Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Ф. Крутов, Р. Г. Полежаев, В. Е. Троицкий, Описание радиационных распадов в рамках мгновенной формы релятивистской квантовой механики, *ТМФ*, 2015, том 184, номер 2, 290–306

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8870>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.73.141

26 апреля 2023 г., 14:14:35

© 2015 г. А. Ф. Крутов*, Р. Г. Полежаев*, В. Е. Троицкий†

ОПИСАНИЕ РАДИАЦИОННЫХ РАСПАДОВ В РАМКАХ МГНОВЕННОЙ ФОРМЫ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ

Разработан метод построения оператора электромагнитного тока перехода между состояниями с различными значениями полного углового момента с учетом условий лоренц-ковариантности и сохранения тока. Процедура реализуется в рамках мгновенной формы релятивистской квантовой механики с помощью общего метода релятивистской параметризации матричных элементов локальных операторов. Метод иллюстрируется расчетом радиационного распада ρ -мезона в пион. В модифицированном импульсном приближении получено аналитическое выражение для переходного формфактора этого процесса в виде интегрального представления дисперсионного типа. Результаты численного расчета согласуются с результатами расчета динамики на световом фронте и моделью векторной мезонной доминантности.

Ключевые слова: оператор электромагнитного тока, радиационные распады, переходные формфакторы, релятивистская квантовая механика.

DOI: 10.4213/tmf8870

1. ВВЕДЕНИЕ

Понимание связи между наблюдаемыми свойствами мезонов или барионов и лежащей в основе этих свойств динамики является серьезным вызовом современной физики адронов.

Теория сильных взаимодействий включает бесконечное число степеней свободы, переносимых локальными полями, т. е. кварками и глюонами. Такого рода теория – квантовая хромодинамика (КХД) – является хорошим кандидатом на полную теорию. Но успех конститuentных моделей показывает, что для описания главных характеристик адронных состояний достаточно использовать только конечное число этих степеней свободы, тогда как остальные оказываются замороженными.

*Самарский государственный университет, Самара, Россия. E-mail: krutov@samsu.ru, polezaev@list.ru

†Научно-исследовательский институт ядерной физики им. Д. В. Скобельцына, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия.
E-mail: troitsky@theory.sinp.msu.ru

Кроме того, как известно, КХД при использовании в качестве расчетной техники пертурбативных методов дает надежные результаты только при описании так называемых “жестких” процессов, которые характеризуются большими переданными импульсами, и не позволяет вычислять характеристики, определяемые “мягкими” процессами. Это касается, в частности, описания формфакторов частиц и других электромагнитных характеристик, именно которые и измеряются в эксперименте. В такой ситуации для описания электромагнитной структуры адронов приходится обращаться к каким-то другим подходам. Один из наиболее хорошо зарекомендовавших себя подходов – это составная релятивистская квантово-механическая модель.

Как и в любом другом теоретическом описании электромагнитной структуры составных систем, в релятивистской составной модели можно выделить три основных момента.

1. Во-первых, это выбор динамики. Мы в настоящей статье используем метод релятивистской квантовой механики (РКМ) с прямым взаимодействием, основы которого были заложены в работе Дирака [1]. В этой работе Дирак ввел три основных типа динамики, отличающихся параметрами эволюции: точечную, мгновенную и динамику на световом фронте. Каждую из этих динамик можно связать с трехмерной гиперповерхностью в четырехмерном пространстве, на которой задаются начальные условия и эволюция которой в дальнейшем описывается. Точечная гиперповерхность задается условиями $-x^\mu x_\mu = a^2$, $t > 0$, мгновенная гиперповерхность – условием $t = 0$, а поверхность светового фронта описывается уравнением $x^0 + x^3 = 0$.

Как известно, следствием релятивистской инвариантности является выполнение коммутационных соотношений алгебры Пуанкаре для генераторов пространственно-временных трансляций $\hat{P}^\mu$ и вращений $\hat{M}^{\mu\nu}$:

$$\begin{aligned} [\hat{M}^{\mu\nu}, \hat{P}^\sigma] &= -i(g^{\mu\sigma} \hat{P}^\nu - g^{\nu\sigma} \hat{P}^\mu), \\ [\hat{M}^{\mu\nu}, \hat{M}^{\sigma\rho}] &= i(g^{\mu\sigma} \hat{M}^{\nu\rho} - g^{\nu\sigma} \hat{M}^{\mu\rho}) - (\sigma \leftrightarrow \rho), \\ [\hat{P}^\mu, \hat{P}^\nu] &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь $g^{\mu\nu}$ – метрический тензор в пространстве Минковского.

Построение представления группы Пуанкаре в гильбертовом пространстве сводится к нахождению генераторов $\hat{P}^\mu$, $\hat{M}^{\mu\nu}$, удовлетворяющих соотношениям (1), в терминах динамических переменных системы. В случае системы невзаимодействующих частиц эта задача не встречает трудностей и генераторы в (1) имеют ясный физический смысл: $\hat{P}^0 \equiv \hat{H}$ – оператор полной энергии, $\hat{\mathbf{P}} = (\hat{P}^1, \hat{P}^2, \hat{P}^3)$ – оператор полного 3-импульса, $\hat{\mathbf{J}} (\hat{M}^{23}, \hat{M}^{31}, \hat{M}^{12})$ – оператор полного углового момента, $\hat{\mathbf{N}} = (\hat{M}^{01}, \hat{M}^{02}, \hat{M}^{03})$ – генераторы лоренцевых бустов.

Однако при включении взаимодействия между частицами на этом пути возникают проблемы, суть которых можно проиллюстрировать следующим образом. Рассмотрим одно из коммутационных соотношений алгебры Пуанкаре (1):

$$[\hat{P}^l, \hat{N}^m] = i\delta^{lm} \hat{H}. \quad (2)$$

Добавим оператор взаимодействия в оператор полной энергии:

$$\hat{H} \rightarrow \hat{H} + \hat{V}.$$

Для сохранения коммутационного соотношения (2) необходимо добавить взаимодействие хотя бы в один генератор в левой части (2). Это будет индуцировать включение взаимодействия в другие генераторы (1). Таким образом, генераторы в (1) разбиваются на два класса: содержащие взаимодействие и не содержащие взаимодействие. Различные способы такого разбиения при условии сохранения алгебры Пуанкаре соответствуют различным типам релятивистских динамик. Эти динамики можно классифицировать по кинематическим подгруппам, т. е. по набору генераторов, не содержащих взаимодействия. Так, в мгновенной форме динамики кинематическая подгруппа – это евклидова группа $\hat{\mathbf{J}}, \hat{\mathbf{P}}$ трехмерного пространства. Она является группой стабильности гиперповерхности $t = 0$. Генераторы, содержащие взаимодействие, а именно гамильтонианы $\hat{H}, \hat{\mathbf{N}}$, описывают эволюцию этой гиперповерхности.

Прямое взаимодействие физически означает взаимодействие на расстоянии, которое передается без полей или других носителей, имеющих собственные степени свободы. Отсутствие посредников, передающих взаимодействие между частицами, математически проявляется в том, что потенциал взаимодействия (или, в квантовом случае, оператор взаимодействия) выражается полностью через переменные, описывающие степени свободы частиц. Это кардинально важно, так как позволяет выделять нужные с точки зрения физики степени свободы.

Здесь просматривается аналогия с процедурой, широко использующейся в теории твердого тела, многие свойства которого тесно связаны с его группой симметрии; при этом специфика формы взаимодействия между его составляющими играет второстепенную роль.

