Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Славнов, Новый подход к квантованию поля Янга–Миллса, *ТМФ*, 2015, том 183, номер 2, 163–176

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8868>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.137.237

26 апреля 2023 г., 15:24:54

© 2015 г.

А. А. Славнов^{*†}

НОВЫЙ ПОДХОД К КВАНТОВАНИЮ ПОЛЯ ЯНГА–МИЛЛСА

Дан обзор работ по новому методу квантования поля Янга–Миллса, применимому как в рамках теории возмущений так и вне нее. Показано, что в модифицированной формулировке теории Янга–Миллса, которая приводит к формальной теории возмущений, совпадающей со стандартной, существуют солитонные решения классических уравнений движения.

Ключевые слова: неабелева калибровочная инвариантность, квантование, неоднозначность квантования, солитон.

DOI: 10.4213/tmf8868

1. ВВЕДЕНИЕ

Прогресс в физике, как правило, связан с введением новой симметрии. Очень малое число задач физики высоких энергий допускает точное решение, однако исходя из соображений симметрии можно сделать ряд предсказаний, проверяемых экспериментально. Хорошей иллюстрацией этого положения может служить теория калибровочных полей. Классическая электродинамика Фарадея–Максвелла полностью описывается тензором напряженности электромагнитного поля $F_{\mu\nu}$. Однако, если мы захотим описывать взаимодействие электромагнитного поля с полями материи, например, электронами, мы обнаружим, что, пользуясь только тензором напряженности $F_{\mu\nu}$, невозможно построить локальный эрмитов гамильтониан, описывающий это взаимодействие. Поэтому электромагнитное поле описывают четырехвектором A_μ , через который выражается тензор напряженности. Вектор A_μ содержит больше компонент, чем требуется для описания эксперимента: известно, что электромагнитное поле трехмерно-поперечно, т. е. векторы поляризации электрического и магнитного полей перпендикулярны трехмерному импульсу. С точки зрения эксперимента нам необходимо знать лишь трехмерно-поперечные составляющие вектора A_μ . Но вектор A_μ , помимо трехмерно-поперечных компонент, имеет еще временную компоненту A_0 и компоненту, параллельную импульсу, в качестве которой

^{*}Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва, Россия.
E-mail: slavnov@mi.ras.ru

[†]Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, физический факультет, Москва, Россия

обычно выбирают A_3 . Ясно, что теория, основанная на векторе A_μ , имеет больше компонент, чем необходимо. Однако одновременно с введением вектора A_μ вводится новая симметрия – градиентная (калибровочная) инвариантность. Эта инвариантность обеспечивает отщепление компонент A_0 и A_3 от трехмерно-поперечных компонент, и наблюдаемые величины не зависят от A_0 и A_3 . Эту же идею можно иллюстрировать моделями, основанными на неабелевой калибровочной группе. Простейший вариант такой теории основан на группе $SU(2)$, он был предложен Янгом и Миллсом [1]. При переходе к квантовой теории в модели Янга–Миллса возникают, помимо нефизических компонент векторного поля, неабелевы антикоммутирующие скалярные поля $\bar{c}$, c – духи Фаддеева–Попова [2], [3]. Можно показать [4], [5], что компоненты A_0 , A_3 и духи Фаддеева–Попова отщепляются от трехмерно-поперечных компонент, и наблюдаемые величины зависят только от трехмерно-поперечных поляризаций векторного поля.

Та же идея лежит в основе перенормируемого описания модели Хиггса [6]–[8], позволяющей без нарушения калибровочной инвариантности ввести массу векторного поля. В этом случае полный спектр теории содержит, помимо компонент A_i и духов Фаддеева–Попова, также голдстоуновские частицы B_a . Как и раньше, можно показать, что компонента A_0 , духи Фаддеева–Попова $\bar{c}$, c и голдстоуновские поля отщепляются от физических компонент векторного поля A_i , $i = 1, 2, 3$, и наблюдаемые величины зависят только от этих компонент.

В этих примерах мы наблюдаем следующую закономерность: для непротиворечивого описания наблюдаемых величин необходимо расширить спектр теории, вводя нефизические возбуждения. При этом нужно позаботиться о том, чтобы в теории появилась новая симметрия, приводящая к отщеплению нефизических степеней свободы от наблюдаемых. Мы собираемся использовать это наблюдение для построения схемы квантования неабелевых калибровочных полей, применимой вне рамок теории возмущений. Будет показано также, что классическая теория Янга–Миллса в модифицированной формулировке, приводящей в квантовом случае к той же формальной теории возмущений, что и стандартная формулировка, обладает солитонными решениями классических уравнений движения. Это противоречит общепринятой точки зрения, согласно которой классическая теория Янга–Миллса не имеет солитонных решений, и согласуется с тем, что невыелет цветных объектов связан с существованием квазичастичных решений классических уравнений, обладающих локализованной конечной энергией.

Говоря о квантовании калибровочных полей вне рамок теории возмущений, мы имеем в виду проблему неоднозначности квантования, отмеченную впервые Грибовым [9]. Как известно, чтобы проквантовать калибровочное поле, нужно наложить условие калибровки, с помощью которого выбирается однозначный представитель в классе калибровочно-эквивалентных конфигураций. В теории Максвелла это означает, что условие калибровки, например кулоновской

$$\partial_i A_i = 0, \quad (1)$$

допускает только тривиальное решение для Φ , где калибровочно-эквивалентные конфигурации имеют вид

$$A_i + \partial_i \Phi. \quad (2)$$

В самом деле, если выполнено условие (1), то функция, на которую отличаются калибровочно-эквивалентные конфигурации, должна удовлетворять уравнению

$$\Delta\Phi = 0, \quad (3)$$

т. е. быть гармонической функцией. Как известно, гармоническая функция достигает экстремальных значений на границе. Поскольку $\Phi(x)$ должна стремиться к нулю на пространственной бесконечности, мы делаем вывод, что эта функция тождественно равна нулю. Следовательно, в случае абелевой калибровочной группы кулоновская калибровка однозначно выделяет представителя в классе калибровочно-эквивалентных конфигураций.

