Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Г. Артышев, Обобщение решения Ландау о затопленной струе, *ТМФ*, 2016, том 186, номер 2, 181–190

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8861>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.85.209

26 апреля 2023 г., 16:25:33

© 2016 г.

С. Г. Артышев*

ОБОБЩЕНИЕ РЕШЕНИЯ ЛАНДАУ О ЗАТОПЛЕННОЙ СТРУЕ

Рассматривается один класс точных решений уравнений гидродинамики, которые обобщают решение Ландау о затопленной струе. Полученные решения не обращаются в нуль при исчезновении вязкости и описывают ненулевой выход или ненулевое поглощение массы жидкости из источников или соответственно стоков, расположенных на одной оси.

Ключевые слова: затопленная струя, одномерные источники и стоки несжимаемой жидкости.

DOI: 10.4213/tmf8861

1. ВВЕДЕНИЕ

Существует немало обобщений решения Ландау о затопленной струе [1]. Одно из последних изложено в работе [2]. Там же разбираются практические приложения и дается подробный литературно-исторический обзор. Отдавая должное статье [2] и другим работам по этой теме, отметим, что предлагаемый нами подход значительно ближе к первоисточнику. Изучаемое ниже поле скоростей отличается от поля скоростей решения Ландау лишь на одно слагаемое. Сохранены обозначения Ландау и обобщаются некоторые формулы из книги [1]. Найдена связь между неизолированными особыми точками векторного поля скоростей и наличием в них стоков или истоков массы жидкости. Чтобы упростить выкладки, мы проводим соответствующее доказательство только для идеальной жидкости. С методической точки зрения следует отметить, что решение уравнений Навье–Стокса, найденное в настоящей работе, помогло выявить одну неточность или опечатку в учебнике [1].

В плоском случае связь между особенностями поля скоростей жидкости и наличием в ней стоков или истоков является общеизвестной. Она приводит к содержательной математической теории и практическим приложениям [3]. Мы считаем, что появление аналогичных работ в трехмерной гидродинамике было бы полезным.

*Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», Москва, Россия.
E-mail: sgart@mail.ru

2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Суть нашего подхода разъясняет следующее утверждение.

Рассмотрим в сферической системе координат (r, θ, φ) векторное поле, не зависящее от угла φ , вида

$$\begin{aligned} v_r(r, \theta) &= \frac{2\nu}{r} \left[\frac{A^2 - 1}{(A - \cos \theta)^2} - 1 \right] + \frac{B}{r}, \\ v_\theta(r, \theta) &= -\frac{2\nu \sin \theta}{r(A - \cos \theta)} - \frac{B(A - \cos \theta)}{r \sin \theta}, \\ v_\varphi(r, \theta) &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где ν – кинематическая вязкость, $A > 1$ – безразмерная константа, B – константа, имеющая размерность кинематической вязкости. Это поле является точным решением стационарного уравнения Навье–Стокса для несжимаемой жидкости. При этом давление равно

$$p(r, \theta) = \frac{\rho}{2r^2} \left[\frac{8\nu^2(A \cos \theta - 1)}{(A - \cos \theta)^2} - B^2 \left(\frac{(A - \cos \theta)^2}{\sin^2 \theta} + 1 \right) \right] + p_\infty, \quad (2)$$

где ρ – плотность жидкости, p_∞ – давление на бесконечности.

При доказательстве этого утверждения не использовался аппарат групповых методов [2], [4], хотя применить его, по-видимому, возможно. На это настраивает внимательное изучение статей [5]–[9]. Наше доказательство основано на работах [10]–[13]. Чтобы не проследивать длительную связь с только что упомянутыми статьями, предлагаем убедиться в справедливости нашего утверждения с помощью прямых вычислений. Возникающие при этом выкладки могут быть упрощены следующим способом. Во-первых, заметим, что при $B = 0$ мы имеем точное решение Ландау о затопленной струе [1]. Поэтому после подстановки найденных нашим методом v_r , v_θ и p в уравнения Навье–Стокса допустимо зачеркнуть, не проверяя, все слагаемые, в которых отсутствует константа B . Во-вторых, если в (1) и (2) положить $\nu = 0$, то очень легко убедиться, что мы получим одно из описаний идеальной жидкости. Значит, можно зачеркнуть все слагаемые, в которых отсутствует значок кинематической вязкости ν . Остаются только слагаемые, в которых присутствуют множители B и ν одновременно, их немного, и они взаимно сокращаются.