В настоящий момент имеется огромное число конкретных расчетов, базирующихся на модели Дирака. Эти вычисления иллюстрируют мощност и гибкость РКМ как инструмента для изучения систем сильно взаимодействующих частиц в шкале до нескольких ГэВ. Обсуждение и соответствующие ссылки можно найти в обзорах [2]–[8].

В очень важной для РКМ работе [9] было дано первое явное представление алгебры Ли группы Пуанкаре со взаимодействием для двухчастичных систем в мгновенной форме динамики Дирака. Эта конструкция позволяет добавлять взаимодействие пуанкаре-инвариантным способом. Конструкция оказалась весьма удачной и многократно применялась в разного рода задачах (см., например, работы [10]–[12] и приведенные там ссылки). В настоящей работе используется мгновенная форма РКМ.

2. Во-вторых, требуется построить оператор тока перехода. Этот этап важен при любых вариантах исследования структуры частиц, а не только для РКМ. Значимым моментом для всех таких методов является выделение кинематических частей и инвариантных частей (формфакторов) матричных элементов тока. Мы называем представление матричного элемента тока в терминах формфакторов параметризацией. Следует отметить, что именно формфакторы – лоренц-инвариантные функции – определяются, как правило, из экспериментальных данных.

Итак, необходимо рассмотреть матричный элемент электрослабого тока, обладающий корректными трансформационными свойствами, и провести процедуру релятивистской параметризации матричного элемента тока, т. е. выделить релятивистски-инвариантные формфакторы или, другими словами, с помощью теоремы

Вигнера–Эккарта для группы Пуанкаре выделить приведенные матричные элементы [13].

В простых случаях параметризация проводится достаточно легко из общих соображений. Но в более сложных случаях (например, для составных систем с ненулевым полным моментом) необходимо построение специальной математической техники. Именно такой случай составной системы мы и будем рассматривать в настоящей работе. Ранее в работах [14], [15] была разработана процедура построения матричного элемента тока перехода, диагонального по полному моменту.

Целью настоящей работы является создание подхода, обеспечивающего построение оператора электромагнитного тока в релятивистской составной модели для случая недиагонального по полному моменту перехода. Изложение процедуры построения тока иллюстрируется примером описания радиационного перехода $\rho \rightarrow \pi\gamma^*$. Подчеркнем, что переходные формфакторы представляют собой такую же важную характеристику структуры частиц, как и упругие формфакторы.

Отметим еще одно важное обстоятельство, которое следует иметь в виду при исследовании составных систем: строго говоря, все эти формфакторы всегда являются обобщенными функциями.

3. В-третьих, важным моментом является выбор конкретного приближения для расчета. Как правило, для двухкомпонентных систем используют импульсное приближение, которое означает, что виртуальный γ -квант взаимодействует только с одной компонентой (а не с двумя сразу).

Но всегда при выборе приближения следует контролировать, чтобы оно не нарушало релятивистскую инвариантность. В мгновенной форме РКМ импульсное приближение не является релятивистски-инвариантным и зависит от выбора системы координат. Чтобы обеспечить релятивистскую инвариантность, мы строим модифицированное импульсное приближение (МИП). По духу этот метод восходит к работе [16]¹⁾. Он использует двойное интегральное представление по полной массе системы. Эти интегралы возникают в результате решений уравнений типа Мухелишвили–Омнеса. Данный метод подробно изложен в работе [14] (см. разделы 3В, 3С), а его применение к расчету структуры конкретных двухкварковых систем можно найти, например, в статьях [18]–[20]. В частности, метод был применен к расчету формфактора пиона [21], как в асимптотической области [22], так и во времениподобной области [23]. Подчеркнем, что расчет в работе [21] продемонстрировал также и свою предсказательную силу (см. подробности в статьях [24], [25]).

Настоящая статья организована следующим образом. В разделе 2 дано краткое описание общих методов параметризации оператора тока. В разделе 3 строится новый метод параметризации недиагонального по полному моменту матричного элемента электромагнитного тока двухчастичной системы. На основе этого метода в разделе 4 строится матричный элемент тока перехода $\rho \rightarrow \pi\gamma^*$. В разделе 5 выводится интегральное представление для электромагнитного формфактора перехода этого процесса. В разделе 6 проведен расчет переходного формфактора и дано сравнение с результатами других работ. Итоги работы суммированы в кратком заключении.

¹⁾Следует заметить, что из этой же работы [16] выросло близкое направление, обоснованное в статье [17].

2. ОБЩИЙ МЕТОД ПАРАМЕТРИЗАЦИИ МАТРИЧНОГО ЭЛЕМЕНТА ОПЕРАТОРА ТОКА, ДИАГОНАЛЬНОГО ПО ПОЛНОМУ УГЛОВОМУ МОМЕНТУ

Общий метод параметризации операторов (в том числе и операторов тока), диагональных по квантовым числам, был предложен в работе [26]. В настоящем разделе мы дадим краткое схематическое описание методов параметризации.

Параметризация матричного элемента электромагнитного тока одной частицы. Рассмотрим вектор состояния одной свободной частицы в мгновенной форме РКМ:

$$|\vec{p}, M, j, m\rangle, \quad (3)$$

где $\vec{p}$, M , j , m – соответственно трехмерный импульс, масса, спин частицы и проекция спина на ось z (масса и спин в векторе состояния в дальнейшем будут опускаться). Для вектора состояния (3) примем нормировку

$$\langle \vec{p}_1, m | \vec{p}'_1, m' \rangle = 2p_0 \delta(\vec{p}_1 - \vec{p}'_1) \delta_{mm'}. \quad (4)$$

Построение матричного элемента электромагнитного тока производится с помощью процедуры канонической параметризации, которая является аналогом теоремы Вигнера–Экарта [13] для случая группы Пуанкаре. Матричный элемент тока при этом представляется суммой слагаемых, каждое из которых является произведением ковариантного и инвариантного членов. Ковариантная часть такого представления матричного элемента описывает его трансформационные (геометрические) свойства, а вся динамическая информация о переходе, описываемом данным оператором тока, содержится в инвариантной части – приведенных матричных элементах или факторах.

Чтобы параметризовать матричный элемент, из переменных, от которых зависит вектор состояния (3), необходимо построить набор величин соответствующей тензорной размерности. Из переменных, имеющихся в векторах состояния, можно образовать один псевдовектор $\Gamma^\mu(p')$ и три независимых вектора

$$K'_\mu = (p + p')_\mu, \quad K_\mu = (p - p')_\mu, \quad R_\mu = \varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho} p^\nu p'^\lambda \Gamma^\rho(p'), \quad (5)$$

где $\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}$ – антисимметричный псевдотензор четвертого ранга, $\Gamma^\rho(p')$ – оператор релятивистского спина [26]:

$$\Gamma^0(p) = (\vec{p} \vec{j}), \quad \vec{\Gamma}(p) = M \vec{j} + \frac{\vec{p}(\vec{p} \vec{j})}{p_0 + M}, \quad \Gamma^2 = -M^2 j(j+1). \quad (6)$$

Матричный элемент оператора тока будет выражаться через матричные элементы величин (5), (6). При этом каждый такой объект должен быть умножен на сумму линейно независимых матриц по проекциям спина в начальном и конечном состояниях, которые образуют набор линейно независимых лоренцевых скаляров и псевдоскаляров.

Данные линейно независимые инвариантные матрицы строятся из векторов p_μ и $\Gamma_\mu(p')$ по следующим формулам [26]:

$$D^j(p, p') (p_\mu \Gamma^\mu(p'))^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, 2j, \quad (7)$$

где $D^j(p, p')$ – матрица Вигнера, возникающая вследствие того, что спин частицы при переходе из одной инерциальной системы в другую преобразуется по малой группе, изоморфной группе вращений. При четном n матрица будет скаляром, при нечетном – псевдоскаляром.

