Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ин Хуан, Линь Лян, Точные двухсолитонные решения
и двупериодические решения возмущенного уравнения
Кортевега–де Фриза с переменными коэффициентами,
ТМФ, 2015, том 184, номер 2, 244–252

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8863>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.59.107

26 апреля 2023 г., 05:07:49

© 2015 г.

Ин Хуан*, Линь Лян*

ТОЧНЫЕ ДВУХСОЛИТОННЫЕ РЕШЕНИЯ И ДВУПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ВОЗМУЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ КОРТЕВЕГА–ДЕ ФРИЗА С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Метод преобразований Дарбу для модифицированного уравнения Кортевега–де Фриза с переменными коэффициентами при наличии возмущающих слабых подробно обсуждается на основе общей формы преобразований Дарбу для некоторых нелинейных уравнений, интегрируемых методом обратной задачи рассеяния Абловица–Каупа–Ньюэлла–Сегура. Этот метод использован для построения семейств двухсолитонных и двупериодических решений.

Ключевые слова: преобразование Дарбу, возмущенное модифицированное уравнение Кортевега–де Фриза, двухсолитонное решение, двупериодическое решение.

DOI: 10.4213/tmf8863

1. ВВЕДЕНИЕ

Общепринято считать наиболее эффективной версией метода возмущений ту, которая основана на методе обратной задачи рассеяния (ОЗР). Эта версия требует, чтобы невозмущенное уравнение было полностью интегрируемо методом ОЗР, что ограничивает область ее применения, но позволяет решать наиболее сложные динамические задачи. Полностью интегрируемые методом ОЗР уравнения обладают рядом замечательных свойств, таких как преобразование Дарбу, свойство Пенлеве, билинейная форма Хироты и другие. Некоторые из этих свойств, например билинейная форма Хироты и преобразование Дарбу [1], [2], лежат в основе построения точных многосолитонных решений.

Возмущенное модифицированное уравнение Кортевега–де Фриза (мКДФ)

$$p_t + 6p^2p_x + p_{xxx} = \epsilon f(p), \quad (1)$$

*School of Mathematics and Statistics, Chuxiong Normal University, Chuxiong, China.
E-mail: huang11261001@163.com

где ϵ – малый возмущающий коэффициент, встречается в теории квазиодномерного твердого тела и в гидродинамике жидких кристаллов [3], [4]. Являясь отклонениями от уравнения мКдФ, индуцированные возмущением эффекты интересны прежде всего тем, что они отражают физические явления, которые не могут содержаться в точно решаемых моделях.

В настоящей работе мы рассмотрим возмущенное уравнение мКдФ с переменными коэффициентами

$$p_t + a(6p^2 p_x + p_{xxx}) = \epsilon f_1(p), \quad (2)$$

где $a = a(t)$, $\epsilon = \epsilon(t)$, $f_1(p) = (p_{xxxx} + 10p^2 p_{xx} + 10pp_x^2 + 6p^5)_x$. Возмущающие слагаемые $\epsilon(t)f_1(p)$ с зависящим от времени параметром $\epsilon(t)$ обоих знаков также имеют физический смысл [3]. В частности, если $a = 1$ и ϵ представляет собой не возмущающий коэффициент, а обычную константу, уравнение (2) называется уравнением мКдФ пятого порядка. Отметим, что для уравнения КдФ пятого порядка построено много точных решений [5]–[11], а также получены важные аналитические результаты для возмущенного уравнения КдФ [12]–[16]. Однако уравнение мКдФ пятого порядка и возмущенное уравнение мКдФ изучались очень мало, только редуцированные решения в виде рядов были построены для возмущенного уравнения мКдФ со слабой дисперсией четвертого порядка и слабой диссипацией [17].

2. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ДАРБУ ВОЗМУЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ мКдФ С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

В работе [18] были получены некоторые преобразования Дарбу для матричной (2×2) -системы Абловица–Каупа–Ньюэлла–Сегура (АКНС). Авторы показали, что класс нелинейных эволюционных уравнений

$$p_t - \frac{1}{4} \left(\left(\frac{\alpha_{n,x}}{p} \right)_x + 4\alpha_n p \right)_x = 0 \quad (3)$$

является условием совместности системы АКНС

$$\Phi_x = U\Phi = \begin{pmatrix} \lambda & p \\ -p & -\lambda \end{pmatrix} \Phi, \quad (4a)$$

$$\Phi_t = V\Phi = \begin{pmatrix} A & B \\ C & -A \end{pmatrix} \Phi, \quad (46)$$