В сферической системе координат ось Oz характеризуется значениями $\theta = 0$ и $\theta = \pi$. Поэтому при $B \neq 0$, как это следует из выражения для $v_\theta(r, \theta)$, наше векторное поле (1) имеет в качестве особых точки оси Oz и только их. Ниже будет доказано, что в них происходит сток или исток массы жидкости.

Линии тока тока определяются уравнением

$$\frac{dr}{v_r} = \frac{r d\theta}{v_\theta},$$

интегрирование которого дает первый интеграл

$$r \sin \theta \left(\frac{2\nu \sin \theta}{A - \cos \theta} + \frac{B(A - \cos \theta)}{\sin \theta} \right) = C_0, \quad C_0 = \text{const.} \quad (3)$$

Все линии тока, отвечающие одному и тому же значению константы C_0 , образуют трубку тока с осью симметрии вдоль оси Oz . Сечение трубки тока любой плоскостью, проходящей через ось Oz , дает в этой плоскости две линии тока, расположенные симметрично относительно оси Oz . Далее будем изображать на рисунках линии тока и поле скоростей только в плоскости (z, x) .

Рассмотрим функцию

$$g(\theta) = \frac{A - \cos \theta}{\sin \theta}. \quad (4)$$

Она имеет на отрезке $(0, \pi)$ единственный минимум в точке $\theta_0 = \arccos(1/A)$, равный $g(\theta_0) = \sqrt{A^2 - 1}$. Расстояние, на которое точка (r, θ) линии тока удалена от оси Oz , выражается с помощью соотношений (3) и (4) следующим образом:

$$r \sin \theta = \begin{cases} Cg(\theta), & \text{когда } B = 0, \\ \frac{Cg(\theta)}{2R + g^2(\theta)}, & \text{когда } B > 0, \\ \frac{Cg(\theta)}{2R - g^2(\theta)}, & \text{когда } B < 0. \end{cases} \quad (5)$$

Здесь $R = \nu/|B|$ – безразмерная положительная величина, C – константа, которая непосредственно определяет линию тока, она имеет размерность длины и принимает значения $C = C_0/2\nu$ при $B = 0$ и $C = C_0/|B|$ при $B \neq 0$. Если обе части равенства (5) разделить на воображаемую единицу длины l , то координата r и константа C станут безразмерными. Далее при визуализации линий тока и поля скоростей мы будем это предполагать. Знак константы C должен быть таким, чтобы было выполнено неравенство $r \sin \theta > 0$. Поэтому из формул (5) следует, что при $B \geq 0$ постоянная C всегда положительная, а при $B < 0$ знак константы C должен меняться.

3. ЗАТОПЛЕННАЯ СТРУЯ ЛАНДАУ

Как уже было отмечено выше, при $B = 0$ векторное поле (1) является точным решением стационарных уравнений Навье–Стокса. Оно было найдено Ландау и названо им затопленной струей. Решение имеет одну изолированную особую точку в начале координат, которая, как показывают вычисления, не является ни стоком, ни источником. В самой же монографии [1] замечено следующее геометрическое свойство всех линий тока затопленной струи Ландау. Если в начало координат мысленно поместить вершину конуса с углом раствора $2\theta_0$ и осью симметрии вдоль оси Oz , то любая линия тока в точке пересечения с поверхностью этого конуса ближе всего подходит к оси Oz . Свойство функции $g(\theta)$, отмеченное выше, очевидным образом объясняет такую особенность поведения линий тока в затопленной струе Ландау.