Таким образом, параметризация матричного элемента одночастичного тока имеет следующий вид:

$$\langle \vec{p}, j, m | j_\mu^0(0) | \vec{p}', j, m' \rangle = \sum_{m''} D_{m, m''}^j(p, p') \langle m'' | F_1 K'_\mu + F_2 \Gamma_\mu(p') + F_3 R_\mu + F_4 K_\mu | m' \rangle, \quad (8)$$

где

$$F_i = \sum_{n=0}^{2j} f_{in}(Q^2) (ip_\mu \Gamma^\mu(p'))^n \quad (9)$$

и $Q^2 = -(p - p')^2$ – квадрат переданного импульса.

При дополнительных условиях самосопряженности, сохранения четности, сохранения тока, а также взаимной ортогональности векторов параметризация матричного элемента принимает форму

$$\begin{aligned} \langle \vec{p}, j, m | j_\mu^0(0) | \vec{p}', j, m' \rangle = \sum_{m''} D_{m, m''}^j(p, p') \langle m'' | F_1 K'_\mu + \\ + \left[F_2 \left(\Gamma_\mu(p') - (p_\mu \Gamma^\mu(p')) \left(\frac{K'_\mu}{K^2} + \frac{K'_\mu}{(K')^2} \right) \right) \right]_+ + i[F_3 R_\mu]_+ | m' \rangle, \end{aligned} \quad (10)$$

где выражение $[\cdot]_+$ означает симметризацию по штрихованным и нештрихованным переменным.

Для частиц спина 1/2 параметризация (10) приводится к выражению

$$\langle \vec{p}, m | j_\mu^0(0) | \vec{p}', m' \rangle = \sum_{m''} D_{m, m''}^{1/2}(p, p') \langle m'' | [f_{10}(Q^2) K_\mu + i f_{30}(Q^2) R_\mu] | m' \rangle; \quad (11)$$

здесь $f_{10}(Q^2)$ и $f_{30}(Q^2)$ имеют смысл электрического и магнитного формфакторов частицы, которые связаны с соответствующими формфакторами Сакса $G_E(Q^2)$ и $G_M(Q^2)$:

$$f_{10}(Q^2) = \frac{2M}{\sqrt{4M^2 + Q^2}} G_E(Q^2), \quad f_{30}(Q^2) = -\frac{4}{M\sqrt{4M^2 + Q^2}} G_M(Q^2). \quad (12)$$

Параметризация матричного элемента электромагнитного тока свободной двухчастичной системы. Перейдем теперь к рассмотрению двухчастичной системы. Для описания двухчастичной системы можно ввести два базиса [27]

$$|\vec{p}_1, m_1; \vec{p}_2, m_2\rangle = |\vec{p}_1, m_1\rangle \otimes |\vec{p}_2, m_2\rangle \quad (13)$$

и

$$|\vec{P}, \sqrt{s}, J, L, S, m\rangle, \quad (14)$$

где $\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$, $\sqrt{s}$ – инвариантная масса системы двух свободных частиц, L – орбитальный момент в системе центра инерции (СЦИ), S – суммарный спин в СЦИ.

Вектор состояния (14) нормирован следующим образом:

$$\langle \vec{P}, \sqrt{s}, J, L, S, m | \vec{P}', \sqrt{s'}, J, L', S', m' \rangle = N \delta(\vec{P} - \vec{P}') \delta(\sqrt{s} - \sqrt{s'}) \delta_{mm'} \delta_{LL'} \delta_{SS'}, \quad (15)$$

где N – нормировочная константа, явный вид которой в дальнейшем не используется.

Базисы (13) и (14) связаны между собой разложением Клебша–Гордана для группы Пуанкаре:

$$|\vec{P}, \sqrt{s}, J, L, S, m\rangle = \sum_{m_1, m_2} \int \frac{d^3 \vec{p}_1}{2p_{10}} \frac{d^3 \vec{p}_2}{2p_{20}} |\vec{p}_1, m_1; \vec{p}_2, m_2\rangle \langle \vec{p}_1, m_1; \vec{p}_2, m_2 | \vec{P}, \sqrt{s}, J, L, S, m\rangle,$$

где

$$\begin{aligned} \langle \vec{p}_1, m_1; \vec{p}_2, m_2 | \vec{P}, \sqrt{s}, J, L, S, m\rangle &= 2\sqrt{s} [\lambda(s, M_1^2, M_2^2)]^{-1/2} \times \\ &\times 2P_0 \delta(P - p_1 - p_2) \sum_{\tilde{m}_1, \tilde{m}_2} D_{m_1 \tilde{m}_1}^{1/2}(p_1, P) D_{m_2 \tilde{m}_2}^{1/2}(p_2, P) \left\langle \frac{1}{2} \tilde{m}_1 \frac{1}{2} \tilde{m}_2 \left| S m_S \right. \right\rangle \times \\ &\times Y_{L m_L}(\vartheta, \varphi) \langle S L m_S m_L | J m \rangle; \end{aligned} \quad (16)$$

здесь $\lambda(a, b, c) = a^2 + b^2 + c^2 - 2(ab + ac + bc)$, M_1 и M_2 – массы конститuentов, $Y_{L m_L}$ – сферические функции. В выражении (16) разложение по сферическим гармоникам и суммирование по угловым моментам осуществляется в СЦИ и результат затем “сдвигается” в произвольную систему посредством D -функций Вигнера.

Проводя рассуждения, аналогичные использованным при параметризации матричного элемента одночастичного тока, получим выражение для параметризации матричного элемента тока двухчастичной системы в базисе (14):

$$\begin{aligned} \langle \vec{P}, \sqrt{s}, J, L, S, m | j_\mu^0(0) | \vec{P}', \sqrt{s'}, J, L', S', m' \rangle &= \\ &= \sum_{m''} D_{m, m''}^J(P, P') \left\langle m'' \left| \sum_{k=1}^3 [F_k^{LL' SS'} A_\mu^k(s, Q^2, s')] \right| m' \right\rangle, \end{aligned} \quad (17)$$

где $Q^2 = -(P - P')^2$ и A_μ^k – функции, отвечающие за трансформационные свойства матричного элемента (см., например, работу [15]).

Обратим внимание, что в выражении (17) приведенные матричные элементы (инвариантные формфакторы) зависят от дополнительных величин L, L', S, S' – инвариантных параметров вырождения в базисе (14):

$$F_k^{LL' SS'} = \sum_{n=0}^{2J} f_{kn}^{LL' SS'}(s, Q^2, s') (i P_\mu \Gamma^\mu(P'))^n. \quad (18)$$

3. ПАРАМЕТРИЗАЦИЯ НЕДИАГОНАЛЬНОГО ПО ПОЛНОМУ МОМЕНТУ МАТРИЧНОГО ЭЛЕМЕНТА ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ТОКА СВОБОДНОЙ ДВУХЧАСТИЧНОЙ СИСТЕМЫ

Рассмотрим теперь параметризацию матричного элемента тока, недиагонального по полному угловому моменту, для системы двух невзаимодействующих частиц в базисе (14):

$$\langle \vec{P}, \sqrt{s}, J, L, S, m | j_\mu^0(0) | \vec{P}', \sqrt{s'}, J', L', S', m' \rangle. \quad (19)$$

В этом матричном элементе собственные моменты J и J' различны, что исключает возможность построения диагонального по спину оператора Γ_μ и тем самым использования методики, рассмотренной в предыдущем разделе.