Однако в случае простейшей неабелевой группы $SU(2)$ уравнение, соответствующее (3), имеет вид

$$\Delta\Phi^a + g\partial_i(\varepsilon^{abc}A_i^b\Phi^c) = 0. \quad (4)$$

Это уравнение, даже если наложено условие $\Phi(x) \rightarrow 0$ при $|x| \rightarrow \infty$, имеет нетривиальные решения. В рамках теории возмущений по константе связи решение уравнения (4) тривиально. Действительно, если искать Φ в виде формального ряда

$$\Phi = \Phi_0 + g\Phi_1 + g^2\Phi_2 + \dots, \quad (5)$$

то по теории возмущений мы получим

$$\Phi_0 = \Phi_1 = \Phi_2 = \dots = 0. \quad (6)$$

При больших g уравнение (4) имеет нетривиальные решения, стремящиеся к нулю на пространственной бесконечности. Таким образом, схема квантования Фаддеева–Попова–де Витта, основанная на предположении, что условие кулоновской калибровки однозначно выделяет представителя в классе калибровочно-эквивалентных конфигураций, строго говоря, неприменима вне рамок теории возмущений. Если же мы попробуем применять ее при больших g , то это приведет к появлению сингулярностей в континуальном интеграле для матрицы рассеяния. Зингер обобщил этот результат на любую дифференциальную калибровку [10].

Есть надежда, что можно использовать так называемые алгебраические калибровки, например гамильтонову калибровку $A_0 = 0$. В этом случае вопрос об однозначности выбора калибровки не возникает. Но, полагая в лагранжиане $A_0 = 0$, мы теряем условие связи $D_i P_i^a = 0$, которое должно выполняться для наблюдаемых величин. Наложить это условие на поля, которые при квантовании предполагаются независимыми, нельзя. Можно наложить условие на допустимые векторы состояния:

$$\hat{D}_i \hat{P}_i |\Phi\rangle = 0. \quad (7)$$

Это условие можно решить по теории возмущений, но вопрос о существовании решения уравнения (7) вне рамок теории возмущений остается открытым. Аналогичные проблемы возникают и в других алгебраических калибровках. Кроме того, с практической точки зрения эти калибровки неудовлетворительны, поскольку они нарушают явную лоренц-инвариантность теории, что сильно затрудняет вычисления. Таким образом, в стандартной формулировке квантование неабелевых калибровочных теорий может быть проведено лишь в рамках теории возмущений. Возможный выход из этого положения был предложен в работах Цванцигера [11].

В настоящей работе мы используем другую возможность. Мы показываем, что за счет механизма, описанного выше, т.е. за счет расширения спектра нефизических полей и введения новой симметрии, можно проквантовать неабелеву калибровочную теорию вне рамок теории возмущений. При этом модифицированная теория совпадает со стандартной в рамках формальной теории возмущений, но допускает солитонные решения классических уравнений движения типа магнитного монополя 'т Хоофта–Полякова [12], [13].

2. МОДИФИЦИРОВАННАЯ ТЕОРИЯ ЯНГА–МИЛЛСА

Мы начнем с рассмотрения модифицированной $SU(2)$ -теории, описывающейся лагранжианом

$$L = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^i F_{\mu\nu}^i + (D_\mu \varphi^+)^i (D_\mu \varphi^-)^i + i(D_\mu b)^i (D_\mu e)^i. \quad (8)$$

Здесь $F_{\mu\nu}^i$ – это обычный тензор напряженности поля Янга–Миллса, а D_μ обозначает ковариантную производную. Поля $\varphi^\pm$, b , e являются эрмитовыми и обладают спином ноль. При этом поля $\varphi^\pm$ – коммутирующие элементы алгебры Грассмана, а поля b , e – антикоммутирующие. Поля $\varphi^\pm$, b , e принадлежат присоединенному представлению группы $SU(2)$.

Сначала мы рассмотрим топологически тривиальный сектор. Сдвигая поля φ^- по третьей оси,

$$\varphi_i^- \rightarrow \varphi_i^- - \hat{\mu}, \quad \hat{\mu} = \delta^{i3} m g^{-1}, \quad (9)$$

мы получим следующий лагранжиан:

$$L = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^i F_{\mu\nu}^i + (D_\mu \varphi^+)^i (D_\mu \varphi^-)^i + i(D_\mu b)^i (D_\mu e)^i - (D_\mu \varphi^+)^i (D_\mu \hat{\mu})^i. \quad (10)$$

Этот лагранжиан, очевидно, инвариантен относительно “сдвинутых” калибровочных преобразований

$$\begin{aligned} \delta A_\mu^i &= \partial_\mu \eta^i + g \varepsilon^{ijk} A_\mu^j \eta^k, \\ \delta \varphi_i^+ &= g \varepsilon^{ijk} \varphi_j^+ \eta^k, \quad \delta \varphi_i^- = -m \varepsilon^{i3k} \eta^k + g \varepsilon^{ijk} \varphi_j^- \eta^k, \\ \delta b^i &= g \varepsilon^{ijk} b^j \eta^k, \quad \delta e^i = g \varepsilon^{ijk} e^j \eta^k. \end{aligned} \quad (11)$$

(здесь $i, j, k = 1, 2, 3$). Лагранжиан (10) инвариантен также относительно преобразований суперсимметрии

$$\delta \varphi_i^- = i b_i \epsilon, \quad \delta e_i = \varphi_i^+ \epsilon, \quad \delta b^i = \delta \varphi_i^+ = 0. \quad (12)$$

Это дополнительная симметрия, которая отсутствует в стандартном лагранжиане Янга–Миллса и которая играет основную роль в доказательстве отщепления нефизических полей $\varphi^\pm$, b , e от физических компонент A_μ^{tr} .

