Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. Пелантова, А. М. Переломов, Замечание о диофантовых уравнениях, связанных с квазикристаллами, *ТМФ*, 1998, том 115, номер 3, 477–480

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf887>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.239.49.27

26 апреля 2023 г., 11:42:06

© 1998 г.

Е. Пелантова*, А. М. Переломов†

ЗАМЕЧАНИЕ О ДИОФАНТОВЫХ УРАВНЕНИЯХ, СВЯЗАННЫХ С КВАЗИКРИСТАЛЛАМИ

Строится общее решение трех диофантовых уравнений в кольце целых алгебраического числового поля $\mathbf{Q}[\sqrt{5}]$. Эти уравнения связаны с проблемой определения минимального расстояния в квазикристаллах с 5-кратной симметрией.

1. ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим кольцо целых алгебраического числового поля $\mathbf{Q}[\sqrt{5}]$. Это кольцо имеет вид [1]

$$\mathbf{Z}[\tau] \equiv \{m + n\tau \mid m, n \in \mathbf{Z}\},$$

где $\tau = (1 + \sqrt{5})/2$, т.е. $\tau^2 = \tau + 1$.

$\mathbf{Z}[\tau]$ -решетки являются основными структурами в теории квазикристаллов с 5-кратной симметрией. В [2] было показано, что проблему определения минимального расстояния в квазикристалле, поставленную в [3] для размерностей $d = 2, 3, 4$, можно свести к проблеме отыскания минимального значения некоторой ступенчатой функции на множестве S_d . Для $d = 2, 3, 4$ эти функции S_d определены следующим образом:

$$\begin{aligned} S_2 &= \{(k_1, k_2) \in (\mathbf{Z}[\tau])^2 \mid k_1^2 + k_2^2 - \tau k_1 k_2 = 1\}, \\ S_3 &= \{(k_1, k_2, k_3) \in (\mathbf{Z}[\tau])^3 \mid k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 - k_1 k_2 - \tau k_2 k_3 = 1\}, \\ S_4 &= \{(k_1, k_2, k_3, k_4) \in (\mathbf{Z}[\tau])^4 \mid k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + k_4^2 - k_1 k_2 - k_2 k_3 - \tau k_3 k_4 = 1\}. \end{aligned}$$

Мы собираемся найти общие решения диофантовых уравнений, которым удовлетворяют S_d .

---

*Отдел математики факультета ядерных наук и физической инженерии, Прага, Чешская Республика

†Отдел теоретической физики Университета Сарагосы, Сарагоса, Испания; Институт теоретической и экспериментальной физики, Москва, Россия

2. УРАВНЕНИЕ $k_1^2 + k_2^2 - \tau k_1 k_2 = 1$

Заметим, что множество решений (k_1, k_2) инвариантно относительно преобразований

$$\Phi_1(k_1, k_2) = (k_2, k_1), \quad \Phi_2(k_1, k_2) = (\tau k_2 - k_1, k_2).$$

Нетрудно увидеть, что $\Phi_1^2 = \Phi_2^2 = (\Phi_1 \Phi_2)^{10} = 1$ и что группа G , порожденная Φ_1 и Φ_2 , имеет 20 элементов.

Начиная с очевидного решения $(1, 0)$ и пользуясь преобразованиями группы G , мы получаем десять решений:

$$\begin{array}{ccccccccc} (1, 0) & \xrightarrow{\Phi_1} & (0, 1) & \xrightarrow{\Phi_2} & (\tau, 1) & \xrightarrow{\Phi_1} & (1, \tau) & \xrightarrow{\Phi_2} & (\tau, \tau) \\ \downarrow \Phi_2 & & & & & & & & \\ (-1, 0) & \xrightarrow{\Phi_1} & (0, -1) & \xrightarrow{\Phi_2} & (-\tau, -1) & \xrightarrow{\Phi_1} & (-1, -\tau) & \xrightarrow{\Phi_2} & (-\tau, -\tau). \end{array} \quad (1)$$

Подставляя $k_j = a_j + \tau b_j$, $a_j, b_j \in \mathbf{Z}$, $j = 1, 2$, в $f(k_1, k_2) = k_1^2 + k_2^2 - \tau k_1 k_2 = 1$, мы получаем $f = A + B\tau = 1 + 0\tau$ и, следовательно, фактически, систему двух диофантовых уравнений в $\mathbf{Z}$:

$$A \equiv a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2 - b_1 b_2 - a_1 b_2 - a_2 b_1 = 1, \quad (2)$$

$$B \equiv b_1^2 + b_2^2 + 2(a_1 b_1 + a_2 b_2) - 2b_1 b_2 - a_1 a_2 - a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0. \quad (3)$$

Переписывая (2) в форме

$$a_1^2 + a_2^2 + (b_1 - b_2)^2 + (a_1 - b_2)^2 + (a_2 - b_1)^2 = 2, \quad (4)$$

мы видим, что a_j могут принимать только три значения: ± 1 и 0 . Из (4) и (3) немедленно следует, что не существует решений с $a_1 a_2 \neq 0$ и что все другие решения — это как раз решения, приведенные выше. Итак, мы доказали следующую теорему.

ТЕОРЕМА. *Уравнение*

$$k_1^2 + k_2^2 - \tau k_1 k_2 = 1$$

для двух переменных $k_1, k_2 \in \mathbf{Z}[\tau]$ имеет только десять решений, описанных в (1).