где λ – спектральный параметр, A, B, C – скалярные функции λ и α_i , $i = 0, 1, \dots, n$, а U, V должны удовлетворять следующему уравнению:

$$U_t - V_x + [U, V] = 0. \quad (5)$$

Если $\Phi = \Phi(x, t, \lambda) = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}$ является общим решением системы (4), то форма

$$p' = p + 4\lambda_1 \frac{\varphi_1 \varphi_2}{\varphi_1^2 + \varphi_2^2} \Big|_{\lambda=\lambda_1} \quad (6)$$

называется преобразованием Дарбу, p' – новое решение, полученное из старого решения p . Кроме того,

$$\bar{\Phi}(x, t, \lambda) = \begin{pmatrix} \bar{\varphi}_1 \\ \bar{\varphi}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda - \lambda_1 \frac{\varphi_1^2 - \varphi_2^2}{\varphi_1^2 + \varphi_2^2} \Big|_{\lambda=\lambda_1} & -2\lambda_1 \frac{\varphi_1 \varphi_2}{\varphi_1^2 + \varphi_2^2} \Big|_{\lambda=\lambda_1} \\ -2\lambda_1 \frac{\varphi_1 \varphi_2}{\varphi_1^2 + \varphi_2^2} \Big|_{\lambda=\lambda_1} & \lambda + \lambda_1 \frac{\varphi_1^2 - \varphi_2^2}{\varphi_1^2 + \varphi_2^2} \Big|_{\lambda=\lambda_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} \quad (7)$$

– общее решение системы АКНС для функции p' , функция

$$p'' = p' + 4\lambda_2 \frac{\bar{\varphi}_1 \bar{\varphi}_2}{\bar{\varphi}_1^2 + \bar{\varphi}_2^2} \Big|_{\lambda=\lambda_2} \quad (8)$$

становится новым решением, построенным на основе решения p' .

Из уравнения (5) можно получить некоторые соотношения:

$$\begin{aligned} A_x &= p(B + C), \\ p_t - B_x - 2pA + 2\lambda B &= 0, \\ p_t + C_x + 2pA + 2\lambda C &= 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Далее, используя (9), получим

$$\begin{aligned} B + C &= \frac{A_x}{p}, \\ B - C &= \frac{(B + C)_x + 4pA}{2\lambda}. \end{aligned} \quad (10)$$

Если положить $n = 2$, $A = \sum_{j=0}^2 \alpha_j \lambda^{5-2j}$, из (10) получим

$$\begin{aligned} B &= \sum_{j=0}^2 \left\{ \frac{\alpha_{j,x}}{2p} \lambda^{5-2j} + \left[\alpha_j p + \left(\frac{\alpha_{j,x}}{4p} \right)_x \right] \lambda^{4-2j} \right\}, \\ C &= \sum_{j=0}^2 \left\{ \frac{\alpha_{j,x}}{2p} \lambda^{5-2j} - \left[\alpha_j p + \left(\frac{\alpha_{j,x}}{4p} \right)_x \right] \lambda^{4-2j} \right\}, \end{aligned}$$

при этом $a_{j,x} = \partial \alpha_j / \partial x$. Подставляя A , B и C в соотношения (9) и приравнявая нулю коэффициенты перед λ^j , $j = 0, 1, 2$, получим ряд дифференциальных уравнений:

$$\alpha_{0,x} = 0, \quad \alpha_{1,x} = \alpha_0 p p_x \quad (11)$$

и

$$\alpha_{2,x} = \frac{1}{4} p \left[\left(\frac{\alpha_{1,x}}{p} \right)_x + 4\alpha_1 p \right]_x. \quad (12)$$

Взяв $\alpha_0 = 16\epsilon$, $\alpha_1 = 8\epsilon p^2 - 4a$ в качестве пары частных решений уравнений (11) и подставив α_1 в (12), получим

$$\alpha_{2,x} = 4p(\epsilon p_{xxx} + 6\epsilon p^2 p_x - ap_x), \quad (13)$$

что является интегрируемым обыкновенным дифференциальным уравнением, причем его частное решение можно взять в виде

$$\alpha_2 = 4\epsilon p p_{xx} - 2\epsilon p_x^2 + 6\epsilon p^4 - 2ap^2. \quad (14)$$