Заметим, что калибровочные преобразования сдвигают компоненты поля $\varphi_{1,2}^-$ на произвольные функции. Следовательно, как и в модели Хиггса, в дополнение к исходному калибровочному полю A_μ появляется новое калибровочное поле $\varphi_{1,2}^-$. Выберем калибровку

$$\varphi_{1,2}^- = 0. \quad (13)$$

Эта калибровка, очевидно, является алгебраической и не требует введения духов Фаддеева–Попова. В то же время условие (13) явным образом лоренц-инвариантно. Таким образом, в данной модели удастся ввести алгебраическую калибровку, не нарушающую явную лоренц-инвариантность и, как мы увидим, перенормируемость теории. Остающаяся калибровочная инвариантность, связанная с вращениями вокруг третьей оси в зарядовом пространстве, является абелевой и не приводит к неоднозначности Гривова.

Однако калибровка $\varphi_{1,2}^- = 0$ все еще неоднозначна. Применяя к полям $\varphi_{1,2}^-$ калибровочные преобразования (11), получаем уравнения, которым должна удовлетворять калибровочная функция, чтобы калибровка была однозначной:

$$(m + g\varphi_3^-)\eta^2 = 0, \quad (m + g\varphi_3^-)\eta^1 = 0. \quad (14)$$

Заметим, что в рамках теории возмущений, когда $\eta^a = \eta_0^a + g\eta_1^a + \dots$, единственным решением уравнений (14) является $\eta^{1,2} = 0$. Но для значений φ_3^- , при которых $m - g\varphi_3^- = 0$, выбор калибровки по-прежнему неоднозначен.

Чтобы избавиться от этой неоднозначности, мы сделаем следующую замену переменных в классическом лагранжиане:

$$\begin{aligned} \varphi_3^- &= -\frac{m}{g} \left(\exp \left\{ \frac{gh}{m} \right\} - 1 \right), & \varphi_3^+ &= M^{-1} \tilde{\varphi}_3^+, \\ \varphi_{1,2}^- &= M \tilde{\varphi}_{1,2}^-, & \varphi_{1,2}^+ &= M^{-1} \tilde{\varphi}_{1,2}^+, \\ e &= M^{-1} \tilde{e}, & b &= M \tilde{b}, \end{aligned} \quad (15)$$

где

$$M = \left(1 - \frac{g}{m} \varphi_3^- \right) = \exp \left\{ \frac{gh}{m} \right\}. \quad (16)$$

Вместо калибровки $\varphi_{1,2}^- = 0$ мы наложим условие

$$\tilde{\varphi}_{1,2}^- = 0. \quad (17)$$

В результате мы получим

$$\delta \tilde{\varphi}_{1,2}^- = \pm m \eta^{1,2}. \quad (18)$$

Как видно, неоднозначность фиксации калибровки полностью отсутствует. Эффективный лагранжиан в калибровке (17) имеет вид

$$\begin{aligned} L_{\text{eff}} &= -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^i F_{\mu\nu}^i + \partial_\mu h \partial_\mu \tilde{\varphi}_3^+ - \frac{g}{m} \partial_\mu h \partial_\mu h \tilde{\varphi}_3^+ - \\ &- \left[D_\mu \tilde{b} + \frac{g}{m} \tilde{b} \partial_\mu h \right]^i \left[D_\mu \tilde{e} - \frac{g}{m} \tilde{e} \partial_\mu h \right]^i + \\ &+ mg(A_\mu^a)^2 \tilde{\varphi}_3^+ + g \partial_\mu h A_\mu^a \tilde{\varphi}_a^+ + m \varepsilon^{3ab} \tilde{\varphi}_a^+ \partial_\mu A_\mu^b, \end{aligned} \quad (19)$$

где $a, b = 1, 2$ и $i = 1, 2, 3$. Свободные пропагаторы, определяющиеся лагранжианом (19), имеют вид

$$\begin{aligned} \Delta^{\text{tr}}(A_\mu^a A_\nu^b) &= -i \delta^{ab} \frac{T_{\mu\nu}}{p^2}, & \Delta(A_\mu^a \tilde{\varphi}_b^+) &= \varepsilon^{3ab} \frac{p_\mu}{mp^2}, \\ \Delta(\tilde{b}^i \tilde{e}^j) &= i \delta^{ij} \frac{1}{p^2}, & \Delta(h \tilde{\varphi}_3^+) &= \frac{1}{p^2}, \end{aligned} \quad (20)$$

где $T_{\mu\nu}$ – поперечный проектор. Остальные пропагаторы, отвечающие абелевой подгруппе вращений вокруг третьей оси, можно задать как

$$\Delta(A_\mu^3 A_\nu^3) = -i \frac{T_{\mu\nu}}{p^2}. \quad (21)$$

Легко вычислить индекс расходимости произвольной диаграммы. Он равен

$$n = 4 - 2L_{\tilde{\varphi}_3^+} - 2L_{\tilde{\varphi}_a^+} - L_A - L_e - L_b - L_h. \quad (22)$$

Здесь L_c обозначает число внешних линий поля c . Поскольку лагранжиан взаимодействия содержит лишь тройные вершины с одной производной и четверные вершины без производных, теория, очевидно, перенормируема.

3. УНИТАРНОСТЬ ТЕОРИИ В ФИЗИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Спектр нашей теории содержит несколько нефизических частиц. Это нулевая и третья компоненты A_μ^i , поля $\varphi_a^\pm$, $\varphi_3^\pm$, h и антикоммутирующие поля b^i , c^i . Напомним, что исходный лагранжиан был инвариантен относительно калибровочных преобразований (11) и преобразований суперсимметрии (12). В терминах новых переменных асимптотические калибровочные преобразования будут иметь тот же вид, а преобразования суперсимметрии изменятся следующим образом:

$$\delta \tilde{\varphi}_a^- = i\tilde{b}^a \epsilon, \quad \delta h = i\tilde{b}^3 \epsilon, \quad \delta \tilde{c}^i = \tilde{\varphi}_i^+. \quad (23)$$

Остальные компоненты асимптотических полей не преобразуются. Мы ничего не говорим об абелевых калибровочных преобразованиях, связанных с вращением третьей оси. Эти преобразования не вносят каких-либо дополнительных проблем.