Для инвариантной параметризации матричного элемента (19) совершим преобразование Лоренца из исходной (лабораторной) системы координат в систему Брейта (СБ):

$$\vec{j}^0 = \vec{j}^0 + \frac{\vec{w}(\vec{j}^0 \vec{w})}{1 + w_0}, \quad \tilde{j}_0^0 = j_0^0 w_0 - (\vec{j}^0 \vec{w}) = j_\mu^0 w^\mu, \quad (20)$$

где $w_\mu = K'_\mu / \sqrt{(K')^2}$ есть 4-скорость, соответствующая указанному преобразованию, $\tilde{j}_\mu^0$ – 4-вектор оператора электромагнитного тока в СБ.

Связь между матричными элементами токов в лабораторной системе (19) и СБ имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} & \langle \vec{P}, \sqrt{s}, J, L, S, m | j_\mu^0(0) | \vec{P}', \sqrt{s'}, J', L', S', m' \rangle = \\ & = \sum_{\tilde{m}, \tilde{m}'} D_{m, \tilde{m}}^J(P, w) D_{m', \tilde{m}'}^{*J'}(P', w) \langle \vec{P}, \sqrt{s}, J, L, S, \tilde{m} | \tilde{j}_\mu^0(0) | \vec{P}', \sqrt{s'}, J', L', S', \tilde{m}' \rangle; \end{aligned} \quad (21)$$

здесь

$$\tilde{P} = (\tilde{P}_0, \vec{q}), \quad \tilde{P}' = (\tilde{P}'_0, -\vec{q}), \quad \tilde{P}_0 = \sqrt{s + \vec{q}^2}, \quad \tilde{P}'_0 = \sqrt{s' + \vec{q}^2} \quad (22)$$

и $\vec{q}$ – трехмерный вектор, модуль которого вычисляется по формуле

$$q = \sqrt{\frac{\lambda(M_1^2, M_2^2, Q^2)}{8(M_1^2 + M_2^2) + 4Q^2}}. \quad (23)$$

Как видно из (20), нулевая компонента оператора $\tilde{j}_0^0$ в СБ имеет структуру скалярного оператора, или сферического тензорного оператора нулевого ранга. Описание оператора тока в терминах тензорных операторов необходимо в силу того, что мы в дальнейшем будем использовать теорему Вигнера–Эккарта. Разложим нулевую компоненту матричного элемента оператора тока в СБ в (21) по сферическим углам вектора $\vec{q}$:

$$\begin{aligned} & \langle \vec{P}, \sqrt{s}, J, L, S, m | j_0^0(0) | \vec{P}', \sqrt{s'}, J', L', S', m' \rangle = \\ & = \sum_{\tilde{m}, \tilde{m}', l', k'} D_{m, \tilde{m}}^J(P, w) Y_{l', k'}(\vec{q}) \langle J, \tilde{m} | C_{k'}^{l'}(s, Q^2, s') | J', \tilde{m}' \rangle D_{m', \tilde{m}'}^{*J'}(P', w), \end{aligned} \quad (24)$$

где $C_{k'}^{l'}$ – тензорный оператор ранга l' , $k' = -l', -(l' - 1), \dots, (l' - 1), l'$.

Произведем разложение Вигнера–Эккарта

$$\langle J, \tilde{m} | C_{k'}^{l'}(s, Q^2, s') | J', \tilde{m}' \rangle = \langle J', \tilde{m}' | l' k' | J, \tilde{m} \rangle G_{JJ'}^{0l'}(s, Q^2, s'), \quad (25)$$

где $G_{JJ'}^{0l'}(s, Q^2, s')$ представляет собой набор неприводимых матричных элементов – скаляров или свободных электромагнитных формфакторов. В результате получаем параметризацию нулевой компоненты матричного элемента оператора тока в лабораторной системе:

$$\begin{aligned} & \langle \vec{P}, \sqrt{s}, J, L, S, m | j_0^0(0) | \vec{P}', \sqrt{s'}, J', L', S', m' \rangle = \\ & = \sum_{\tilde{m}', \tilde{m}, l', k'} D_{m, \tilde{m}}^J(P, w) D_{m', \tilde{m}'}^{*J'}(P', w) \langle J' \tilde{m}' | l' k' | J \tilde{m} \rangle Y_{l', k'}(\vec{q}) G_{JJ'}^{0l'}(s, Q^2, s'). \end{aligned} \quad (26)$$

Перейдем теперь к рассмотрению трехмерной части матричного элемента оператора тока:

$$\langle \vec{P}, \sqrt{s}, J, L, S, m | j_r^0(0) | \vec{P}', \sqrt{s'}, J', L', S', m' \rangle, \quad r = 1, 2, 3. \quad (27)$$

Нулевую компоненту оператора тока в СБ (22) мы рассматривали как тензорный оператор нулевого ранга. Трехмерную часть оператора можно описать в терминах тензорного оператора первого ранга. Для этого достаточно перейти к каноническому базису, т. е. от декартовых компонент тока к базису сферических гармоник [28]

$$j_r^0(0) = a_{rt} j_t^{01}(0), \quad t = -1, 0, 1, \quad (28)$$

где

$$a_{rt} = \sqrt{\frac{2\pi}{3}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ i & 0 & i \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \quad (29)$$

и $j_t^{01}(0)$ – компоненты тензорного оператора первого ранга.

Разложим матричный элемент (27) по сферическим углам вектора $\vec{q}$ в СБ:

$$\langle \vec{P}, \sqrt{s}, J, L, S, \tilde{m} | j_t^{01}(0) | \vec{P}', \sqrt{s'}, J', L', S', \tilde{m}' \rangle = \sum_{l,k} Y_{l,k}(\vec{q}) \langle J, \tilde{m} | B_{tk}^{1l}(s, Q^2, s') | J', \tilde{m}' \rangle. \quad (30)$$

В лабораторной системе матричный элемент тензорного оператора первого ранга будет иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} \langle \vec{P}, \sqrt{s}, J, L, S, m | j_t^{01}(0) | \vec{P}', \sqrt{s'}, J', L', S', m' \rangle = \\ = \sum_{\tilde{m}, \tilde{m}', l, k} D_{m, \tilde{m}}^J(P, w) Y_{l,k}(\vec{q}) \langle J, \tilde{m} | B_{tk}^{1l}(s, Q^2, s') | J', \tilde{m}' \rangle D_{m', \tilde{m}'}^{*J'}(P', w), \end{aligned} \quad (31)$$

здесь B_{tk}^{1l} – тензорный оператор, преобразующийся при вращениях по прямому произведению представлений $D^1 \otimes D^l$.

При помощи разложения Клебша–Гордана приведем оператор к виду, преобразующемуся по представлению D^j :

$$\langle J, \tilde{m} | B_{tk}^{1l} | J', \tilde{m}' \rangle = \sum_{j,n} \langle 1tk | jn \rangle \langle J, \tilde{m} | B_{tkn}^{1lj}(s, Q^2, s') | J', \tilde{m}' \rangle. \quad (32)$$

Подставляя это выражение в (31), получим

$$\begin{aligned} \langle \vec{P}, \sqrt{s}, J, L, S, m | j_t^{01}(0) | \vec{P}', \sqrt{s'}, J', L', S', m' \rangle = \\ = \sum_{\tilde{m}, \tilde{m}', l, k, j, n} D_{m, \tilde{m}}^J(P, w) Y_{l,k}(\vec{q}) \langle 1tk | jn \rangle \langle J, \tilde{m} | B_{tkn}^{1lj}(s, Q^2, s') | J', \tilde{m}' \rangle D_{m', \tilde{m}'}^{*J'}(P', w). \end{aligned} \quad (33)$$

Для вычисления матричного элемента тензорного оператора в (33) воспользуемся теоремой Вигнера–Эккарта:

$$\langle J, \tilde{m} | B_{tkn}^{1lj}(s, Q^2, s') | J', \tilde{m}' \rangle = \langle J', \tilde{m}' | jn | J, \tilde{m} \rangle G_{JJ'}^{1lj}(s, Q^2, s'), \quad (34)$$

где $G_{JJ'}^{1lj}(s, Q^2, s')$ – набор приведенных матричных элементов – скалярных функций или свободных формфакторов.

