Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Мирджалили, М. Таки, Некоммутативная поправка
к потенциалу Корнелла в атомах тяжелого кваркония,
ТМФ, 2016, том 186, номер 2, 323–329

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8871>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 17:34:31

© 2016 г.

А. Мирджалили*, М. Таки*

НЕКОММУТАТИВНАЯ ПОПРАВКА К ПОТЕНЦИАЛУ КОРНЕЛЛА В АТОМАХ ТЯЖЕЛОГО КВАРКОНИЯ

Изучается воздействие некоммутативности пространства-времени на потенциал Корнелла в системах тяжелых кваркониев. Известно, что некоммутативность пространства-времени может приводить к возникновению связанных состояний, поэтому в моделях кваркония некоммутативная геометрия пространства-времени рассматривается как поправка. Данные сверхтонких измерений основного состояния боттомония использованы как верхний предел некоммутативной энергетической поправки и выведено максимальное возможное значение параметра некоммутативности θ , а именно $\theta \leq 37.94 \cdot 10^{-34} \text{ м}^2$. Предложенная модель используется для вычисления максимального значения некоммутативной поправки к энергиям чармония и боттомония на уровнях 1S и 2S. Энергетическая поправка как эффект связывания в системе кваркониев меньше для атома чармония, чем для атома боттомония, что соответствует ожиданиям.

Ключевые слова: некоммутативное пространство-время, параметр некоммутативности, потенциал Корнелла, тяжелый кварконий, сверхтонкое расщепление.

DOI: 10.4213/tmf8871

1. ВВЕДЕНИЕ

Тяжелый кварконий может быть использован для описания нерелятивистского цветного синглетного связанного состояния пары кварк–антикварк, и эта модель очень похожа на нерелятивистские модели атома водорода. Разница между кварконием и атомом водорода заключается в наличии линейного потенциала типа конфайнмента, который прибавляется к кулоновскому потенциалу. В то время как кулоновский потенциал преобладает на относительно коротких расстояниях, потенциал конфайнмента доминирует на длинных расстояниях, что обеспечивает требование конфайнмента кварков. Комбинация этих двух потенциалов называется потенциалом Корнелла [1], [2].

После открытия частицы J/ψ в 1974 г. [3]–[6] развитие моделей кваркония могло бы принести успех при объяснении систематических особенностей тяжелого кваркония вроде $c\bar{c}$ - и $b\bar{b}$ -спектров и мод их распада [7]. На протяжении многих лет

*Physics Department, Yazd University, Yazd, Iran.
E-mail: a.mirjalili@yazd.ac.ir, metaki@stu.yazd.ac.ir

для согласования предсказаний модели с экспериментальными данными разнообразные поправки (релятивистские, спин-спин поправки, однопетлевые и т. д.) вводились в модели простого водородоподобного атома, например в модель кваркония [8]–[15].

Известно, что некоммутативность пространства-времени может приводить к появлению связанных состояний [16], так что мы можем рассматривать геометрию пространства-времени как поправку к моделям кваркония. В настоящей статье мы рассматриваем тяжелый кварконий в некоммутативном (НК) пространстве-времени и используем обычную теорию возмущений для вычисления главной поправки к энергетическим уровням.

Статья организована следующим образом. В разделе 2 мы приводим обзор определений и понятий, необходимых для надлежащего описания НК-геометрии. В разделе 3 мы вводим потенциал Корнелла в НК-пространстве-времени. В разделе 4, используя теорию возмущений, мы получаем общий вид НК-поправки к энергии для различных уровней энергии тяжелого кваркония на коротких расстояниях. В разделе 5 мы рассматриваем экспериментальное значение сверхтонкой энергетической поправки к спектру для состояния 1S и выводим верхний предел энергетической НК-поправки. Это позволяет нам оценить максимальное значение параметра θ , который присутствует в коммутационном соотношении. Затем мы определяем максимальное значение энергетической НК-поправки для уровней 1S и 2S чармония и боттомония. Наконец, раздел 6 содержит выводы.

2. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

НК-алгебра определяется в терминах операторов $\hat{x}^i$, $i = 1, \dots, n$, координат пространства-времени, которые удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$[\hat{x}^i, \hat{x}^j] = i\hbar\theta\hat{\omega}^{ij}(\hat{x}), \quad (1)$$

где $\hat{\omega}^{ij}(\hat{x})$ – антисимметричный тензорный оператор, описывающий некоммутативность пространства-времени, и θ – параметр некоммутативности. Величина $\hbar\theta\hat{\omega}^{ij}(\hat{x})$ как постоянный параметр некоммутативности является действительной и имеет размерность площади. Кроме того, можно построить новую теорию поля в НК-пространстве-времени, если заменить стандартное произведение полей на звездочное [13]:

$$(f * g)(x) = f(\hat{x})g(x) = fg + \frac{i\theta}{2} \partial_i f \omega^{ij} \partial_j g - \frac{\theta^2}{4} \left[\frac{1}{2} \omega^{ij} \omega^{kl} \partial_i \partial_k f \partial_j \partial_l g - \frac{1}{3} \omega^{ij} \partial_j \omega^{kl} (\partial_i \partial_k f \partial_l g - \partial_k f \partial_i \partial_l g) \right] + O(\theta^3), \quad (2)$$

где

$$\hat{x}^i = x^i + \frac{i\theta}{2} \omega^{ij} \partial_j + O(\theta^2). \quad (3)$$

Общепринятым является выбор $\hat{\omega}^{ij}(\hat{x}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, однако было доказано, что этот выбор нарушает вращательную симметрию кулоновского потенциала в водородоподобных моделях и снимает вырождение энергетических уровней [17], [18], что нежелательно. На самом деле эти особенности не должны иметь место, так как природа водородного атома определена экспериментально. Поэтому мы ищем альтернативный выбор: выбираем $\hat{\omega}^{ij}(\hat{x})$ так, чтобы это не нарушило вращательную

симметрию атома кваркония. Затем мы рассчитываем поправку, которая связана с некоммутативностью пространства-времени, для энергетических уровней тяжелого кваркония.

3. ПОТЕНЦИАЛ КОРНЕЛЛА В НК-ПРОСТРАНСТВЕ-ВРЕМЕНИ

Потенциал Корнелла часто выбирается в качестве потенциала взаимодействия между тяжелым кварком и антикварком в модели кваркония [8]. Потенциал Корнелла имеет вид

$$V(r) = -\frac{4}{3} \frac{\hbar c \alpha_s}{r} + kr, \quad (4)$$

где α_s – константа сильной связи и k – постоянная конфайнмента. Первый член в потенциале получается за счет одноглюонного пертурбативного обмена и преобладает во взаимодействиях на коротких расстояниях, в то время как второй член обеспечивает конфайнмент кварков. Для построения НК-потенциала Корнелла мы заменим расстояние r в соотношении (4) на оператор $\hat{r}$, который определяется как

$$\begin{aligned} \hat{r} &= \sqrt{\hat{x}^i \hat{x}_i} = \sqrt{r^2 + \left(\frac{i\theta}{2} x^i \omega_{ij} \partial^j - \frac{\theta^2}{4} \omega^{ij} \partial_j \omega_{ik} \partial^k + O(\theta^3) \right)} \approx \\ &\approx r + \frac{1}{r} \left(\frac{i\theta}{4} x^i \omega_{ij} \partial^j - \frac{\theta^2}{8} \omega^{ij} \partial_j \omega_{ik} \partial^k \right), \end{aligned} \quad (5)$$

при этом

$$\begin{aligned} \frac{1}{\hat{r}} &= \frac{1}{\sqrt{\hat{x}^i \hat{x}_i}} = \left[r^2 + \left(\frac{i\theta}{2} x^i \omega_{ij} \partial^j - \frac{\theta^2}{4} \omega^{ij} \partial_j \omega_{ik} \partial^k + O(\theta^3) \right) \right]^{-1/2} \approx \\ &\approx \frac{1}{r} + \frac{1}{r^3} \left(-\frac{i\theta}{4} x^i \omega_{ij} \partial^j + \frac{\theta^2}{8} \omega^{ij} \partial_j \omega_{ik} \partial^k \right), \end{aligned} \quad (6)$$

где мы использовали равенство (3), чтобы заменить $\hat{x}^i$ подходящим выражением. Теперь НК-потенциал Корнелла $V_{\text{NC}}(\hat{r})$ записывается следующим образом:

$$V_{\text{NC}}(\hat{r}) = -\frac{4}{3} \frac{\hbar c \alpha_s}{\hat{r}} + k\hat{r}. \quad (7)$$

Из формул (5)–(7), очевидно, следует, что на коротких расстояниях линейное слагаемое $k\hat{r}$ пренебрежимо мало по сравнению с кулоноподобным членом, и мы можем записать НК-потенциал на коротких расстояниях как

$$V_{\text{NC}}(\hat{r}) \approx -\frac{4}{3} \frac{\hbar c \alpha_s}{\hat{r}} = V(r) + \Delta V_{\text{NC}}, \quad (8)$$

где $V(r) = -(4/3)\hbar c \alpha_s / r$, что подобно кулоновскому потенциалу в атоме водорода, и ΔV_{NC} – поправочный член, связанный с НК-геометрией пространства-времени.