Фиксируем калибровку, отвечающую вращениям вокруг первой и второй оси, добавив к эффективному действию выражение

$$s_1 \int d^4x \bar{c}^a \tilde{\varphi}_a^- = \int d^4x (\lambda^a \tilde{\varphi}_a^- + \bar{c}^a c^a), \quad (24)$$

где s_1 – нильпотентный оператор, подобный обычному БРСТ-оператору, определяющемуся калибровочным преобразованием, которое оставляет инвариантным эффективный лагранжиан (19), записанный в терминах преобразованных переменных. Действие оператора s_1 на духовые поля и поле λ задается формулами

$$(s_1 c)^a = 0, \quad (s_1 \bar{c})^a = \lambda^a, \quad (s_1 \lambda)^a = 0. \quad (25)$$

Эффективное действие с фиксированной калибровкой имеет вид

$$A_{\text{eff}} = \int d^4x (L(x) + \lambda^a \tilde{\varphi}_a^- + m \bar{c}^a c^a - \bar{c}^a \tilde{b}^a), \quad (26)$$

где L обозначает лагранжиан (19), инвариантный относительно калибровочных преобразований и преобразований суперсимметрии, записанных в терминах переменных λ , h , $\tilde{\varphi}_3^\pm$, A_μ , $\tilde{\varphi}_3^\pm$, $\tilde{b}$, $\tilde{e}$. Каноническая фиксация калибровки не включает член $\bar{c}^a \tilde{b}^a$, но этот член можно легко генерировать заменой $c \rightarrow c - \tilde{b} m^{-1}$. Выполняя явно интегрирование по $\bar{c}^a$ и c^a , получим действие, которое инвариантно относительно

одновременных БРСТ-преобразований и преобразований суперсимметрии, с заменой $c \rightarrow \tilde{b}m^{-1}$.

Согласно теореме Нётер инвариантность эффективного действия ведет к существованию сохраняющегося заряда Q , который позволяет выделить физические состояния с помощью требования их аннигиляции зарядом Q . Для асимптотических состояний, которые изучаются в процессе рассеяния, это условие упрощается и принимает вид

$$Q^0|\Phi\rangle_{\text{as}}^{\text{ph}} = 0, \quad (27)$$

где Q^0 – асимптотический оператор, действующий на поля следующим образом:

$$\begin{aligned} Q^0 A_\mu^i &= i \frac{\partial_\mu \tilde{b}^i \epsilon}{m}, & Q^0 \tilde{b}^a &= 0, & Q^0 \tilde{b}^3 &= 0, \\ Q^0 h &= i \tilde{b}^3 \epsilon, & Q^0 \tilde{\varphi}_a^+ &= 0, & Q^0 \tilde{\varphi}_3^+ &= 0, \\ Q^0 \tilde{e}^a &= \tilde{\varphi}_a^+ \epsilon, & Q^0 \tilde{e}^3 &= \tilde{\varphi}_3^+ \epsilon. \end{aligned} \quad (28)$$

Из формул (28) видно, что нефизические поля входят в виде БРСТ-дублетов. Если мы отождествим поле $\tilde{e}^a$ с антидуховым полем $\bar{c}$, а поле $\tilde{b}^a m^{-1}$ – с духовым полем c , то эти преобразования обеспечивают отщепление полей $\tilde{\varphi}_a^+$, $\tilde{e}^a$, $\tilde{b}^a$ и нефизических компонент поля Янга–Миллса от трехмерно-поперечных компонент. Оставшиеся преобразования обеспечивают отщепление компонент $\tilde{e}^3$, $\tilde{b}^3$, h , $\tilde{\varphi}_3^+$. Фиксируя дополнительно абелеву степень свободы векторного поля, мы заключаем, что все нефизические поля отщепляются от трехмерно-поперечных компонент. Такой же вывод можно сделать, рассматривая модель, которая содержит два коммутирующих комплексных скалярных поля и два антикоммутирующих комплексных поля, принадлежащих фундаментальному представлению группы $SU(2)$.

Таким образом, мы показали, что модифицированный лагранжиан, содержащий дополнительные нефизические степени свободы, приводит к тем же результатам, что и стандартный лагранжиан Янга–Миллса. При квантовании этого лагранжиана не возникает неоднозначность фиксации калибровки, и его можно использовать как в рамках теории возмущений, так и вне нее. Изложенные в настоящем обзоре результаты были впервые получены в работах [14]–[18]. Разумеется, полное исследование модели включает вопрос о том, сохраняет ли перенормировка симметрию модели. Такое исследование было выполнено в работе [17].

До сих пор мы рассматривали поля Янга–Миллса с нулевой массой. Эта теория лежит в основе квантовой хромодинамики (КХД). Современная КХД базируется еще на одном существенном постулате – гипотезе о невылете цвета. Явление невылета цветных объектов нельзя объяснить в рамках теории возмущений по константе связи. Для объяснения невылета кварков применяют симуляции на решетке. Используемые для этого модели обычно содержат квазичастичные возбуждения, которые мы будем называть солитонами. С другой стороны, известно, что классические уравнения движения в стандартной формулировке теории Янга–Миллса не имеют солитонных решений [19]–[21]. Однако аргументы, запрещающие существование солитонов в теории Янга–Миллса, неприменимы к модифицированной формулировке, изложенной выше. В следующих разделах будет показано, что классические решения солитонного типа действительно существуют в КХД, основанной на модифицированной формулировке теории Янга–Миллса.

4. РАЗЛОЖЕНИЕ ПО КОНСТАНТЕ СВЯЗИ

Исходный лагранжиан выберем в виде

$$L = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^i F_{\mu\nu}^i + \frac{1}{2}(D_\mu\varphi)^i (D_\mu\varphi)^i - \frac{1}{2}(D_\mu\chi)^i (D_\mu\chi)^i + i(D_\mu b)^i (D_\mu e)^i. \quad (29)$$

Как и раньше, для простоты мы рассматриваем группу $SU(2)$. В этой формуле вместо полей $\varphi^\pm$ мы ввели явно поля χ , обладающие отрицательной энергией. Поля φ , χ коммутируют, а поля b, e антикоммутируют. Все эти поля принадлежат присоединенному представлению группы $SU(2)$.