В результате подстановки (34) в (33) придем к следующей параметризации трехмерной части матричного элемента (27):

$$\begin{aligned} \langle \vec{P}, \sqrt{s}, J, L, S, m | j_t^{01}(0) | \vec{P}', \sqrt{s'}, J', L', S', m' \rangle = \\ = \sum_{\tilde{m}', \tilde{m}, l, k, j, n} D_{m, \tilde{m}}^J(P, w) D_{m', \tilde{m}'}^{*J'}(P', w) \langle J' \tilde{m}' j n | J \tilde{m} \rangle \langle 1 t l k | j n \rangle Y_{lk}(\vec{q}) G_{JJ'}^{1lj}(s, Q^2, s'). \end{aligned} \quad (35)$$

Условие сохранения тока $j_\mu^0(0) K^\mu = 0$ налагает дополнительные связи на формфакторы, входящие в выражения (26) и (35), и уменьшает число независимых формфакторов.

Параметризация матричного элемента электромагнитного тока, недиагонального по угловому моменту, в случае свободной двухчастичной системы с квантовыми числами пионов и ρ -мезонов. В составной кварковой модели пионы и ρ -мезоны представляются связанным состоянием u - и $\bar{d}$ -кварков с квантовыми числами $J = L = S = 0$ для пиона и $J = S = 1, L = 0$ для ρ -мезона. Будем опускать нулевые величины в векторе состояния с квантовыми числами пиона. Считая, что массы кварков одинаковы, $M_u = M_{\bar{d}} = M$, матричный элемент оператора электромагнитного тока свободной двухчастичной системы с данными квантовыми числами запишем в виде

$$\begin{aligned} \langle \vec{P}, \sqrt{s} | j_\mu^0(0) | \vec{P}', \sqrt{s'}, 1, 0, 1, m' \rangle = \int \frac{d^3 \vec{p}_1}{2p_{10}} \frac{d^3 \vec{p}_2}{2p_{20}} \frac{d^3 \vec{p}'_1}{2p'_{10}} \frac{d^3 \vec{p}'_2}{2p'_{20}} \langle \vec{P}, \sqrt{s} | \vec{p}_1, m_1; \vec{p}_2, m_2 \rangle \times \\ \times \langle \vec{p}_1, m_1; \vec{p}_2, m_2 | j_\mu^0(0) | \vec{p}'_1, m'_1; \vec{p}'_2, m'_2 \rangle \langle \vec{p}'_1, m'_1; \vec{p}'_2, m'_2 | \vec{P}', \sqrt{s'}, 1, 0, 1, m' \rangle, \end{aligned} \quad (36)$$

где

$$\begin{aligned} \langle \vec{p}_1, m_1; \vec{p}_2, m_2 | j_\mu^0(0) | \vec{p}'_1, m'_1; \vec{p}'_2, m'_2 \rangle = \\ = \langle \vec{p}_1, m_1 | j_{\mu 1}^0(0) | \vec{p}'_1, m'_1 \rangle \delta(\vec{p}_2 - \vec{p}'_2) \delta_{m_2 m'_2} + \langle \vec{p}_2, m_2 | j_{\mu 2}^0(0) | \vec{p}'_2, m'_2 \rangle \delta(\vec{p}_1 - \vec{p}'_1) \delta_{m_1 m'_1}. \end{aligned}$$

Матричные элементы одночастичных токов в последнем выражении можно представить в виде (11). Коэффициенты Клебша–Гордана определяются аналогично (16).

Используя недиагональную параметризацию (26) и (35), принимая во внимание нулевое значение полного углового момента в пионе, матричный элемент тока в базисе (14) мы можем представить формулами

$$\begin{aligned} \langle \vec{P}, \sqrt{s} | j_0(0) | \vec{P}', \sqrt{s'}, 1, 0, 1, m' \rangle = \\ = \sum_{\tilde{m}', l', k'} D_{m', \tilde{m}'}^1(P', w) \langle 1 \tilde{m}' l' k' | 00 \rangle Y_{l' k'}(\vec{q}) G_{01}^{0l'}(s, Q^2, s'), \end{aligned} \quad (37)$$

$$\begin{aligned} \langle \vec{P}, \sqrt{s} | j_t^1(0) | \vec{P}', \sqrt{s'}, 1, 0, 1, m' \rangle = \\ = \sum_{\tilde{m}', l, k, j, n} D_{m', \tilde{m}'}^1(P', w) \langle 1 \tilde{m}' j n | 00 \rangle \langle 1 t l k | j n \rangle Y_{lk}(\vec{q}) G_{01}^{1lj}(s, Q^2, s'). \end{aligned} \quad (38)$$

Сопоставляя выражения (36) и (37), (38), используя (28), (29) и выполняя интегрирование в СБ с учетом $\vec{q} = (0, 0, q)$, получаем аналитические выражения для свободных двухчастичных формфакторов. Эти выражения очень громоздки, поэтому запишем в явном виде только один формфактор, который в дальнейшем будет использоваться:

$$G_{01}^{111}(s, Q^2, s') = \frac{\Theta(s, Q^2, s')(s + s' + Q^2)^2}{\sqrt{2}\sqrt{s - 4M^2}\sqrt{s' - 4M^2}\sqrt{4M^2 + Q^2}\sqrt{\lambda(s, -Q^2, s')}} \times \\ \times \left[\cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right) \frac{s'(s' - s + 3Q^2)}{\sqrt{\lambda(s, -Q^2, s')}} (G_M^u(Q^2) + G_M^d(Q^2)) + \right. \\ \left. + \sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right) \left(\frac{s' - s - Q^2}{s + s' + Q^2} \frac{\xi(s, s', Q^2)}{\sqrt{s'}} (G_M^u(Q^2) + G_M^d(Q^2)) - \right. \right. \\ \left. \left. - \xi(s, s', Q^2) \frac{4M}{s + s' + Q^2} (G_E^u(Q^2) + G_E^d(Q^2)) \right) \right], \quad (39)$$

где

$$\Theta(s, Q^2, s') = \vartheta(s' - s_1) - \vartheta(s' - s_2), \quad \xi(s, s', Q^2) = \sqrt{ss'Q^2 - M^2\lambda(s, -Q^2, s')}, \\ s_{1,2} = 2M^2 + \frac{1}{2M^2}(2M^2 + Q^2)(s - 2M^2) \mp \frac{1}{2M^2}\sqrt{Q^2(Q^2 + 4M^2)s(s - 4M^2)}$$

и $\vartheta(s)$ – ступенчатая функция. В выражении (39)

$$\omega_1 = \arctg \frac{\xi(s, s', Q^2)}{M[(\sqrt{s} + \sqrt{s'})^2 + Q^2] + \sqrt{ss'}(\sqrt{s} + \sqrt{s'})}, \quad (40) \\ \omega_2 = \arctg \frac{\xi(s, s', Q^2)(2M + \sqrt{s} + \sqrt{s'})}{M(s + s' + Q^2)(2M + \sqrt{s} + \sqrt{s'}) + \sqrt{ss'}(4M^2 + Q^2)}.$$

4. ПЕРЕХОДНЫЙ ФОРМФАКТОР $F_{\pi\rho}(Q^2)$

Матричный элемент электромагнитного тока перехода $\rho \rightarrow \pi\gamma^*$ можно записать следующим образом (см., например, работу [29]):

$$\langle \vec{P}_\pi | j_\mu^c(0) | \vec{P}_\rho, 1, m_\rho \rangle = F_{\pi\rho}(Q^2) \varepsilon_{\mu\nu\sigma\delta} \xi^\nu(m_\rho) P_\pi^\sigma P_\rho^\delta, \quad (41)$$

где $\vec{P}_\pi$ и $\vec{P}_\rho$ – 3-импульсы пионов и ρ -мезонов соответственно, $\xi^\nu(m_\rho)$ – 4-вектор поляризации, $\varepsilon_{\mu\nu\sigma\delta}$ – антисимметричный псевдотензор четвертого ранга, $F_{\pi\rho}(Q^2)$ – переходный формфактор, измеряемый в эксперименте.