Подставив (13) в (3), окончательно получим уравнение (2), а подставив α_j , $\alpha_{j,x}$, $j = 0, 1, 2$, в A , B и C , получим также систему (46) в виде

$$\Phi_t = \begin{pmatrix} 16\epsilon\lambda^5 + \lambda^3(8\epsilon p^2 - 4a) + \lambda Q & 16\lambda^4\epsilon p + 8\lambda^3\epsilon p_x + I \\ -16\lambda^4\epsilon p + 8\lambda^3\epsilon p_x + J & -16\epsilon\lambda^5 - \lambda^3(8\epsilon p^2 - 4a) - \lambda Q \end{pmatrix} \Phi, \quad (15)$$

где

$$\begin{aligned} Q &= 4\epsilon p p_{xx} - 2\epsilon p_x^2 + 6\epsilon p^4 - 2ap^2, \\ I &= 4\lambda^2(\epsilon p_{xx} + 2\epsilon p^3 - ap) + 2\lambda(\epsilon p_{xxx} + 6\epsilon p^2 p_x - ap_x) + \\ &\quad + \epsilon p_{xxxx} + 10\epsilon p^2 p_{xx} - ap_{xx} + 10\epsilon p p_x^2 + 6\epsilon p^5 - 2ap^3, \\ J &= -4\lambda^2(\epsilon p_{xx} + 2\epsilon p^3 - ap) + 2\lambda(\epsilon p_{xxx} + 6\epsilon p^2 p_x - ap_x) - \\ &\quad - \epsilon p_{xxxx} - 10\epsilon p^2 p_{xx} + ap_{xx} - 10\epsilon p p_x^2 - 6\epsilon p^5 + 2ap^3. \end{aligned}$$

3. ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ ВОЗМУЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ мКдФ С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Возьмем $p = p_0$ в качестве начального решения уравнения (2), где p_0 – произвольная постоянная. Из (4a) и (15) получим соответствующую систему АКНС:

$$\begin{aligned} \Phi_x &= \begin{pmatrix} \lambda & p_0 \\ -p_0 & -\lambda \end{pmatrix} \Phi, \\ \Phi_t &= [16\epsilon\lambda^4 + 4\lambda^2(2\epsilon p_0^2 - a) + 6\epsilon p_0^4 - 2ap_0^2] \begin{pmatrix} \lambda & p_0 \\ -p_0 & -\lambda \end{pmatrix} \Phi. \end{aligned} \quad (16)$$

Очевидно,

$$\Phi_t = [16\epsilon\lambda^4 + 4\lambda^2(2\epsilon p_0^2 - a) + 6\epsilon p_0^4 - 2ap_0^2] \Phi_x.$$

Если положить

$$\xi = x + \int [16\epsilon\lambda^4 + 4\lambda^2(2\epsilon p_0^2 - a) + 6\epsilon p_0^4 - 2ap_0^2] dt + c_0,$$

где c_0 – произвольная постоянная, система (16) и система

$$\Phi_\xi = \begin{pmatrix} \lambda & p_0 \\ -p_0 & -\lambda \end{pmatrix} \Phi \quad (17)$$

имеют одинаковые решения. Используя метод собственных значений, получим два разных общих решения системы (17):

$$\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1(\lambda + \sqrt{\lambda^2 - p_0^2})e^\eta - c_2 p_0 e^{-\eta} \\ -c_1 p_0 e^\eta + c_2(\lambda + \sqrt{\lambda^2 - p_0^2})e^{-\eta} \end{pmatrix}, \quad |\lambda| > |p_0| \geq 0, \quad (18)$$

а также

$$\begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1(\lambda \cos \theta - \sqrt{p_0^2 - \lambda^2} \sin \theta) - c_2 p_0 \cos \theta \\ -c_1 p_0 \cos \theta + c_2(\lambda \cos \theta + \sqrt{p_0^2 - \lambda^2} \sin \theta) \end{pmatrix}, \quad 0 \leq |\lambda| < |p_0|, \quad (19)$$

где $\eta = \eta(\lambda) = \sqrt{\lambda^2 - p_0^2}\xi$, $\theta = \theta(\lambda) = \sqrt{p_0^2 - \lambda^2}\xi$, а c_1 и c_2 – произвольные постоянные.