Будем считать, что поля φ , χ имеют нетривиальное асимптотическое поведение:

$$|\varphi| \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \left| \frac{m}{g} \right|, \quad |\chi| \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \left| \frac{m\alpha}{g} \right|, \quad r = |\mathbf{x}|, \quad (30)$$

где $|\alpha| \leq 1$ и $\alpha \rightarrow 1$ при $g \rightarrow 0$, например

$$\alpha = \frac{g^{-n} - g^n}{g^{-n} + g^n} = 1 - g^{2n} + \dots, \quad (31)$$

так что $\alpha = 1 - O(g^{2n})$. Выбирая n достаточно большим, мы получим в формальной теории возмущений результаты, совпадающие с обычной теорией Янга–Миллса до произвольного порядка по g . В соотношениях (30) m – константа, имеющая размерность массы.

Формальной теорией возмущений мы называем степенной ряд по константе связи независимо от того, сходится он или нет. Даже для отдельных членов ряда при снятии регуляризации предел может не существовать. В КХД предел для отдельных членов ряда не существует из-за инфракрасных сингулярностей. Многочисленные попытки построить теорию Янга–Миллса по аналогии с квантовой электродинамикой не привели к успеху из-за нелинейного взаимодействия квантов поля Янга–Миллса.

Если константа связи мала, как в электродинамике, то обычные соотношения типа условий унитарности и причинности выполнены в формальной теории возмущений в каждом порядке по константе связи. Однако в КХД константа связи не мала, и даже отдельные члены ряда формальной теории возмущений могут не существовать из-за инфракрасных расходимостей. Тем не менее обычно в формальной теории возмущений для поля Янга–Миллса настаивают на выполнении условий типа унитарности и причинности. Такая точка зрения подкрепляется наблюдением джетов, которые свидетельствуют о том, что в основе КХД лежит неабелева калибровочная теория. Однако никаких строгих утверждений здесь сделать нельзя, так как процесс адронизации, играющий существенную роль в образовании джетов, является существенно непертурбативным.

Единственным осмысленным объектом в пертурбативной квантовой теории Янга–Миллса может быть производящий функционал калибровочно-инвариантных операторов. Ниже мы покажем, что в нашей формулировке этот функционал совпадает со стандартным.

Сначала мы рассмотрим топологически тривиальный сектор, отвечающий теории возмущений. В этом случае в качестве третьей оси в зарядовом пространстве можно

выбрать направление, в котором поля не исчезают. Делая сдвиг переменных φ, χ ,

$$\varphi^i = \tilde{\varphi}^i + \delta^{i3} m g^{-1}, \quad \chi^i = \tilde{\chi}^i - \delta^{i3} m \alpha g^{-1}, \quad (32)$$

мы получим лагранжиан, в котором на бесконечности $\tilde{\varphi} = 0, \tilde{\chi} = 0$, и это необходимо для того, чтобы строить теорию возмущений. Мы хотим доказать, что матрица рассеяния, полученная после этого сдвига, в рамках теории возмущений (в пределе $\alpha \rightarrow 1$) совпадает с обычной матрицей рассеяния в теории Янга–Миллса. Если $\alpha \neq 1$, можно говорить о совпадении матриц рассеяния вплоть до произвольно-го порядка формальной теории возмущений. Разумеется, в теории Янга–Миллса матрица рассеяния на массовой поверхности, строго говоря, не существует из-за инфракрасных расходимостей, тем не менее можно говорить об обращении в ноль матричных элементов, которые соответствуют переходам между состояниями, содержащими только физические возбуждения, и состояниями, содержащими нефизические возбуждения. Физическими возбуждениями в обоих случаях являются конечно трехмерно-поперечные компоненты поля Янга–Миллса.

В топологически нетривиальных секторах наша теория отличается от стандартной: теория Янга–Миллса в стандартной формулировке не имеет солитонных возбуждений, в то время как модифицированная формулировка описывает классические солитоны.

В данном случае мы интересуемся только результатами теории возмущений, и можем положить $\alpha = 1$, так как $\alpha = 1 - O(g^{2n})$, где n – произвольный параметр. Ясно, что в этом случае не возникает массового члена для поля Янга–Миллса, поскольку благодаря разным знакам перед членами, зависящими от полей φ и χ , их вклады в массовый член для поля Янга–Миллса взаимно компенсируются.

Лагранжиан, описывающий модифицированную теорию, после сдвига (32) выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} L = & -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^i F_{\mu\nu}^i + D_\mu \tilde{\varphi}_+^i D_\mu \tilde{\varphi}_-^i + i D_\mu \tilde{b}^i D_\mu \tilde{e}^i + \\ & + m \frac{1+\alpha}{\sqrt{2}} D_\mu \tilde{\varphi}_+^i \varepsilon^{ij3} A_\mu^j + m \frac{1-\alpha}{\sqrt{2}} D_\mu \tilde{\varphi}_-^i \varepsilon^{ij3} A_\mu^j + \frac{m^2(1-\alpha^2)}{2} A_\mu^a A_\mu^a. \end{aligned} \quad (33)$$

Здесь использованы очевидные обозначения

$$\tilde{\varphi}_\pm^i = \frac{\tilde{\varphi}^i \pm \tilde{\chi}^i}{\sqrt{2}}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (34)$$