4. ЭНЕРГЕТИЧЕСКАЯ ПОПРАВКА ДЛЯ НК-ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ

Теперь мы можем использовать обычную теорию возмущений для вычисления главной поправки к уровням энергии:

$$\Delta E_{\text{NC}} = \langle \psi^0 | \Delta V_{\text{NC}} | \psi^0 \rangle, \quad (9)$$

где ψ^0 – невозмущенная волновая функция атома водорода, $|\psi^0\rangle = R_{nl}(r)Y_l^m(\theta, \phi)$, но радиус Бора a_0 должен быть заменен на радиус кваркония a'_0 , который определяется как

$$a'_0 = \frac{\hbar}{\mu_q c \alpha_s}, \quad (10)$$

где μ_q – приведенная масса покоя в тяжелом кварконии $c\bar{c}$ или $b\bar{b}$ (т.е. $m_c/2$ или $m_b/2$) и α_s – соответствующая константа сильной связи.

Теперь последний шаг для получения общей формы энергетической НК-поправки сводится к определению вида параметра некоммутативности $\hat{\omega}^{ij}(\hat{x})$. Как уже упоминалось, общепринятый вид $\hat{\omega}^{ij}(\hat{x}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ нарушает вращательную симметрию НК-потенциала в (8), так как $[L_i, V_{\text{NC}}(\hat{r})] \neq 0$, где $L_i = -i\hbar\epsilon^{ijk}x_j\partial_k$ – оператор момента импульса. Однако можно выбрать $\hat{\omega}^{ij}(\hat{x})$ так, чтобы сохранить вращательную симметрию системы. Один из подходящих выборов [18] таков:

$$\hat{\omega}^{ij} = \epsilon^{ijk}x_k f(r), \quad (11)$$

где $f(r)$ – вспомогательная функция. При этом соответствующая НК-алгебра записывается как

$$[\hat{x}^i, \hat{x}^j] = i\hbar\epsilon^{ijk}\hat{x}_k f(\hat{r}). \quad (12)$$

Если подставить выражение (11) в формулу (6), то слагаемое $1/\hat{r}$ в потенциале принимает вид

$$\frac{1}{\hat{r}} \approx \frac{1}{r} + \frac{1}{r^3} \left(-\frac{i\theta}{4\hbar} x_i \epsilon^{ijk} x_k f(r) \partial_j + \frac{\theta^2 L^2 f^2(r)}{8\hbar^2} \right). \quad (13)$$

Очевидно, член $x_i \epsilon^{ijk} x_k \partial_j$ в этом соотношении равен нулю ($A \cdot (A \times B) = 0$), и мы получаем

$$\frac{1}{\hat{r}} \approx \frac{1}{r} + \frac{1}{r^3} \left(\frac{\theta^2 L^2 f^2(r)}{8\hbar^2} \right). \quad (14)$$

Отсюда следует, что сохранение вращательной симметрии теперь обеспечено:

$$[L_i, V_{\text{NC}}(\hat{r})] = 0. \quad (15)$$

Итак, для потенциала Корнелла на коротких расстояниях ведущий порядок теории возмущений, требующихся в НК-теории, имеет вид

$$\Delta V_{\text{NC}} = -\frac{\hbar c \alpha_s}{r^3} \left(\frac{\theta^2 L^2 f^2(r)}{6\hbar^2} \right). \quad (16)$$

Подходящим выбором является $f(r) = 1/r$. Это дает параметр θ , имеющий размерность площади, который соотносится с НК-теорией. При таком выборе мы имеем

$$\Delta V_{\text{NC}} = -\frac{c \alpha_s \theta^2 L^2}{6\hbar r^5}. \quad (17)$$

Теперь из формулы (9) получается поправка к энергетическим уровням, соответствующая НК-геометрии пространства-времени:

$$\Delta E_{\text{NC}} = -\frac{\hbar c \alpha_s \theta^2 l(l+1)}{6} \left\langle \frac{1}{r^5} \right\rangle, \quad (18)$$

где l – азимутальное квантовое число.