Следующим шагом является построение новых решений. Для простоты положим $\eta_i = \eta(\lambda_i)$, $\theta_i = \theta(\lambda_i)$, где $i = 1, 2$. Из (18) получим

$$\begin{aligned} \varphi_1 \varphi_2 &= (\lambda + \sqrt{\lambda^2 - p_0^2})[2\lambda c_1 c_2 - p_0(c_1^2 e^{2\eta} + c_2^2 e^{-2\eta})] = \\ &= \begin{cases} (\lambda + \sqrt{\lambda^2 - p_0^2})(\lambda - p_0 \operatorname{ch} 2\eta), & c_1 = c_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ (\lambda + \sqrt{\lambda^2 - p_0^2})(-\lambda - p_0 \operatorname{ch} 2\eta), & c_1 = -c_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \end{cases} \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \varphi_1^2 + \varphi_2^2 &= 2(\lambda + \sqrt{\lambda^2 - p_0^2})[\lambda(c_1^2 e^{2\eta} + c_2^2 e^{-2\eta}) - 2p_0 c_1 c_2] = \\ &= \begin{cases} 2(\lambda + \sqrt{\lambda^2 - p_0^2})(\lambda \operatorname{ch} 2\eta - p_0), & c_1 = c_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ 2(\lambda + \sqrt{\lambda^2 - p_0^2})(\lambda \operatorname{ch} 2\eta + p_0), & c_1 = -c_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \end{cases} \end{aligned} \quad (21)$$

и

$$\begin{aligned} \varphi_1^2 - \varphi_2^2 &= 2\sqrt{\lambda^2 - p_0^2}(\lambda + \sqrt{\lambda^2 - p_0^2})(c_1^2 e^{2\eta} - c_2^2 e^{-2\eta}) = \\ &= 2\sqrt{\lambda^2 - p_0^2}(\lambda + \sqrt{\lambda^2 - p_0^2}) \operatorname{sh} 2\eta, \quad c_1 = \pm c_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}. \end{aligned} \quad (22)$$

Подстановка $p = p_0$ и (20), (21) в (6) приводит к новым солитонным решениям уравнения (2):

$$p'_1 = \frac{2\lambda_1^2 - p_0^2 - \lambda_1 p_0 \operatorname{ch} 2\eta_1}{\lambda_1 \operatorname{ch} 2\eta_1 - p_0}$$

и

$$p'_2 = \frac{p_0^2 - 2\lambda_1^2 - \lambda_1 p_0 \operatorname{ch} 2\eta_1}{\lambda_1 \operatorname{ch} 2\eta_1 + p_0}.$$

Одновременно из (19) получим

$$\begin{aligned} \phi_1 \phi_2 &= [c_1 c_2 (\lambda^2 + p_0^2) - \lambda p_0 (c_1^2 + c_2^2)] \cos^2 \theta + \\ &\quad + c_1 c_2 (\lambda^2 - p_0^2) \sin^2 \theta + p_0 \sqrt{p_0^2 - \lambda^2} (c_1^2 - c_2^2) \cos \theta \sin \theta = \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2}(\lambda - p_0)(\lambda - p_0 \cos 2\theta), & c_1 = c_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ -\frac{1}{2}(\lambda + p_0)(\lambda + p_0 \cos 2\theta), & c_1 = -c_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \end{cases} \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \phi_1^2 + \phi_2^2 &= [(c_1^2 + c_2^2)(\lambda^2 + p_0^2) - 4\lambda p_0 c_1 c_2] \cos^2 \theta + (p_0^2 - \lambda^2) \sin^2 \theta = \\ &= \begin{cases} (p_0 - \lambda)(p_0 - \lambda \cos 2\theta), & c_1 = c_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ (p_0 + \lambda)(p_0 + \lambda \cos 2\theta), & c_1 = -c_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \end{cases} \end{aligned} \quad (24)$$

и

$$\begin{aligned} \phi_1^2 - \phi_2^2 &= (c_1^2 - c_2^2)(\lambda^2 - p_0^2) \cos 2\theta + [2c_1 c_2 p_0 - \lambda(c_1^2 + c_2^2)] \sqrt{p_0^2 - \lambda^2} \sin 2\theta = \\ &= \begin{cases} -\sqrt{p_0^2 - \lambda^2}(\lambda - p_0) \sin 2\theta, & c_1 = c_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ -\sqrt{p_0^2 - \lambda^2}(\lambda + p_0) \sin 2\theta, & c_1 = -c_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}. \end{cases} \end{aligned} \quad (25)$$

Подставляя $p = p_0$, (23) и (24) в (6), получим новые периодические решения уравнения (2):

$$p'_3 = \frac{2\lambda_1^2 - p_0^2 - \lambda_1 p_0 \cos 2\theta_1}{\lambda_1 \cos 2\theta_1 - p_0}$$

и

$$p'_4 = \frac{p_0^2 - 2\lambda_1^2 - \lambda_1 p_0 \cos 2\theta_1}{\lambda_1 \cos 2\theta_1 + p_0}.$$

Многоволновые решения нелинейных эволюционных уравнений обычно очень сложные, поэтому построим сначала соответствующее формальное решение. Для удобства положим $\varphi'_i = \varphi_i|_{\lambda=\lambda_1}$, $\varphi''_i = \varphi_i|_{\lambda=\lambda_2}$, где $i = 1, 2$.