Этот лагранжиан при любом α инвариантен относительно “сдвинутых” калибровочных преобразований

$$\begin{aligned} \delta A_\mu^i &= \partial_\mu \eta^i + g \varepsilon^{ijk} A_\mu^j \eta^k, \\ \delta \tilde{\varphi}_-^1 &= -\frac{1+\alpha}{\sqrt{2}} m \eta^2 + g \varepsilon^{1jk} \tilde{\varphi}_-^j \eta^k, & \delta \tilde{\varphi}_+^1 &= -\frac{1-\alpha}{\sqrt{2}} m \eta^2 + g \varepsilon^{1jk} \tilde{\varphi}_+^j \eta^k, \\ \delta \tilde{\varphi}_-^2 &= \frac{1+\alpha}{\sqrt{2}} m \eta^1 + g \varepsilon^{2jk} \tilde{\varphi}_-^j \eta^k, & \delta \tilde{\varphi}_+^2 &= \frac{1-\alpha}{\sqrt{2}} m \eta^1 + g \varepsilon^{2jk} \tilde{\varphi}_+^j \eta^k, \\ \delta \tilde{\varphi}_-^3 &= g \varepsilon^{3jk} \tilde{\varphi}_-^j \eta^k, & \delta \tilde{\varphi}_+^3 &= g \varepsilon^{3jk} \tilde{\varphi}_+^j \eta^k, \\ \delta \tilde{b}^i &= g \varepsilon^{ijk} \tilde{b}^j \eta^k, & \delta \tilde{e}^i &= g \varepsilon^{ijk} \tilde{e}^j \eta^k. \end{aligned} \quad (35)$$

В теории возмущений отсутствует неоднозначность Грибова, поэтому мы можем выбрать калибровку $\partial_\mu A_\mu = 0$, введя одновременно духи Фаддеева–Попова $\bar{c}$, c .

Матрица рассеяния при $\alpha = 1$ может быть записана в виде континуального интеграла

$$S = \int d\mu \exp \left\{ i \left[\int d^4x \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^i F_{\mu\nu}^i + D_\mu \tilde{\varphi}_+^i D_\mu \tilde{\varphi}_-^i + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \lambda^i \partial_\mu A_\mu^i + i \partial_\mu \bar{c}^i D_\mu c^i + i D_\mu \tilde{b}^i D_\mu \tilde{e}^i + m\sqrt{2} D_\mu \tilde{\varphi}_+^i \varepsilon^{ij3} A_\mu^j \right) \right] \right\}, \quad (36)$$

где мера интегрирования $d\mu$ представляет собой произведение дифференциалов всех полей, входящих в лагранжиан.

При $\alpha = 1$ лагранжиан (33) инвариантен также относительно преобразований суперсимметрии

$$\delta \tilde{\varphi}_-^i = \tilde{b}^i \epsilon, \quad \delta \tilde{e}^i = \tilde{\varphi}_+^i \epsilon, \quad \delta \tilde{b}^i = \delta \tilde{\varphi}_+^i = 0. \quad (37)$$

Легко видеть, что эти преобразования нильпотентны,

$$\delta^2 \tilde{\varphi}_-^i = 0, \quad \delta^2 \tilde{e}^i = 0. \quad (38)$$

Эта инвариантность обеспечивает отщепление возбуждений, соответствующих полям $\tilde{\varphi}_\pm$, $\tilde{b}$, $\tilde{e}$. Как и в предыдущем разделе, инвариантность эффективного действия относительно БРСТ-преобразований и преобразований суперсимметрии согласно теореме Нётер порождает сохраняющиеся заряды Q_B , Q_S , и асимптотические состояния можно выбрать так, что они будут удовлетворять уравнениям

$$Q_B^0 |\psi\rangle_{\text{ph}} = 0, \quad Q_S^0 |\psi\rangle_{\text{ph}} = 0, \quad [Q_B^0, Q_S^0]_+ = 0, \quad (39)$$

где Q_B^0 и Q_S^0 – асимптотические заряды. Любой вектор, удовлетворяющий уравнениям (39), имеет вид

$$|\psi\rangle_{\text{ph}} = |\psi\rangle_{\text{tr}} + |N\rangle, \quad (40)$$

где $|\psi\rangle_{\text{tr}}$ – это вектор, содержащий только поперечные кванты поля Янга–Миллса, а $|N\rangle$ – это вектор с нулевой нормой. Отсюда следует совпадение матрицы рассеяния в нашем подходе со стандартной матрицей рассеяния для поля Янга–Миллса.

Доказательство, однако, было формальным, поскольку матрица рассеяния в теории Янга–Миллса не существует из-за инфракрасных расходимостей. Тем не менее мы можем говорить об обращении в ноль матричных элементов, отвечающих переходам между физическими и нефизическими состояниями.

Единственные нетривиальные объекты, имеющие смысл в пертурбативной теории Янга–Миллса, – это корреляционные функции калибровочно-инвариантных операторов. Легко видеть, что эти корреляционные функции совпадают в стандартной и модифицированной формулировках с точностью до произвольного порядка теории возмущений. В самом деле, можно повторить рассуждения, приведенные выше, и показать, что эти корреляционные функции даются континуальным интегралом

$$Z = \int d\mu \left\{ \exp \left[i \int dx \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^i F_{\mu\nu}^i + D_\mu \tilde{\varphi}_+^i D_\mu \tilde{\varphi}_-^i + m\sqrt{2} D_\mu \tilde{\varphi}_+^i \varepsilon^{ij3} A_\mu^j + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \lambda^i \partial_\mu A_\mu^i + i \partial_\mu \bar{c}^i D_\mu c^i + i D_\mu \tilde{b}^i D_\mu \tilde{e}^i + J(x) O(x) \right) \right] \right\}, \quad (41)$$

где $O(x)$ – некоторый калибровочно-инвариантный оператор, зависящий только от поля $A_\mu(x)$, и $J(x)$ – источник. Граничные условия для всех полей в равенстве (41) отвечают вакуумным состояниям.

В производящем функционале (41) при $m = 0$ мы можем выполнить интегрирование по полям $\tilde{\varphi}_\pm$, e , b . Детерминанты, возникающие при таком интегрировании, компенсируют друг друга, поскольку поля $\tilde{\varphi}_\pm$ и b , e имеют противоположные статистики, и мы получаем стандартное выражение для производящего функционала корреляционных функций калибровочно-инвариантных операторов в теории Янга–Миллса:

$$Z = \int d\tilde{\mu} \left\{ \exp \left[i \int dx \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^i F_{\mu\nu}^i + \lambda^i \partial_\mu A_\mu^i + i \partial_\mu \bar{c}^i D_\mu c^i + J(x) O(x) \right) \right] \right\}, \quad (42)$$

где мера интегрирования $d\tilde{\mu}$ представляет собой произведение дифференциалов,

$$d\tilde{\mu} = dA_\mu^i d\lambda^j d\bar{c}^k dc^l. \quad (43)$$

К такому же выводу можно прийти, если работать в калибровке, применимой вне рамок теории возмущений, например $\tilde{\varphi}_-^a = 0$, $a = 1, 2$, $\partial_\mu A_\mu^3 = 0$. От этой калибровки можно перейти к любой допустимой калибровке. В следующем разделе мы рассмотрим классическую теорию в гамильтоновой калибровке $A_0 = 0$.