Для дальнейшей работы с матричным элементом (41) перейдем в СБ по аналогии с (20), (22). В этой системе вектор поляризации имеет следующий вид:

$$\xi^\nu(m_\rho) = -\frac{1}{\sqrt{2}}(0, 0, 1, i). \quad (42)$$

Подставляя выражение (22) в (41) с учетом (42), получим

$$\langle \vec{\tilde{P}}_\pi | \tilde{j}_1^c(0) | \vec{\tilde{P}}_\rho, 1, \tilde{m}_\rho \rangle = -\frac{q(\tilde{P}_\pi^0 + \tilde{P}_\rho^0)}{\sqrt{2}} F_{\pi\rho}(Q^2). \quad (43)$$

Отметим, что компоненты матричного элемента тока (41) $\tilde{j}_0^c$, $\tilde{j}_2^c$ и $\tilde{j}_3^c$ равны нулю. С другой стороны, матричный элемент (41) можно записать, используя процедуру параметризации недиагонального по полному угловому моменту матричного элемента тока, изложенную в предыдущем разделе.

Взаимодействие в мгновенной форме РКМ включается только в нулевые компоненты 4-импульса составной системы и в генераторы лоренцевых бустов, поэтому процедура параметризации матричного элемента (41) и итоговые формулы фактически полностью аналогичны формулам (37), (38) в случае свободной двухчастичной системы с квантовыми числами пионов и ρ -мезонов:

$$\begin{aligned} \langle \vec{P}_\pi | j_0^c(0) | \vec{P}_\rho, 1, m_\rho \rangle &= \\ &= \sum_{\tilde{m}_\rho, l', k'} D_{m_\rho, \tilde{m}_\rho}^1(P_\rho, w) \langle 1\tilde{m}_\rho l' k' | 00 \rangle Y_{l'k'}(\vec{q}) G_{01}^{0l'}(Q^2), \end{aligned} \quad (44)$$

$$\begin{aligned} \langle \vec{P}_\pi | j_t^{c1}(0) | \vec{P}_\rho, 1, m_\rho \rangle &= \\ &= \sum_{\tilde{m}_\rho, l, k, j, n} D_{m_\rho, \tilde{m}_\rho}^1(P_\rho, w) \langle 1\tilde{m}_\rho j n | 00 \rangle \langle 1t l k | j n \rangle Y_{lk}(\vec{q}) G_{01}^{1lj}(Q^2). \end{aligned} \quad (45)$$

Как было отмечено выше, для радиационного перехода $\rho \rightarrow \pi\gamma^*$ существует единственный формфактор, выражающийся через первую трехмерную компоненту матричного элемента электромагнитного тока:

$$\langle \vec{P}_\pi | j_1^c(0) | \vec{P}_\rho, 1, \tilde{m}_\rho \rangle = -\frac{1}{\sqrt{3}} G_{01}^{111}(Q^2), \quad (46)$$

где $G_{01}^{111}(Q^2)$ – переходный формфактор, полученный методом, который описан в разделе 3.

Приравнявая выражения (43) и (46), получим связь измеряемого в эксперименте формфактора (41) и формфактора (46), возникающего в нашей процедуре параметризации:

$$F_{\pi\rho}(Q^2) = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{1}{q(\tilde{P}_\pi^0 + \tilde{P}_\rho^0)} G_{01}^{111}(Q^2), \quad (47)$$

где $\tilde{P}_\pi^0 = \sqrt{M_\pi^2 + \vec{q}^2}$, $\tilde{P}_\rho^0 = \sqrt{M_\rho^2 + \vec{q}^2}$ и M_π , M_ρ – массы пиона и ρ -мезона соответственно.

Для дальнейших вычислений необходимо получить аналитическое выражение для формфактора составной системы $G_{01}^{111}(Q^2)$ через волновые функции в РКМ.

5. ВЫРАЖЕНИЕ ДЛЯ ПЕРЕХОДНОГО ФОРМФАКТОРА В МГНОВЕННОЙ ФОРМЕ РКМ

Рассмотрим снова матричный элемент оператора электромагнитного тока перехода (41). Будем считать, что мы имеем дело с двухкварковыми системами с квантовыми числами, соответствующими пионам и ρ -мезонам. Так как в РКМ вектор состояния составной двухчастичной системы принадлежит прямому произведению

двух одночастичных гильбертовых пространств, матричный элемент тока (41) можно разложить по базису (14), т. е. ввести в (41) два единичных оператора:

$$\begin{aligned}\hat{I} &= \int \frac{d^3 \vec{P}}{N} d\sqrt{s} |\vec{P}, \sqrt{s}\rangle \langle \vec{P}, \sqrt{s}|, \\ \hat{I} &= \sum \int \frac{d^3 \vec{P}'}{N'} d\sqrt{s'} |\vec{P}', \sqrt{s'}, 1, 0, 1, m'\rangle \langle \vec{P}', \sqrt{s'}, 1, 0, 1, m'|,\end{aligned}\quad (48)$$

где суммирование идет по дискретной переменной. Подставляя эти операторы в матричный элемент (41), получим

$$\begin{aligned}\langle \vec{P}_\pi | j_\mu^c(0) | \vec{P}_\rho, 1, m_\rho \rangle &= \sum \int \frac{d^3 \vec{P}}{N} \frac{d^3 \vec{P}'}{N'} d\sqrt{s} d\sqrt{s'} \langle \vec{P}_\pi | \vec{P}, \sqrt{s} \rangle \times \\ &\times \langle \vec{P}, \sqrt{s} | j_\mu^c(0) | \vec{P}', \sqrt{s'}, 1, 0, 1, m' \rangle \langle \vec{P}', \sqrt{s'}, 1, 0, 1, m' | \vec{P}_\rho, 1, m_\rho \rangle,\end{aligned}\quad (49)$$

где $\langle \vec{P}_\pi | \vec{P}, \sqrt{s} \rangle$ и $\langle \vec{P}', \sqrt{s'}, 1, 0, 1, m' | \vec{P}_\rho, 1, m_\rho \rangle$ – волновые функции в мгновенной форме РКМ,

$$\begin{aligned}\langle \vec{P}_\pi | \vec{P}, \sqrt{s} \rangle &= N_c \delta(\vec{P} - \vec{P}_\pi) \varphi(s), \\ \langle \vec{P}', \sqrt{s'}, 1, 0, 1, m' | \vec{P}_\rho, 1, m_\rho \rangle &= N'_c \delta(\vec{P}' - \vec{P}_\rho) \varphi_1^1(s') \delta_{m' m_\rho},\end{aligned}\quad (50)$$

где

$$\varphi(s) = \sqrt[4]{s} k \psi(k), \quad \varphi_1^1(s') = \sqrt[4]{s'} k' \psi_1^1(k') \quad (51)$$

и $\psi(k)$, $\psi_1^1(k')$ – волновые функции, удовлетворяющие условию нормировки

$$\int \psi^2(k) k^2 dk = 1, \quad \int [\psi_1^1(k')]^2 k'^2 dk' = 1. \quad (52)$$

В соотношениях (50), (51) учтены значения квантовых чисел двухкварковых систем в пионах и ρ -мезонах.