Рис. 1а, полученный при $A = 1.5$, иллюстрирует сказанное. На нем изображено сечение плоскостью (z, x) конуса с углом раствора $2\theta_0 \approx 2 \cdot 48^\circ$ и двух трубок тока, определяемых безразмерными константами $C = 1.4$ и $C = 0.9$. На рис. 1б показано поле скоростей жидкости в той же плоскости. Скорости v_r и v_θ из (1) при $B = 0$ обезразмерены с помощью единицы скорости $v_0 = \nu/l$, где l – упомянутая выше единица длины для сферической координаты r .

Рис. 1. Линии тока (а) и поле скоростей (б) затопленной струи Ландау.

Абсолютные величины скоростей при больших r убывают, как $1/r$, из-за чего точное изображение векторов делается невыразительным. Поэтому при визуализации векторного поля добавлена опция, которая фиксирует только направление вектора. Однако название *поле скоростей*, а не *поле направлений скоростей* здесь и далее для краткости будет сохранено. На последующих рисунках этот прием позволяет очень четко фиксировать точки стока и истока жидкости.

Вычисление компонент тензора плотности потока импульса Π_{rr} и $\Pi_{\theta\theta}$, а также полного потока импульса P в струе совпадают с соответствующими выражениями из книги [1]. Однако имеется одно досадное недоразумение. Если в нашей формуле (2) положить $B = 0$, то получившееся выражение для $p(r, \theta)$ будет отличаться знаком от соответствующего выражения (23.20) из монографии [1]. Дело в том, что формулу для давления Ландау получил из своей гипотезы о равенстве нулю компоненты тензора плотности потока импульса $\Pi_{\theta\theta}$. (При $B = 0$ нашими вычислениями эта гипотеза подтвердилась, а при $B \neq 0$ не подтвердилась.) Выражение для $\Pi_{\theta\theta}$ в книге [1] не нумеруется, но приводится в конце страницы, предшествующей странице, на которой помещена формула (23.20). Если аккуратно решить относительно p уравнение $\Pi_{\theta\theta} = 0$, то мы увидим, что в учебнике [1] имеет место опечатка: в самом начале правой части формулы (23.20) надо убрать знак минус.

4. ИДЕАЛЬНАЯ ЖИДКОСТЬ

Рассмотрим поле скоростей (1) без вязкости:

$$v_r(r, \theta) = \pm \frac{1}{r}, \quad v_\theta(r, \theta) = \mp \frac{A - \cos \theta}{r \sin \theta}.$$

Здесь единица скорости есть $v_0 = |B|/l$, верхний знак отвечает случаю $B > 0$, нижний – случаю $B < 0$. Линиями тока, как это следует из (3) и (5), будут

$$r(\theta) = \frac{C}{\sin \theta g(\theta)}, \quad C = \frac{C_0}{l|B|} > 0.$$

Рис. 2. Линии тока идеальной жидкости при $B \neq 0$ (а) и поле скоростей идеальной жидкости при $B > 0$ (б) и при $B < 0$ (в).

При сравнении с затопленной струей Ландау точки поверхности вышеупомянутого конуса характеризуются прямо противоположным свойством: в них любая линия тока удаляется от оси $0z$ на самое большое расстояние (см. рис. 2а). Визуализация векторного поля скоростей дается на рис. 2б и 2в для значения параметра $A = 1.5$. При замене B на $-B$ источники становятся стоками, а стоки – источниками. Сами линии тока не меняются, они отвечают безразмерным значениям $C = 1.4$ и $C = 0.9$ на рис. 2а. Далее мы увидим, что такая симметрия исчезает при включении вязкости.

Рассмотрим особые точки нашего поля скоростей и их связь с источниками и стоками жидкости. Окружим участок оси $0z$ длины dz цилиндром малого радиуса r_0 . Вклад этого участка в общий поток M массы жидкости через боковую поверхность

цилиндра будет задаваться следующим выражением:

$$dM = \rho[v_r \sin \theta + v_\theta \cos \theta]2\pi r_0 dz. \quad (6)$$

Подставляя в эту формулу значения v_r , v_θ из (1) при $\nu = 0$, а также $r = \sqrt{r_0^2 + z^2}$, $\sin \theta = r_0/\sqrt{r_0^2 + z^2}$ и $\cos \theta = z/\sqrt{r_0^2 + z^2}$, получим, что

$$dM = 2\pi\rho\left[\frac{Br_0^2}{r_0^2 + z^2} - B\left(A - \frac{z}{\sqrt{r_0^2 + z^2}}\right)\frac{z}{\sqrt{r_0^2 + z^2}}\right]dz.$$