Используя волновую функцию атома водорода $|\psi^0\rangle = R_{nl}(r)Y_l^m(\theta, \phi)$, мы получаем среднее значение для $1/r^5$:

$$\left\langle \frac{1}{r^5} \right\rangle = \frac{1}{(a'_0)^5 n^5} \frac{1}{l(l+1/2)(l+1)(l+3/2)(l+2)(l-1)(l-1/2)} \times \\ \times \left(\frac{5}{6}(3n^2 - l(l+1)) - \left(l + \frac{3}{2} \right) \left(l - \frac{1}{2} \right) \right). \quad (19)$$

Таким образом, общий вид поправочного члена для энергетических уровней записывается как

$$\Delta E_{\text{NC}} = -\frac{\alpha_s \theta^2}{6(a'_0)^5 n^5} \frac{1}{(l+1/2)(l+3/2)(l+2)(l-1)(l-1/2)} \times \\ \times \left(\frac{5}{6}(3n^2 - l(l+1)) - \left(l + \frac{3}{2} \right) \left(l - \frac{1}{2} \right) \right). \quad (20)$$

Следует заметить, что величина ΔE_{NC} расходится при $l = 1$ вследствие сингулярности $\langle 1/r^5 \rangle$. На самом деле в работе [19] было показано, что в НК-квантовой электродинамике разложение по параметру θ , которое используется для оценки поправки к энергетическим уровням в модели кваркония, не является перенормируемым. С другой стороны, заметим, что состояние $l = 1$ не используется в наших расчетах. Для малых расстояний, которые описывают уровни 1S и 2S, мы не столкнулись ни с какими сингулярностями. Один из способов преодолеть трудности, возникающие для состояния $l = 1$, состоит в рассмотрении потенциала конфайнмента kr .

5. СВЕРХТОНКАЯ ПОПРАВКА

НК-поправка к энергии тяжелого кваркония, полученная в соотношении (20), является функцией параметра некоммутиативности θ . Величину этого параметра нельзя получить из экспериментальных данных, поэтому мы принимаем во внимание сверхтонкие измерения, т.е. поправку к наинизшему энергетическому уровню для модели кваркония, в качестве верхнего предела энергетической НК-поправки и получаем максимально возможное значение θ . Можно ожидать, что некоммутиативность пространства-времени проявится в очень небольших смещениях в пространстве-времени с очень высокой плотностью энергии. Таким образом, подходящим кандидатом может быть изучение переходов боттомония. Согласно данным из работы [20] среднее значение сверхтонкого расщепления основного состояния боттомония $\eta_b(1S)$ имеет вид

$$\Delta M_{\text{hf}}(1S)_{b\bar{b}} = M(\Upsilon(1S)) - M(\eta_b(1S)) = 64.1 \pm 2.0 \text{ МэВ}/c^2. \quad (21)$$

Используя этот верхний предел, подставляя выражение (10) в формулу (20) и полагая $n = 1$, $l = 0$, мы получаем

$$\Delta E_{\text{NC}} \leq \Delta M_{\text{hf}}(1S)_{b\bar{b}}, \quad \frac{13\alpha_s^6 m_c^5 c^6}{16\hbar^4} \theta^2 \leq 64.1 \text{ МэВ}. \quad (22)$$

Для $m_c = 1.55 \text{ ГэВ}/c^2$ и $\alpha_s = 0.416$ [13] мы имеем

$$\theta \leq 37.94 \cdot 10^{-34} \text{ м}^2, \quad (23)$$

что соответствует расстоянию $\sqrt{\theta} \leq 0.61 \cdot 10^{-16} \text{ м}$.

Используя полученное значение θ , мы можем найти максимальную поправку для уровня 2S в боттомонии, связанную с некоммутативностью геометрии:

$$\Delta E_{\text{NC}}(2S) \leq 3.6 \text{ МэВ}, \quad (24)$$

где экспериментальный результат для сверхтонкого расщепления имеет вид

$$\Delta M_{\text{hf}}(2S)_{b\bar{b}} = M(\Upsilon(2S)) - M(\eta_b(2S)) = 48.7 \pm 2.7 \text{ МэВ}/c^2. \quad (25)$$

Поправочные слагаемые, связанные с некоммутативностью, для уровней 1S и 2S чармония и боттомония приведены в табл. 1.

Таблица 1. Некоммутативные поправочные данные к энергии для уровней 1S и 2S систем тяжелых кваркониив.