Проводя с помощью дельта-функций интегрирование по переменным $\vec{P}$ и $\vec{P}'$, получим

$$\langle \vec{P}_\pi | j_\mu^c(0) | \vec{P}_\rho, 1, m_\rho \rangle = \int d\sqrt{s} d\sqrt{s'} \frac{N_c N'_c}{N N'} \varphi(s) \varphi_1^1(s') \langle \vec{P}_\pi, \sqrt{s} | j_\mu^c(0) | \vec{P}_\rho, \sqrt{s'}, 1, 0, 1, m_\rho \rangle. \quad (53)$$

Обкладки матричного элемента, входящего в правую часть равенства (53), физически описывают систему двух свободных частиц и преобразуются по представлению, генераторы которого не зависят от взаимодействия. Оператор тока описывает переход между двухкварковыми системами со взаимодействием и преобразуется по другому представлению, генераторы которого в РКМ зависят от взаимодействия. В силу этого к данному матричному элементу нельзя напрямую применить процедуру параметризации, описанную в разделе 3, и представить его в виде (26), (35). Однако правую часть равенства (53) можно рассматривать как функционал, заданный на пространстве основных функций $\phi(s, s') = \varphi(s) \varphi_1^1(s')$, а матричный элемент электромагнитного тока – как обобщенную функцию, т. е. объект, имеющий смысл только под знаком интеграла. В силу соотношений (48), (49) трансформационные свойства левой и правой частей равенства (53) являются одинаковыми. В связи

с этим недиагональная параметризация матричного элемента под интегралом представляется в виде, аналогичном (44), (45):

$$\begin{aligned} \frac{N_c N'_c}{N N'} \langle \vec{P}_\pi, \sqrt{s} | j_0^c(0) | \vec{P}_\rho, \sqrt{s'}, 1, 0, 1, m_\rho \rangle = \\ = \sum_{\tilde{m}_\rho, l', k'} D_{m_\rho, \tilde{m}_\rho}^1(P_\rho, w) \langle 1\tilde{m}_\rho l' k' | 00 \rangle Y_{l'k'}(\vec{q}) H_{01}^{0l'}(s, Q^2, s'), \end{aligned} \quad (54)$$

$$\begin{aligned} \frac{N_c N'_c}{N N'} \langle \vec{P}_\pi, \sqrt{s} | j_t^{c1}(0) | \vec{P}_\rho, \sqrt{s'}, 1, 0, 1, m_\rho \rangle = \\ = \sum_{\tilde{m}_\rho, l, k, n, j} D_{m_\rho, \tilde{m}_\rho}^1(P_\rho, w) \langle 1\tilde{m}_\rho j n | 00 \rangle \langle 1tlk | jn \rangle Y_{lk}(\vec{q}) H_{01}^{1lj}(s, Q^2, s'), \end{aligned} \quad (55)$$

где $H_{01}^{0l'}(s, Q^2, s')$ и $H_{01}^{1lj}(s, Q^2, s')$ – формфакторы.

Подставим представления (44), (45) и (54), (55) в (53), получим

$$G_{01}^{01}(Q^2) = \int d\sqrt{s} d\sqrt{s'} H_{01}^{01}(s, Q^2, s') \varphi(s) \varphi_1^1(s'), \quad (56)$$

$$G_{01}^{1l1}(Q^2) = \int d\sqrt{s} d\sqrt{s'} H_{01}^{1l1}(s, Q^2, s') \varphi(s) \varphi_1^1(s'). \quad (57)$$

Отметим, что явный вид инвариантных функций $H_{01}^{01}(s, Q^2, s')$ и $H_{01}^{1l1}(s, Q^2, s')$, вообще говоря, неизвестен. Для задания их явного вида воспользуемся МИП, введенным в работе [14]. МИП заключается в замене функций $H_{01}^{01}(s, Q^2, s')$ и $H_{01}^{1l1}(s, Q^2, s')$ на свободные двухчастичные формфакторы $G_{01}^{01}(s, Q^2, s')$ и $G_{01}^{1l1}(s, Q^2, s')$ из (37), (38):

$$G_{01}^{01}(Q^2) = \int d\sqrt{s} d\sqrt{s'} G_{01}^{01}(s, Q^2, s') \varphi(s) \varphi_1^1(s'), \quad (58)$$

$$G_{01}^{1l1}(Q^2) = \int d\sqrt{s} d\sqrt{s'} G_{01}^{1l1}(s, Q^2, s') \varphi(s) \varphi_1^1(s'). \quad (59)$$

Отметим, что замена инвариантных функций в (56), (57) в рамках МИП не нарушает трансформационных свойств и закона сохранения тока.

Таким образом, с учетом (47) окончательное выражение для измеряемого в эксперименте переходного формфактора $F_{\pi\rho}(Q^2)$ в МИП имеет следующий вид:

$$F_{\pi\rho}(Q^2) = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{1}{q(\tilde{P}_\pi^0 + \tilde{P}_\rho^0)} \int d\sqrt{s} d\sqrt{s'} G_{01}^{1l1}(s, Q^2, s') \varphi(s) \varphi_1^1(s'). \quad (60)$$

6. ЧИСЛЕННЫЙ РАСЧЕТ ФОРМФАКТОРА $F_{\pi\rho}(Q^2)$

При расчете переходного формфактора по формулам (60), (51), (52) будем использовать для пиона и ρ -мезона, как это часто делается, волновую функцию основного состояния гармонического осциллятора (см., например, работы [29], [30]):

$$\psi(k) = \frac{2}{\pi^{1/4}} \beta^{-3/2} e^{-k^2/2\beta^2}, \quad (61)$$

где β – параметр. Этот параметр будем фиксировать исходя из значений среднеквадратичных радиусов мезонов: $\beta = 0.278$ ГэВ для пиона [14] и $\beta = 0.231$ ГэВ для ρ -мезона [15].

Рис. 1. Переходный формфактор процесса $\rho \rightarrow \pi\gamma^*$ в различных подходах. Сплошная линия – результаты расчета по формуле (60), линия с короткими штрихами – расчет в рамках динамики на световом фронте из работы [29], линия с длинными штрихами – расчет в рамках динамики на световом фронте из работы [30], пунктир – модель векторной мезонной доминантности (см., например, работу [30]).

Для сравнения наших результатов с результатами при других подходах выберем формфакторы Сакса для кварков в виде

$$G_E(Q^2) = e_q f_q(Q^2), \quad G_M(Q^2) = (e_q + \kappa_q) f_q(Q^2), \quad f_q(Q^2) = \frac{1}{1 + \langle r_q^2 \rangle Q^2 / 6}, \quad (62)$$

где e_q – заряд кварка, κ_q – аномальный магнитный момент кварка в естественных единицах, $\langle r_q^2 \rangle$ – среднеквадратичный радиус кварка.

Обсудим кратко выбор значений параметров, при которых производились численные расчеты. Для массы конstituентных u - и $\bar{d}$ -кварков мы использовали значение $M = 0.22$ ГэВ, которое в основном применяется в настоящее время в релятивистских расчетах (см., например, работы [29], [30]). Значение среднеквадратичного радиуса конstituентного кварка определялось выражением $\langle r_q^2 \rangle = 0.3/M^2$, полученным в модели со спонтанным нарушением киральной симметрии [29], [31]. Сумму аномальных магнитных моментов конstituентных кварков, которая входит в формулу для переходного формфактора, мы взяли равной $\kappa_u + \kappa_{\bar{d}} = 0.09$ в соответствии с правилами сумм Герасимова [32].