С учетом (7) формальное решение системы АКНС, связанное с p' , задается выражением

$$\begin{pmatrix} \bar{\varphi}_1 \\ \bar{\varphi}_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\varphi_1'^2 + \varphi_2'^2} \begin{pmatrix} \lambda \varphi_1(\varphi_1'^2 + \varphi_2'^2) - \lambda_1 \varphi_1(\varphi_1'^2 - \varphi_2'^2) - 2\lambda_1 \varphi_1 \varphi_2 \varphi_2' \\ \lambda \varphi_2(\varphi_1'^2 + \varphi_2'^2) + \lambda_1 \varphi_2(\varphi_1'^2 - \varphi_2'^2) - 2\lambda_1 \varphi_1 \varphi_2 \varphi_1' \end{pmatrix}, \quad (26)$$

которое подразумевает, что

$$\begin{aligned} 4\lambda_2 \frac{\bar{\varphi}_1 \bar{\varphi}_2}{\bar{\varphi}_1^2 + \bar{\varphi}_2^2} \Big|_{\lambda=\lambda_2} &= \frac{4\lambda_2}{\varphi_1'^2 + \varphi_2'^2} \times \\ &\times \left\{ \frac{(\lambda_2^2 - \lambda_1^2) \varphi_1'' \varphi_2'' (\varphi_1'^2 + \varphi_2'^2)^2 + 8\lambda_1^2 \varphi_1'^2 \varphi_2'^2 \varphi_1'' \varphi_2''}{(\lambda_2^2 + \lambda_1^2)(\varphi_1'^2 + \varphi_2'^2)(\varphi_1''^2 + \varphi_2''^2) - 2\lambda_1 \lambda_2 (\varphi_1'^2 - \varphi_2'^2)(\varphi_1''^2 - \varphi_2''^2) - 8\lambda_1 \lambda_2 \varphi_1' \varphi_2' \varphi_1'' \varphi_2''} + \right. \\ &+ \left. \frac{2\lambda_1^2 \varphi_1' \varphi_2' (\varphi_1'^2 - \varphi_2'^2)(\varphi_1''^2 - \varphi_2''^2) - 2\lambda_1 \lambda_2 \varphi_1' \varphi_2' (\varphi_1'^2 + \varphi_2'^2)(\varphi_1''^2 + \varphi_2''^2)}{(\lambda_2^2 + \lambda_1^2)(\varphi_1'^2 + \varphi_2'^2)(\varphi_1''^2 + \varphi_2''^2) - 2\lambda_1 \lambda_2 (\varphi_1'^2 - \varphi_2'^2)(\varphi_1''^2 - \varphi_2''^2) - 8\lambda_1 \lambda_2 \varphi_1' \varphi_2' \varphi_1'' \varphi_2''} \right\}. \end{aligned} \quad (27)$$

В то же время комбинация решений (6) и (8) приводит к выражению

$$p'' = p + 4\lambda_1 \frac{\varphi_1' \varphi_2'}{\varphi_1'^2 + \varphi_2'^2} + 4\lambda_2 \frac{\bar{\varphi}_1 \bar{\varphi}_2}{\bar{\varphi}_1^2 + \bar{\varphi}_2^2} \Big|_{\lambda=\lambda_2}.$$

Подставляя (27) в эту формулу, получим

$$\begin{aligned} p'' &= p + \\ &+ \frac{4(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)[\lambda_1 \varphi_1' \varphi_2' (\varphi_1''^2 + \varphi_2''^2) - \lambda_2 \varphi_1'' \varphi_2'' (\varphi_1'^2 + \varphi_2'^2)]}{(\lambda_1^2 + \lambda_2^2)(\varphi_1'^2 + \varphi_2'^2)(\varphi_1''^2 + \varphi_2''^2) - 2\lambda_1 \lambda_2 (\varphi_1'^2 - \varphi_2'^2)(\varphi_1''^2 - \varphi_2''^2) - 8\lambda_1 \lambda_2 \varphi_1' \varphi_2' \varphi_1'' \varphi_2''}. \end{aligned} \quad (28)$$