5. СОЛИТОННЫЕ ВОЗБУЖДЕНИЯ В МОДИФИЦИРОВАННОЙ ТЕОРИИ ЯНГА–МИЛЛСА

В этом разделе мы покажем, что рассмотренная выше модель обладает нетривиальными солитонными возбуждениями типа магнитного монополя 'т Хоофта–Полякова. В своем изложении мы следуем работе [22]. Теперь все индексы принимают значения 1, 2, 3.

Мы рассматриваем классические решения для действия (29) и классические солитоны, имеющие асимптотики

$$\varphi^i \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \frac{x^i m}{rg}, \quad \chi^i \xrightarrow{r \rightarrow \infty} -\frac{x^i m \alpha}{rg}. \quad (44)$$

Мы имеем дело со стационарными решениями в калибровке $A_0 = 0$.

Мы будем работать в топологически нетривиальном секторе и искать непертурбативные солитонные решения классических уравнений движения

$$\begin{aligned} D_i F_{ij}^a + g \varepsilon^{alm} (D_j \varphi)^l \varphi^m - g \varepsilon^{akn} (D_j \chi)^k \chi^n &= 0, & A_i^a \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \varepsilon^{aij} \frac{x^j}{gr^2}, \\ D_i (D_i \varphi)^n &= 0, & \varphi^n(x) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \frac{x^n m}{gr}, \\ D_i (D_i \chi)^n &= 0, & \chi^n(x) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} -\frac{\alpha x^n m}{gr}. \end{aligned} \quad (45)$$

Наложённые асимптотические условия обеспечивают убывание ковариантных производных полей φ , χ , что важно для конечности энергии солитона. С той же целью мы рассматриваем только решения, несингулярные при $r \rightarrow 0$. Мы не можем пренебречь членами, малыми при формальном использовании теории возмущений, поскольку ищем солитонные решения, которые нельзя получить в теории возмущений.

Заметим также, что в КХД константа связи не мала, поэтому выводы, полученные в рамках формальной теории возмущений, могут быть несправедливы.

Мы пользуемся анзацем 'т Хоофта–Полякова

$$\begin{aligned} A_a^i(x) &= \varepsilon^{aij} \frac{x^j}{r} W(r), & A_0(x) &= 0, \\ \varphi^i(x) &= \delta^{ai} \frac{x_a}{r} F(r), & \chi^i(x) &= \delta^{ai} \frac{x_a}{r} G(r), \\ W(r) &\xrightarrow{r \rightarrow \infty} (gr)^{-1}, & F(r) &\xrightarrow{r \rightarrow \infty} F \operatorname{ch} \gamma, & G(r) &\xrightarrow{r \rightarrow \infty} F \operatorname{sh} \gamma, \\ F \operatorname{ch} \gamma &= \frac{m}{g}, & F \operatorname{sh} \gamma &= -\alpha \frac{m}{g}. \end{aligned} \quad (46)$$

Если g мало и $\alpha \rightarrow 1$, как это происходит в электрослабых моделях, основанных на механизме Хиггса–Брута–Англера, то $\varphi(x) \simeq \chi(x)$, и уравнение для поля Янга–Миллса имеет тот же вид, что и в стандартной теории Янга–Миллса. Это уравнение не имеет солитонных решений. Однако мы можем также рассматривать теории, в которых константа g не мала (например, КХД).

Уравнения (45) можно переписать в терминах функций

$$K(r) = 1 - grW(r), \quad J(r) = F(r)rg, \quad Y(r) = G(r)rg, \quad (47)$$

мы имеем

$$\begin{aligned} r^2 \frac{d^2 K}{dr^2} &= (K^2 + J^2 - Y^2 - 1)K(r), & K(r) &\xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0, \\ r^2 \frac{d^2 J}{dr^2} &= 2K^2 J, & J(r) &\xrightarrow{r \rightarrow \infty} Frg \operatorname{ch} \gamma, \\ r^2 \frac{d^2 Y}{dr^2} &= 2K^2 Y, & Y(r) &\xrightarrow{r \rightarrow \infty} Frg \operatorname{sh} \gamma = -\alpha Frg \operatorname{ch} \gamma. \end{aligned} \quad (48)$$

Следуя работе [23], мы выбираем следующий анзац для решений:

$$\begin{aligned} J(r) &= \Lambda(r) \operatorname{ch} \gamma, & Y(r) &= \Lambda(r) \operatorname{sh} \gamma, \\ \Lambda(r) \operatorname{ch} \gamma &\xrightarrow{r \rightarrow \infty} Frg \operatorname{ch} \gamma, & \Lambda(r) \operatorname{sh} \gamma &\xrightarrow{r \rightarrow \infty} Frg \operatorname{sh} \gamma. \end{aligned} \quad (49)$$

После этого уравнения (48) приобретают вид

$$\begin{aligned} r^2 \frac{d^2 K}{dr^2} &= (K^2 + \Lambda^2 - 1)K, & K &\xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0, \\ r^2 \frac{d^2 \Lambda}{dr^2} &= 2K^2 \Lambda, & \Lambda(r) &\xrightarrow{r \rightarrow \infty} Frg. \end{aligned} \quad (50)$$

Решения этих уравнений хорошо известны [24], [25]:

$$K(r) = \frac{rgF}{\operatorname{sh} rgF}, \quad \Lambda(r) = \frac{rgF}{\operatorname{th} rgF} - 1. \quad (51)$$