Отсюда следует, что при $r_0 \rightarrow 0$

$$dM = -2\pi\rho B\left(A - \frac{z}{|z|}\right)\frac{z}{|z|}dz = \begin{cases} -2\pi\rho B(A-1)dz, & \text{если } z > 0, \\ 2\pi\rho B(A+1)dz, & \text{если } z < 0. \end{cases} \quad (7)$$

Таким образом, при $B < 0$ положительная часть оси $0z$ является источником жидкости с постоянной линейной плотностью выхода жидкости $2\pi\rho|B|(A-1)$, а при $B > 0$ – стоком с той же линейной плотностью входа жидкости. Отрицательная часть оси $0z$ будет, наоборот, источником при $B > 0$ и стоком при $B < 0$ с постоянной линейной плотностью $2\pi\rho B(A+1)$.

Так как жидкость несжимаемая, суммарный поток жидкости через любую замкнутую поверхность, которая не охватывает особые точки поля скоростей, равен нулю. Руководствуясь этим, рассчитаем полный поток жидкости $M(r)$ через сферу с центром в нуле и радиусом r двумя способами. В нашем поле скоростей $v_r = B/r$, поэтому полный поток можно элементарно найти:

$$M(r) = 4\pi r^2 \rho \frac{B}{r} = 4\pi\rho r B.$$

С другой стороны, поток от положительной части оси $0z$ равен $-2\pi\rho B(A-1)r$, а поток от отрицательной части оси $0z$ равен $2\pi\rho B(A+1)r$. Складывая эти потоки, получим, как и должно быть, то же самое количество массы в единицу времени, равное $4\pi\rho r B$.

Сформулируем общее правило подсчета полного потока жидкости через замкнутую поверхность для нашего поля скоростей. Надо сложить длины всех отрезков положительной части оси $0z$ и отдельно сложить длины всех отрезков отрицательной части оси $0z$, которые охватываются замкнутой поверхностью. Первую сумму надо умножить на $-2\pi\rho B(A-1)$, а вторую умножить на $2\pi\rho B(A+1)$. Сумма двух последних величин будет равна искомому полному потоку жидкости через замкнутую поверхность.

Обратимся к компонентам тензора плотности потока импульса. Они принимают следующий вид:

$$\Pi_{rr} = \frac{B^2\rho}{2r^2}\left[1 - \frac{(A - \cos \theta)^2}{\sin^2 \theta}\right],$$

$$\Pi_{\theta\theta} = \frac{B^2\rho}{r^2 \sin^2 \theta}\left[\cos^2 \theta + A \cos \theta + \frac{1}{2}(A^2 - 1)\right].$$

Как уже отмечалось выше, гипотеза Ландау о равенстве нулю $\Pi_{\theta\theta}$ в случае идеальной жидкости не подтверждается.

5. ВИЗУАЛИЗАЦИЯ ЛИНИЙ ТОКА И ПОЛЯ СКОРОСТЕЙ ЖИДКОСТИ ПРИ НЕНУЛЕВЫХ ν И B

Добавление к полю скоростей идеальной жидкости вязких членов не повлияет на местоположение и мощность источников или стоков. В этом можно убедиться, если повторить вычисления dM в (6) с полем скоростей (1). Но и без вычислений понятно, что нового результата не будет, так как в добавочных членах отсутствуют особые точки, кроме точки $r = 0$. А эта особая точка, как отмечено еще в монографии [1], не является ни источником, ни стоком. Поэтому правило подсчета суммарного потока жидкости через замкнутую поверхность, сформулированное в предыдущем разделе для идеальной жидкости, сохраняется и в общем случае векторного поля скоростей (1).