Снова подставляя $p = p_0$ и (20)–(22) в (28), получим окончательно двухсолитонные решения для уравнения (2):

$$\begin{aligned}
 p_1'' &= p_0 + \\
 &+ \frac{2(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)[\lambda_1(\lambda_1 - p_0 \operatorname{ch} 2\eta_1)(\lambda_2 \operatorname{ch} 2\eta_2 - p_0) - \lambda_2(\lambda_1 \operatorname{ch} 2\eta_1 - p_0)(\lambda_2 - p_0 \operatorname{ch} 2\eta_2)]}{\mu(\lambda_1 \operatorname{ch} 2\eta_1 - p_0)(\lambda_2 \operatorname{ch} 2\eta_2 - p_0) - \gamma k \operatorname{sh} 2\eta_1 \operatorname{sh} 2\eta_2 - \gamma(\lambda_1 - p_0 \operatorname{ch} 2\eta_1)(\lambda_2 - p_0 \operatorname{ch} 2\eta_2)}, \\
 p_2'' &= p_0 + \\
 &+ \frac{2(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)[\lambda_1(\lambda_1 - p_0 \operatorname{ch} 2\eta_1)(\lambda_2 \operatorname{ch} 2\eta_2 + p_0) + \lambda_2(\lambda_1 \operatorname{ch} 2\eta_1 - p_0)(\lambda_2 + p_0 \operatorname{ch} 2\eta_2)]}{\mu(\lambda_1 \operatorname{ch} 2\eta_1 - p_0)(\lambda_2 \operatorname{ch} 2\eta_2 + p_0) - \gamma k \operatorname{sh} 2\eta_1 \operatorname{sh} 2\eta_2 + \gamma(\lambda_1 - p_0 \operatorname{ch} 2\eta_1)(\lambda_2 + p_0 \operatorname{ch} 2\eta_2)}, \\
 p_3'' &= p_0 - \\
 &- \frac{2(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)[\lambda_1(\lambda_1 + p_0 \operatorname{ch} 2\eta_1)(\lambda_2 \operatorname{ch} 2\eta_2 - p_0) + \lambda_2(\lambda_1 \operatorname{ch} 2\eta_1 + p_0)(\lambda_2 - p_0 \operatorname{ch} 2\eta_2)]}{\mu(\lambda_1 \operatorname{ch} 2\eta_1 + p_0)(\lambda_2 \operatorname{ch} 2\eta_2 - p_0) - \gamma k \operatorname{sh} 2\eta_1 \operatorname{sh} 2\eta_2 + \gamma(\lambda_1 + p_0 \operatorname{ch} 2\eta_1)(\lambda_2 - p_0 \operatorname{ch} 2\eta_2)}, \\
 p_4'' &= p_0 - \\
 &- \frac{2(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)[\lambda_1(\lambda_1 + p_0 \operatorname{ch} 2\eta_1)(\lambda_2 \operatorname{ch} 2\eta_2 + p_0) - \lambda_2(\lambda_1 \operatorname{ch} 2\eta_1 + p_0)(\lambda_2 + p_0 \operatorname{ch} 2\eta_2)]}{\mu(\lambda_1 \operatorname{ch} 2\eta_1 + p_0)(\lambda_2 \operatorname{ch} 2\eta_2 + p_0) - \gamma k \operatorname{sh} 2\eta_1 \operatorname{sh} 2\eta_2 - \gamma(\lambda_1 + p_0 \operatorname{ch} 2\eta_1)(\lambda_2 + p_0 \operatorname{ch} 2\eta_2)},
 \end{aligned}$$

где $\mu = \lambda_1^2 + \lambda_2^2$, $\gamma = 2\lambda_1\lambda_2$, $k = \sqrt{\lambda_1^2 - p_0^2}\sqrt{\lambda_2^2 - p_0^2}$, $|\lambda_i| > |p_0| \geq 0$, $i = 1, 2$.

Поскольку решение (28) справедливо и в случае $0 \leq |\lambda| < |p_0|$, аналогичным образом, используя (23)–(25) и (28), можно получить дупериодические решения уравнения (2):