3. УРАВНЕНИЕ $k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 - k_1 k_2 - \tau k_2 k_3 = 1$

Подставляя $k_j = a_j + \tau b_j$, $a_j, b_j \in \mathbf{Z}$, $j = 1, 2, 3$, мы получаем систему двух диофантовых уравнений

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 - a_1 a_2 - b_1 b_2 - a_2 b_3 - a_3 b_2 - b_2 b_3 = 1, \quad (5)$$

$$\begin{aligned} & b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + 2(a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 - b_2 b_3) - \\ & - a_1 b_2 - a_2 b_1 - b_1 b_2 - a_2 a_3 - a_2 b_3 - a_3 b_2 = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Умножая (5) на 12 и преобразуя результат, мы получаем в левой части возникшего равенства сумму квадратов:

$$3(2a_1 - a_2)^2 + 3(2b_1 - b_2)^2 + 3(2a_3 - b_2)^2 + 6(b_3 - b_2)^2 + 2(2a_2 - b_3)^2 + (a_2 - 2b_3)^2 = 12. \quad (7)$$

Теперь ясно, что множество решений конечно. Чтобы найти все эти решения, изучим следующее неравенство с двумя переменными:

$$2(2a_2 - b_3)^2 + (a_2 - 2b_3)^2 \leq 12 \quad (\text{или } a_2^2 + 2(b_3 - a_2)^2 \leq 4) \quad (8)$$

(левая часть этого неравенства — это сумма двух последних квадратов в (7)).

Все пары (a_2, b_3) , удовлетворяющие (8), перечислены ниже:

$$\pm(1, 1), \quad \pm(1, 2), \quad \pm(1, 0), \quad \pm(0, 1), \quad \pm(2, 2) \quad \text{и} \quad (0, 0).$$

Мы можем ограничиться парами с $a_2 + b_3 \geq 0$, т.к. множество решений центрально-симметрично. После простых, но длинных вычислений мы получаем соответствующие решения $(k_1, k_2, k_3) \in S_3$. Для пары $(a_2, b_3) = \pm(1, 1)$ эти решения имеют вид

$$\pm(\tau, \tau^2, \tau), \quad \pm(\tau, \tau^2, \tau^2), \quad \pm(0, 1, \tau), \quad \pm(1, 1, \tau), \quad \pm(1, \tau^2, \tau) \quad \text{и} \quad \pm(1, \tau^2, \tau^2).$$

Для пары $(a_2, b_3) = \pm(1, 0)$ соответствующие решения таковы:

$$\pm(0, 1, 0) \quad \text{и} \quad \pm(1, 1, 0).$$

Для пары $(a_2, b_3) = \pm(0, 1)$ решения имеют вид

$$\pm(\tau, 2\tau, \tau^2), \quad \pm(\tau, \tau, \tau) \quad \text{и} \quad \pm(0, \tau, \tau).$$

Для пар $(a_2, b_3) = \pm(2, 2)$ и $(a_2, b_3) = \pm(1, 2)$ решений нет, а для пары $\pm(0, 0)$ соответствующие решения суть:

$$\pm(1, 0, 0), \quad \pm(0, 0, 1), \quad \pm(0, \tau, 1) \quad \text{и} \quad \pm(\tau, \tau, 1).$$

Таким образом, множество S_3 состоит в точности из 30 элементов.

4. УРАВНЕНИЕ $k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + k_4^2 - k_1k_2 - k_2k_3 - \tau k_3k_4 = 1$

В этом случае подстановка $k_j = a_j + \tau b_j$, $a_j, b_j \in \mathbf{Z}$, $j = 1, 2, 3, 4$, приводит к уравнениям

$$a_1^2 + b_1^2 + a_2^2 + b_2^2 + a_3^2 + b_3^2 + a_4^2 + b_4^2 - a_1a_2 - b_1b_2 - a_2a_3 - b_2b_3 - b_3a_4 - a_3b_4 - b_3b_4 = 1 \quad (9)$$

и

$$\sum_{i=1}^4 b_i^2 + 2 \sum_{i=1}^4 a_i b_i - \sum_{i=1}^3 (a_i b_{i+1} + a_{i+1} b_i + b_i b_{i+1}) - a_3 a_4 - b_3 b_4 = 0. \quad (10)$$

Уравнение (9) эквивалентно следующему равенству:

$$4(2a_1 - a_2)^2 + 4(2a_3 - a_2 - b_4)^2 + 4(2b_3 - b_2 - b_4 - a_4)^2 + a_4^2 + 4(2b_1 - b_2)^2 + \\ + 2(2a_2 - b_4)^2 + 2(2b_2 - b_4 - a_4)^2 + (2b_4 - 3a_4)^2 = 16. \quad (11)$$

После простых, но утомительных вычислений мы получаем 120 решений.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Все найденные решения соответствуют векторам некристаллографической корневой системы (см. [3]). Заранее было ясно, что среди S_d такие элементы должны быть. Главный результат этой статьи состоит в том, что других решений нет.

Первый автор пользуется частичной поддержкой гранта Чешской Республики GAČR 202/97/0218.

Список литературы

- [1] *H. Hasse*. Number theory. New York: Springer-Verlag, 1980.
- [2] *Z. Masáková, J. Patera, E. Pelantová*. On the minimal distance in quasicrystal. Submitted for publication.
- [3] *L. Chen, R.V. Moody, J. Patera*. Non-crystallographic root systems. In: Quasicrystals and discrete geometry. Fields Inst. Commun. Ed. J. Patera (to appear).

Поступила в редакцию 6.XI.1997 г.