Безразмерные скорости при $\nu \neq 0$ и $B \neq 0$ имеют вид

$$\begin{aligned} v_r(r, \theta) &= \frac{1}{r} \left[2R \left(\frac{2R_1}{(A - \cos \theta)^2} - 1 \right) \pm 1 \right], \\ v_\theta(r, \theta) &= - \frac{(2R \pm g^2(\theta))}{rg(\theta)}. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь знак плюс отвечает случаю $B > 0$, а знак минус – случаю $B < 0$. Для обезразмеривания использовалась единица скорости $|B|/l$, где, как и выше, l – единица длины. В выражении (8) $R_1 = (A^2 - 1)/2 > 0$ и $R = \nu/|B|$ – безразмерные константы, функция $g(\theta)$ определена формулой (4).

Конфигурация линий тока и поля скоростей зависит от того, какое из неравенств $R < R_1$ или $R > R_1$ выполняется.

Проанализируем величину отклонения $r \sin \theta$ точки траектории от оси $0z$, которая выражается формулой (5), в случае $B > 0$. Для этого выпишем ее производную

$$\frac{d}{d\theta}(r \sin \theta) = \frac{Cg'(\theta)(2R - g^2(\theta))}{(2R + g^2(\theta))^2}. \quad (9)$$

Так как

$$g(\theta) = \frac{A - \cos \theta}{\sin \theta} \geq g(\theta_0) = \sqrt{A^2 - 1} = \sqrt{2R_1},$$

при $R < R_1$ функция $r \sin \theta$ имеет, как и в случае затопленной струи Ландау, лишь одну экстремальную точку $\theta_0 = \arccos(1/A)$. Анализ правой части выражения (9) дает, что это максимум функции $r \sin \theta$. Следовательно, любая линия тока в точке пересечения с конусом, у которого угол раствора равен $2\theta_0$, удаляется от оси $0z$ на самое большое расстояние.

На рис. 3а изображено сечение плоскостью (z, x) конуса с углом раствора $2\theta_0 = 2 \arccos(1/A) = 2 \cdot 60^\circ$ и одновременно сечение двух трубок тока, отвечающих значениям $C = 3$ и $C = 5$. На рис. 3б показано соответствующее поле скоростей жидкости с источниками при $z < 0$ и стоками при $z > 0$ на оси $0z$. При расчете мы взяли $A = 2$, $R_1 = 1.5$, $R = 1.25$.

Рис. 3. Линии тока (а) и поле скоростей идеальной жидкости (б) при $B > 0$, $R < R_1$.

При $B > 0$ и $R > R_1$ у функции $r \sin \theta$ возникают еще две экстремальные точки, являющиеся корнями тригонометрического уравнения

$$\frac{A - \cos \theta}{\sin \theta} = \sqrt{2R}, \quad (10)$$

решения которого на отрезке $(0, \pi)$ имеют вид

$$\theta_1 = \arccos \frac{1}{\sqrt{1+2R}} + \arccos \frac{A}{\sqrt{1+2R}}, \quad \theta_2 = \arccos \frac{1}{\sqrt{1+2R}} - \arccos \frac{A}{\sqrt{1+2R}}.$$

Легко доказать неравенства $\theta_2 < \theta_0 < \theta_1$. Можно мысленно представить себе, что при возрастании параметра R после прохождения им значения R_1 в начале координат возникают два дополнительных конуса с углами раствора $2\theta_1$ и $2\theta_2$ и той же осью симметрии вдоль оси Oz . Конус с углом раствора $2\theta_1$ назовем левым, конус с углом раствора $2\theta_2$ – правым, а конус с углом раствора $2\theta_0$ – средним. Из анализа правой части формулы (9) следует, что в точках пересечения с поверхностью среднего конуса линии тока подходят локально ближе всего к оси Oz , а в точках пересечения с поверхностями двух других конусов локально удаляются от оси Oz на самое большое расстояние. Иначе после пересечения линией тока поверхности правого конуса при движении слева направо и поверхности левого конуса при движении справа налево точки линии тока только приближаются к оси Oz .