$$\begin{aligned}
 p_5'' &= p_0 + \\
 &+ \frac{2(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)[\lambda_1(\lambda_1 - p_0 \cos 2\theta_1)(\lambda_2 \cos 2\theta_2 - p_0) - \lambda_2(\lambda_1 \cos 2\theta_1 - p_0)(\lambda_2 - p_0 \cos 2\theta_2)]}{\mu(\lambda_1 \cos 2\theta_1 - p_0)(\lambda_2 \cos 2\theta_2 - p_0) - \gamma s \sin 2\theta_1 \sin 2\theta_2 - \gamma(\lambda_1 - p_0 \cos 2\theta_1)(\lambda_2 - p_0 \cos 2\theta_2)}, \\
 p_6'' &= p_0 + \\
 &+ \frac{2(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)[\lambda_1(\lambda_1 - p_0 \cos 2\theta_1)(\lambda_2 \cos 2\theta_2 + p_0) + \lambda_2(\lambda_1 \cos 2\theta_1 - p_0)(\lambda_2 + p_0 \cos 2\theta_2)]}{\mu(\lambda_1 \cos 2\theta_1 - p_0)(\lambda_2 \cos 2\theta_2 + p_0) - \gamma s \sin 2\theta_1 \sin 2\theta_2 + \gamma(\lambda_1 - p_0 \cos 2\theta_1)(\lambda_2 + p_0 \cos 2\theta_2)}, \\
 p_7'' &= p_0 - \\
 &- \frac{2(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)[\lambda_1(\lambda_1 + p_0 \cos 2\theta_1)(\lambda_2 \cos 2\theta_2 - p_0) + \lambda_2(\lambda_1 \cos 2\theta_1 + p_0)(\lambda_2 - p_0 \cos 2\theta_2)]}{\mu(\lambda_1 \cos 2\theta_1 + p_0)(\lambda_2 \cos 2\theta_2 - p_0) - \gamma s \sin 2\theta_1 \sin 2\theta_2 + \gamma(\lambda_1 + p_0 \cos 2\theta_1)(\lambda_2 - p_0 \cos 2\theta_2)},
 \end{aligned}$$

а также

$$\begin{aligned}
 p_8'' &= p_0 - \\
 &- \frac{2(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)[\lambda_1(\lambda_1 + p_0 \cos 2\theta_1)(\lambda_2 \cos 2\theta_2 + p_0) - \lambda_2(\lambda_1 \cos 2\theta_1 + p_0)(\lambda_2 + p_0 \cos 2\theta_2)]}{\mu(\lambda_1 \cos 2\theta_1 + p_0)(\lambda_2 \cos 2\theta_2 + p_0) - \gamma s \sin 2\theta_1 \sin 2\theta_2 - \gamma(\lambda_1 + p_0 \cos 2\theta_1)(\lambda_2 + p_0 \cos 2\theta_2)},
 \end{aligned}$$

где $s = \sqrt{p_0^2 - \lambda_1^2}\sqrt{p_0^2 - \lambda_2^2}$ и $0 \leq |\lambda_i| < |p_0|$, $i = 1, 2$.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В выражениях $p_1' - p_4'$ и $p_1'' - p_8''$ амплитуды не зависят от коэффициента возмущения ϵ , от ϵ зависят только скорости волн. Это говорит о том, что влияние на эти решения такого рода малых возмущений, включая диссипацию p_{xxxx} и высшую дисперсию $p^5 p_x$, более изощренно. Они не разрушают и не изменяют форму бегущих решений, но они могут сделать столкновения солитонов неэластичными из-за излучения квазилинейных волн.

В частности, при $p_0 = 0$ можно представить двухсолитонное решение p_1'' в виде

$$p_*'' = \frac{2(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)(\lambda_1 \operatorname{ch} \zeta_2 - \lambda_2 \operatorname{ch} \zeta_1)}{(\lambda_1^2 + \lambda_2^2) \operatorname{ch} \zeta_1 \operatorname{ch} \zeta_2 - 2\lambda_1 \lambda_2 (1 + \operatorname{sh} \zeta_1 \operatorname{sh} \zeta_2)},$$

где

$$\zeta_i = 2\eta_i|_{p_0=0} = 2\lambda_i x + \int (32\epsilon\lambda_i^5 - 8a\lambda_i^3) dt + 2\lambda_i c_0, \quad i = 1, 2.$$

С одной стороны, в случае $a = 1$, $\epsilon = 0$ функция p_*'' – обычное известное двухсолитонное решение уравнения мКдФ [18]

$$p_t + 6p^2 p_x + p_{xxx} = 0.$$

С другой стороны, если a и ϵ – постоянные, $\zeta_i = 2\lambda_i x + (32\epsilon\lambda_i^5 - 8a\lambda_i^3)t + 2\lambda_i c_0$, p_*'' становится образцом многосолитонных решений, описывающих чисто упругие столкновения отдельных солитонов, при этом можно выявить важное свойство, состоящее в том, что эти волны взаимодействуют так, чтобы в пределе асимптотически сохранить свой индивидуальный состав. Положим $h(\lambda_i) = 32\epsilon\lambda_i^5 - 8a\lambda_i^3$ и предположим, что $h(\lambda_2) > h(\lambda_1)$, $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$. Поскольку $\zeta_2 = (\lambda_2/\lambda_1)\zeta_1 + 2\lambda_2[h(\lambda_2) - h(\lambda_1)]t$, при фиксированном ζ_1 получим пару асимптотических солитонных решений

$$p_*'' \sim -2\lambda_1 \operatorname{sech}(\zeta_1 \mp v_0), \quad t \rightarrow \pm\infty, \quad (29)$$