Нетрудно вычислить энергию, отвечающему этому решению. Очевидно, что эта энергия положительна и ограничена. Она равна энергии магнитного монополя

$$\begin{aligned} E &= \int d^3x \left[\frac{1}{4} F_{lm}^i F_{lm}^i + \frac{1}{2} (D_l \varphi)^i (D_l \varphi)^i - \frac{1}{2} (D_l \chi)^i (D_l \chi)^i \right] = \\ &= \int d^3x \left[\frac{1}{4} F_{lm}^i F_{lm}^i + \frac{1}{2} (D_l \Lambda)^a (D_l \Lambda)^a \right]. \end{aligned} \quad (52)$$

Можно вычислить и магнитное поле, создаваемое этим решением. Пользуясь калибровочно-инвариантным определением электромагнитного тензора напряженности, получим

$$F_{\mu\nu} = \hat{\Lambda}^a F_{\mu\nu}^a - g^{-1} \varepsilon^{abc} \hat{\Lambda}^a (D_\mu \hat{\Lambda})^b (D_\nu \hat{\Lambda})^c, \quad \hat{\Lambda}^a = \frac{\Lambda^a}{|\Lambda|}, \quad |\Lambda|^2 = \sum_a \Lambda^a \Lambda^a. \quad (53)$$

В результате заключаем, что рассматриваемое возбуждение является магнитным монополем, который создает магнитное поле

$$B^i(x) = \frac{x^i}{gr^3}. \quad (54)$$

Как видно, даже при больших g масса и магнитное поле монополя не зависят от γ и определяются константами F и g .

6. ИТОГИ

В настоящем обзоре мы продемонстрировали, что многие факты, считавшиеся твердо установленными в теории Янга–Миллса (невозможность квантования вне рамок теории возмущений, неизбежное нарушение алгебраической перенормируемой калибровкой явной лоренц-инвариантности, отсутствие классических решений с конечной ограниченной энергией), на самом деле связаны со специальной формулировкой теории. Возможна альтернативная формулировка теории Янга–Миллса, которая в рамках формальной теории возмущений дает те же результаты, что и стандартная, и позволяет преодолеть отмеченные трудности. Эта формулировка следует общей тенденции развития теории калибровочных полей – введению новых нефизических степеней свободы и расширению группы симметрии теории. Таким образом удастся, в частности, проквантовать теорию Янга–Миллса, не ограничиваясь рамками теории возмущений. Разумеется, это не решает проблемы вычислений вне рамок теории возмущений, однако показывает, что отсутствие солитонных возбуждений, которые, по распространенному мнению, приводят к невыету цветных объектов, не является неотъемлемой характеристикой теории Янга–Миллса. Как было показано выше, эта теория допускает альтернативную формулировку, обладающую солитонными решениями классических уравнений движения. Эта формулировка позволяет также построить инфракрасную регуляризацию, сохраняющую явную калибровочную и лоренц-инвариантность теории [18].

Благодарности. Я хотел бы поблагодарить за полезные дискуссии Л. Альвареса-Гоме, Д. В. Быкова, Л. Д. Фаддеева, В. А. Рубакова и Р. Стора. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 14-50-00005) в Математическом институте им. В. А. Стеклова РАН.

Список литературы

- [1] C. N. Yang, R. L. Mills, *Phys. Rev.*, **96**:1 (1954), 191–195.
- [2] L. D. Faddeev, V. N. Popov, *Phys. Lett. B*, **25**:1 (1967), 29–30.
- [3] B. S. DeWitt, *Phys. Rev.*, **160**:5 (1967), 1113–1148; **162**:5 (1962), 1195–1239.
- [4] G. Cursi, F. Ferrari, *IL Nuovo Cimento A Ser. 11*, **35**:3 (1976), 273–279.

- [5] T. Kugo, I. Ojima, *Progr. Theor. Phys. Suppl.*, **66**:1 (1979), 1–130.
- [6] R. Brout, F. Englert, *Phys. Rev. Lett.*, **13**:9 (1964), 321–323.
- [7] P. W. Higgs, *Phys. Lett.*, **12**:2 (1964), 132–133.
- [8] T. W. B. Kibble, *Phys. Rev.*, **155**:5 (1967), 1554–1561.
- [9] V. N. Gribov, *Nucl. Phys. B*, **139**:1–2 (1978), 1–19.
- [10] I. Singer, *Commun. Math. Phys.*, **60**:1 (1978), 7–12.
- [11] D. Zwanziger, *Nucl. Phys. B*, **321**:3 (1989), 591–604; **323**:3 (1989), 513–544.
- [12] G. 't Hooft, *Nucl. Phys. B*, **79**:2 (1974), 276–284.
- [13] А. М. Поляков, *Письма в ЖЭТФ*, **20**:6 (1974), 430–433.
- [14] А. А. Славнов, *JHEP*, **08** (2008), 047, 11 pp., arXiv:0807.1795.
- [15] А. А. Славнов, *ТМФ*, **161**:2 (2009), 204–211.
- [16] А. А. Славнов, *Тр. МИАН*, **272** (2011), 246–255.
- [17] A. Quadri, A. A. Slavnov, *JHEP*, **07** (2010), 087, 22 pp., arXiv:1002.2490.
- [18] А. А. Славнов, *ТМФ*, **181**:1 (2014), 200–205.
- [19] S. Coleman, *Commun. Math. Phys.*, **55**:2 (1977), 113–116.
- [20] S. Deser, *Phys. Lett. B*, **64**:4 (1976), 463–464.
- [21] H. Pagels, *Phys. Lett. B*, **68**:5 (1977), 466.
- [22] А. А. Славнов, *Solitons in the modified Yang–Mills theory*, arXiv:1406.7724.
- [23] B. Julia, A. Zee, *Phys. Rev. D*, **11**:8 (1975), 2227–2232.
- [24] M. K. Prasad, C. M. Sommerfield, *Phys. Rev. Lett.*, **35**:12 (1975), 760–762.
- [25] Е. Б. Богомольный, *ЯФ*, **24**:4 (1976), 861–870.

Поступила в редакцию 10.02.2015