Рис. 4а иллюстрирует вышесказанное при $A = 1.5$, $R_1 = 0.625$, $R = 2.0$. На нем изображено сечение плоскостью (z, x) двух трубок тока, отвечающих значениям $C = 4$ и $C = 7$, а также сечение трех конусов. Для того чтобы показать наглядно на небольшом рисунке конфигурацию линий тока, мы сжали изображение по оси Oz , поэтому острые углы $\theta_0 \approx 48^\circ$ и $\theta_2 \approx 16^\circ$, относящиеся соответственно к среднему и правому конусам, выглядят на рис. 4а увеличенными, а тупой угол $\theta_1 \approx 111^\circ$

Рис. 4. Линии тока (а) и поле скоростей жидкости (б) при $B > 0$, $R > R_1$. Рис. 5. Линии тока (а) и поле скоростей жидкости (б) при $B < 0$, $R < R_1$.

левого конуса выглядит уменьшенным. На рис. 4б показано соответствующее поле скоростей с истоками при $z < 0$ и стоками при $z > 0$ на оси Oz .

При $B < 0$ конфигурации линий тока имеют более резкие изгибы. Тем не менее случай $B < 0$ и $R < R_1$ все еще легко поддается изучению, так как из свойств функции $g(\theta)$ следует, что $2R - g^2(\theta) < 0$, если $R < R_1$. Функция $r \sin \theta$ согласно последней формуле в выражениях (5) имеет единственную экстремальную точку $\theta_0 = \arccos(1/A)$, в которой линия тока максимально удаляется от оси Oz (см. рис. 5а). Кривые на рис. 5 построены при значениях безразмерных параметров

$A = 1.5$, $R_1 = 0.625$, $R = 0.5$. На рис. 5а изображено сечение плоскостью (z, x) конуса с углом раствора $2\theta_0 \approx 2 \cdot 48^\circ$ и двух трубок тока, отвечающих значениям константы $C = -7$ и $C = -5$. На рис. 5б изображено безразмерное поле скоростей (8) в этой же плоскости. Местоположение источников и стоков жидкости по сравнению со случаем $B > 0$ меняется на противоположное: на оси Oz при $z > 0$ расположены источники, а при $z < 0$ – стоки.

Случай $B < 0$ и $R > R_1$ является более сложным для анализа и требует специального рассмотрения.

Благодарности. Автор благодарит рецензента за полезные замечания.

Список литературы

- [1] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Курс теоретической физики*, т. 6: *Гидродинамика*, Наука, М., 1986.
- [2] Г. И. Броман, О. В. Руденко, *УФН*, **180**:1 (2010), 97–104.
- [3] А. Н. Варченко, П. И. Этингер, *Почему граница круглой капли превращается в инверсный образ эллипса*, Наука, М., 1995.
- [4] В. В. Пухначев, *Успехи механики*, **4**:1 (2006), 6–76.
- [5] V. V. Pukhnachev, “Singular solutions of Navier–Stokes equations”, *Proceedings of the St. Petersburg Mathematical Society*, v. XV: *Advances in Mathematical Analysis of Partial Differential Equations* (Stockholm, Sweden, July 9–13, 2012), American Mathematical Society Translations. Ser. 2, **232**, AMS, Providence, RI, 2014, 193–217.
- [6] Н. А. Слезкин, *Уч. записки Моск. гос. ун-та*, **2** (1934), 89–90.
- [7] В. И. Яцеев, *ЖЭТФ*, **20**:11 (1950), 1031–1034.
- [8] В. О. Шверак, *Проблемы математического анализа*, **61** (2011), 173–191.
- [9] С. Н. Аристов, *Изв. РАН. Механика жидкости и газа*, 1998, №6, 144–148.
- [10] С. Г. Артышев, *Вестн. МИФИ*, **2**:1 (2013), 1–5.
- [11] С. Г. Артышев, *ПММ*, **79**:2 (2015), 236–241.
- [12] А. В. Юров, А. А. Юрова, *ТМФ*, **147**:1 (2006), 64–72.
- [13] Y. Li, A. Yurov, *Stud. Appl. Math.*, **111**:1 (2003), 101–113.

Поступила в редакцию 31.01.2015,
после доработки 5.05.2015