где $v_0 = \operatorname{th}^{-1}(2\lambda_1\lambda_2/(\lambda_1^2 + \lambda_2^2))$. Аналогично при фиксированном значении ζ_2 появляется другая пара асимптотических солитонных решений:

$$p_*'' \sim 2\lambda_2 \operatorname{sech}(\zeta_2 \pm v_0), \quad t \rightarrow \pm\infty. \quad (30)$$

С помощью p_*'' (29) и (30) нетрудно показать, что единственным эффектом взаимодействия двух уединенных волн является сдвиг фаз, причем полный сдвиг фазы солитона в точности равен сумме частичных сдвигов в результате отдельных столкновений между всеми присутствующими солитонами. Кроме того, заметим, что сдвиг фазы не меняется под воздействием ни одного из возмущающих слагаемых и не имеет ничего общего с коэффициентом a .

Известно, что уравнение мКдФ возникает в качестве приближенного уравнения, справедливого в некотором асимптотическом смысле. Принимая во внимание дополнительные физические факторы, можно получить различные виды малых возмущений уравнения мКдФ. Дифференциальное уравнение (2) настолько информативно, что оно может хорошо отражать соответствующие физические ситуации. Однако его математический анализ может оказаться слишком трудным из-за высших нелинейных дисперсионных членов и высших членов с пространственной дисперсией. Тем не менее, основываясь на работе [18], мы подробно обсудили систему АКНС для уравнения (2) и построили некоторые точные двухволновые решения с помощью метода преобразований Дарбу.

Благодарности. Работа выполнена при поддержке Chinese Natural Science Foundation (грант № 11261001) и Yunnan Provincial Department of Education Research Foundation (грант № 2012Y130).

Список литературы

- [1] R. Hirota, *J. Phys. Soc. Japan*, **33**:5 (1972), 1456–1458.
- [2] Y. Huang, *Nonlinear Dynam.*, **77**:3 (2014), 437–444.
- [3] Y. S. Kivshar, B. A. Malomed, *Rev. Modern Phys.*, **61**:4 (1989), 763–915.
- [4] J. Mason, E. Knobloch, *Phys. D*, **205**:1–4 (2005), 100–124.
- [5] J. L. Hu, X. Feng, Z. Li, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, **5**:3 (2000), 118–124.
- [6] H. Triki, A.-M. Wazwaz, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, **19**:3 (2014), 404–408.
- [7] H. Liu, J. Li, L. Liu, *J. Math. Anal. Appl.*, **368**:2 (2010), 551–558.
- [8] A. H. Khater, M. M. Hassan, R. S. Temsah, *Math. Comput. Simul.*, **70**:4 (2005), 221–226.
- [9] S. Bilige, T. Chaolu, *Appl. Math. Comput.*, **216**:11 (2010), 3146–3153.
- [10] A.-M. Wazwaz, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, **12**:6 (2007), 904–909.
- [11] A.-M. Wazwaz, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, **12**:7 (2007), 1172–1180.
- [12] A.-M. Wazwaz, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, **15**:11 (2010), 3270–3273.
- [13] Y. Zarmi, *Phys. D*, **237**:23 (2008), 2987–3007.
- [14] A. Veksler, Y. Zarmi, *Phys. D*, **217**:1 (2006), 77–87, arXiv: nlin/0505042.
- [15] X. Jiao, H.-Q. Zhang, *Appl. Math. Comput.*, **172**:1 (2006), 664–677.
- [16] J. Yu, W. Zhang, X. Gao, *Chaos Solitons Fractals*, **33**:4 (2007), 1307–1313.
- [17] X. Jiao, Y. Zheng, B. Wu, *Appl. Math. Comput.*, **218**:17 (2012), 8486–8491.
- [18] C. Gu, H. Hu, Z. Zhou, “Darboux transformation”, *Soliton Theory and its Applications On Geometry*, Shanghai Scientific and Technical Publishers, Shanghai, 2005, 5–46.

Поступила в редакцию 3.02.2015,
после доработки 4.03.2015