(t) = \operatorname{am}\left(\beta t, \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right),$$

где $\beta = 2\alpha_1 \alpha_2 (1 - 2(\alpha_2 - \alpha_1))$, а am – амплитудная функция Якоби. Таким образом,

$$a_n(t) = \sqrt{\frac{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}{4} - \frac{\alpha_1^2}{2} \operatorname{sn}^2\left(\beta t, \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right) - (-1)^n \frac{\alpha_1 \alpha_2}{2} \operatorname{cn}\left(\beta t, \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right) \operatorname{dn}\left(\beta t, \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)},$$

$$b_n(t) = (-1)^n \alpha_1 \operatorname{sn}\left(\beta t, \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right),$$

$$\psi_n^\pm(\lambda, t) = \frac{\lambda^2 - \alpha_1^2 \operatorname{sn}^2\left(\beta t, \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right) - \alpha_1 \alpha_2 \operatorname{cn}\left(\beta t, \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right) \sqrt{1 - \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^2 \operatorname{sn}^2\left(\beta t, \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)} \pm \sqrt{(\lambda^2 - \alpha_1^2)(\lambda^2 - \alpha_2^2)}}{2a_0(t) \left[\lambda - \alpha_1 \operatorname{sn}\left(\beta t, \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)\right]} \pm$$

$$\pm \frac{\sqrt{(\lambda^2 - \alpha_1^2)(\lambda^2 - \alpha_2^2)}}{2a_0(t) \left[\lambda - \alpha_1 \operatorname{sn}\left(\beta t, \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)\right]},$$

где sn , cn и dn суть эллиптические функции Якоби.

Список литературы

- [1] M. Toda, *Progr. Theor. Phys. Suppl.*, **45** (1970), 174–200.
- [2] M. Toda, *Theory of Nonlinear Lattices*, Springer Series in Solid-State Sciences, **20**, Springer, Berlin–New York, 1981.
- [3] С. В. Манаков, *ЖЭТФ*, **67**:2 (1974), 543–555.
- [4] H. Flaschka, *Progr. Theor. Phys.*, **51**:3 (1974), 703–716.
- [5] Б. А. Дубровин, В. Б. Матвеев, С. П. Новиков, *УМН*, **31**:1(187) (1976), 55–136.
- [6] E. Date, S. Taniaka, *Progr. Theor. Phys.*, **55**:2 (1976), 457–465.
- [7] И. М. Кричевер, *УМН*, **33**:4(202) (1978), 215–216.
- [8] В. Г. Самойленко, А. К. Прикарпатский, *Укр. матем. журн.*, **34**:4 (1982), 469–475.
- [9] М. Абловиц, Х. Сигур, *Солитоны и метод обратной задачи*, Мир, М., 1987.
- [10] V. K. Mel'nikov, *Phys. Lett. A*, **128**:9 (1988), 488–492.
- [11] G. Teschl, *Jacobi Operators and Completely Integrable Lattices*, Mathematical Surveys and Monographs, **72**, AMS, Providence, RI, 2000.

- [12] Г. У. Уразбоев, *ТМФ*, **154**:2 (2008), 305–315.
- [13] A. Cabada, G. U. Urazboev, *Inverse Problems*, **26**:8 (2010), 085004, 12 pp.
- [14] X. Liu, Y. Zeng, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **38**:41 (2005), 8951–8965.
- [15] P. G. Grinevich, I. A. Taimanov, “Spectral conservation laws for periodic nonlinear equations of the Melnikov type”, *Geometry, Topology, and Mathematical Physics*, S. P. Novikov’s Seminar: 2006–2007, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, **224**, eds. V. M. Buchstaber, I. M. Krichever, AMS, Providence, RI, 2008, 125–138.
- [16] А. Б. Хасанов, А. Б. Яхшимуратов, *ТМФ*, **164**:2 (2010), 214–221.
- [17] B. A. Babajanov, M. Fečkan, G. U. Urazbaev, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, **22**:1–3 (2015), 1223–1234.
- [18] H. Hochstadt, *Linear Algebra Appl.*, **11**:1 (1975), 41–52.
- [19] А. Гурвиц, Р. Курант, *Теория функций*, Наука, М., 1968.

Поступила в редакцию 22.01.2015,
после доработки 19.03.2015