Результаты расчета переходного формфактора (60) представлены на рис. 1. Видно, что результаты вычислений переходного формфактора в разных формулировках составной кварковой модели при малых переданных импульсах близки к результатам для модели векторной доминантности (см., например, работу [30]) при следующих значениях параметров: $F_{\pi\rho}(0) = 0.736$ ГэВ $^{-1}$, $M_\rho = 0.77$ ГэВ, т. е фактически выполняется принцип соответствия.

Отметим, что результаты наших расчетов близки к результатам, полученным в рамках динамики на световом фронте в работе [29], однако значительно отличаются от расчетов в этой форме динамики из работы [30] при больших переданных

импульсах. Все расчеты проводились с модельными волновыми функциями основного состояния гармонического осциллятора (61). Подчеркнем, что при больших переданных импульсах наши результаты выходят на константу. Это означает, что при использовании вместо формфактора кварка (62) формфактора логарифмического типа с точностью до логарифмических поправок мы получим $F_{\pi\rho}(Q^2) \sim Q^{-2}$, что соответствует представлениям КХД (см. подробное обсуждение этого вопроса для случая формфактора пиона в статьях [21], [25]).

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В рамках мгновенной формы релятивистской квантовой механики разработана процедура параметризации матричного элемента тока перехода между состояниями с разными значениями полного углового момента. Изложение метода построения проведено на примере описания радиационного перехода $\rho \rightarrow \pi\gamma^*$. В модифицированном релятивистском импульсном приближении получены аналитические формулы для переходного формфактора этого процесса.

Переходный формфактор выражается через двухкварковые волновые функции пионов и ρ -мезонов и так называемый свободный двухчастичный формфактор, который входит в матричный элемент тока перехода между двумя системами свободных кварков с квантовыми числами пионов и ρ -мезонов. Модифицированное релятивистское импульсное приближение не нарушает лоренц-ковариантности и закона сохранения тока в отличие от обычного импульсного приближения. Результаты численных расчетов в рамках нашего подхода близки к результатам, полученным в рамках динамики на световом фронте, и согласуются с моделью векторной мезонной доминантности.

Список литературы

- [1] P. A. M. Dirac, *Rev. Modern Phys.*, **21**:3 (1949), 392–399.
- [2] H. Leutwyler, J. Stern, *Ann. Phys.*, **112**:1 (1978), 94–164.
- [3] B. D. Keister, W. N. Polyzou, “Relativistic Hamiltonian dynamics in nuclear and particle physics”, *Advances in Nuclear Physics*, **20**, eds. J. W. Negele, E. W. Vogt, Plenum Press, New York–London, 1991, 225–479.
- [4] F. Coester, *Progr. Part. Nucl. Phys.*, **29** (1992), 1–32.
- [5] E. Gilman, F. Gross, *J. Phys. G*, **28**:4 (2002), R37–R116, arXiv:nucl-th/0111015.
- [6] А. Ф. Кротов, В. Е. Троицкий, *ЭЧАЯ*, **40**:2 (2009), 269–319.
- [7] W. N. Polyzou, Ch. Elster, W. Glöckle, J. Golak, Y. Huang, H. Kamada, R. Skibiński, H. Witała, *Few-Body Systems*, **49**:1–4 (2011), 129–147.
- [8] W. N. Polyzou, *Ann. Phys.*, **193**:2 (1989), 367–418.
- [9] B. Bakamjian, L. H. Thomas, *Phys. Rev.*, **92**:5 (1953), 1300–1310.
- [10] W. N. Polyzou, *Phys. Rev. C*, **82**:6 (2010), 064001, 9 pp., arXiv:1008.5222.
- [11] E. P. Biernat, W. Schweiger, *Phys. Rev. C*, **89**:5 (2014), 055205, 17 pp.
- [12] M. Gómez-Rocha, *Phys. Rev. D*, **90**:7 (2014), 076003, 12 pp., arXiv:1409.5239.
- [13] А. Ф. Кротов, В. Е. Троицкий, *ТМФ*, **143**:2 (2005), 258–277.
- [14] A. F. Krutov, V. E. Troitsky, *Phys. Rev. C*, **65**:4 (2002), 045501, 17 pp., arXiv:hep-ph/0101327.
- [15] A. F. Krutov, V. E. Troitsky, *Phys. Rev. C*, **68**:1 (2003), 018501, 4 pp., arXiv:hep-ph/0210046.
- [16] В. Е. Троицкий, Ю. М. Широков, *ТМФ*, **1**:2 (1969), 213–221.

- [17] V. V. Anisovich, M. N. Kobrinsky, D. I. Melikhov, A. V. Sarantsev, *Nucl. Phys. A*, **544**:3 (1992), 747–792.
- [18] Е. В. Баландина, А. Ф. Крутов, В. Е. Троицкий, *ТМФ*, **103**:1 (1995), 41–53.
- [19] E. V. Balandina, A. F. Krutov, V. E. Troitsky, *J. Phys. G: Nucl. Part. Phys.*, **22**:11 (1996), 1585–1592.
- [20] A. F. Krutov, V. E. Troitsky, *JHEP*, **10** (1999), 028, 13 pp.
- [21] A. F. Krutov, V. E. Troitsky, *Eur. Phys. J. C*, **20**:1 (2001), 71–76.
- [22] А. Ф. Крутов, В. Е. Троицкий, *ТМФ*, **116**:2 (1998), 215–224.
- [23] А. Ф. Крутов, М. А. Нефедов, В. Е. Троицкий, *ТМФ*, **174**:3 (2013), 383–397.
- [24] A. F. Krutov, V. E. Troitsky, N. A. Tsirova, *Phys. Rev. C*, **80**:5 (2009), 055210, 5 pp., arXiv: 0910.3604.
- [25] S. V. Troitsky, V. E. Troitsky, *Phys. Rev. D*, **88**:9 (2013), 093005, 7 pp.; **91**:3 (2015), 033008, 5 pp., arXiv: 1501.02712.
- [26] А. А. Чешков, Ю. М. Широков, *ЖЭТФ*, **44**:6 (1963), 1982–1992.
- [27] В. П. Кожевников, В. Е. Троицкий, С. В. Трубников, Ю. М. Широков, *ТМФ*, **10**:1 (1972), 47–57.
- [28] А. Р. Эдмондс, “Угловые моменты в квантовой механике”, *Деформация атомных ядер. Обобщенная модель ядра и метод кулоновского возбуждения*, ред. Л. А. Слив, ИЛ, М., 1958, 305–351.
- [29] F. Cardarelli, I. L. Grach, I. M. Narodetskii, G. Salmé, S. Simula, *Phys. Lett. B*, **359**:1–2 (1995), 1–7, arXiv: nucl-th/9509004.
- [30] J. Yu, B.-W. Xiao, B.-Q. Ma, *J. Phys. G*, **34**:7 (2007), 1845–1860, arXiv: 0706.2018.
- [31] U. Vogl, M. Lutz, S. Klimt, W. Weise, *Nucl. Phys. A*, **516**:3 (1990), 469–495; B. Povh, J. Hüfner, *Phys. Lett. B*, **245**:3–4 (1990), 653–657; S. M. Troshin, N. E. Tyurin, *Phys. Rev. D*, **49**:9 (1994), 4427–4433.
- [32] S. B. Gerasimov, *Phys. Lett. B*, **357**:4 (1995), 666–670; *Electromagnetic moments of hadrons and quarks in a hybrid model*, Препринт ОИЯИ Е2-89-837, ОИЯИ, Дубна, 1989.

Поступила в редакцию 13.02.2015,
после доработки 8.03.2015