	Экспериментальная энергия сверхтонкого расщепления	Некоммутативная энергетическая поправка
$\eta_c(1S)$	$\Delta M_{\text{hf}}(1S)_{c\bar{c}} = M(J/\psi(1S)) - M(\eta_c(1S)) =$ $= 116.6 \pm 1.2 \text{ МэВ}/c^2$	$\Delta E_{\text{NC}}(1S) \leq 195 \text{ кэВ}$
$\eta_c(2S)$	$\Delta M_{\text{hf}}(2S)_{c\bar{c}} = M(\psi(2S)) - M(\eta_c(2S)) =$ $= 49 \pm 4 \text{ МэВ}/c^2$	$\Delta E_{\text{NC}}(2S) \leq 11 \text{ кэВ}$
$\eta_b(1S)$	$\Delta M_{\text{hf}}(1S)_{b\bar{b}} = M(\Upsilon(1S)) - M(\eta_b(1S)) =$ $= 64.1 \pm 2.0 \text{ МэВ}/c^2$	$\Delta E_{\text{NC}}(2S) \leq 64.1 \text{ МэВ}$
$\eta_b(2S)$	$\Delta M_{\text{hf}}(2S)_{b\bar{b}} = M(\Upsilon(2S)) - M(\eta_b(2S)) =$ $= 48.7 \pm 2.7 \text{ МэВ}/c^2$	$\Delta E_{\text{NC}}(2S) \leq 3.6 \text{ МэВ}$

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы изучили влияние некоммутативности пространства-времени на энергетические уровни нерелятивистских тяжелых кваркониив $c\bar{c}$ и $b\bar{b}$. Хотя мы рассмотрели только потенциал кулоновского типа, в НК-геометрии мы получили поправку для этого потенциала, которая описывает эффект конфайнмента в системе кваркониив. Так как точное значение параметра некоммутативности θ неизвестно, мы взяли верхний предел этого значения. Сверхтонкое расщепление основного состояния боттомония, которое происходит в очень малой области пространства-времени, может быть хорошим приближением для поправки к верхнему энергетическому уровню, вызванной некоммутативностью пространства-времени. Мы использовали этот верхний предел и оценили максимальное значение параметра некоммутативности: $\theta \leq 37.94 \cdot 10^{-34} \text{ м}$. Используя это значение для θ , мы оценили максимальную поправку к энергии состояний 1S и 2S систем тяжелых кваркониив $c\bar{c}$ и $b\bar{b}$. Так как атом чармония легче, чем атом боттомония, энергетическая поправка меньше для атома $c\bar{c}$, чем для атома $b\bar{b}$.

Применение НК-геометрии для внесения поправок в вершину фотон–кварк в глуконном неупругом рассеянии лептона на нуклонах нам представляется весьма плодотворным, о чем мы надеемся написать в ближайшем будущем. С другой стороны,

так как уравнение Шредингера с потенциалом Корнелла может рассматриваться как частный случай биконфлюэнтного уравнения Гойна [21]–[25], было бы интересно в дальнейшем провести изучение этого потенциала в НК-геометрии, используя дифференциальное уравнение Гойна, которое ведет себя более гладко, имея меньше особенностей.

Список литературы

- [1] E. Eichten, K. Gottfried, T. Kinoshita, K. D. Lane, T. M. Yan, *Phys. Rev. D*, **17**:11 (1978), 3090–3117.
- [2] E. Eichten, K. Gottfried, T. Kinoshita, K. D. Lane, T. M. Yan, *Phys. Rev. D*, **21**:1 (1980), 203–233.
- [3] J. J. Aubert, U. Becker, P. J. Biggs et al., *Phys. Rev. Lett.*, **33**:23 (1974), 1404–1406.
- [4] J.-E. Augustin, A. M. Boyarski, M. Breidenbach et al., *Phys. Rev. Lett.*, **33**:23 (1974), 1406–1408.
- [5] C. Bacci, R. B. Celio, M. Berna-Rodini et al., *Phys. Rev. Lett.*, **33**:23 (1974), 1408–1410.
- [6] G. S. Abrams, D. Briggs, W. Chinowsky et al., *Phys. Rev. Lett.*, **33**:24 (1974), 1453–1455.
- [7] N. Rambilla, M. Krämer, R. Mussa et al., *Heavy quarkonium physics*, CERN Yellow Report, CERN, Geneva, 2005, arXiv: hep-ph/0412158.
- [8] E. Eichten, K. Gottfried, T. Kinoshita, J. Kogut, K. D. Lane, T.-M. Yan, *Phys. Rev. Lett.*, **34**:6 (1975), 369–372.
- [9] H. J. Schnitzer, *Phys. Rev. Lett.*, **35**:22 (1975), 1540–1543.
- [10] S. N. Gupta, S. F. Radford, W. W. Repko, *Phys. Rev. D*, **26**:11 (1982), 3305–3308.
- [11] S. N. Gupta, S. F. Radford, W. W. Repko, *Phys. Rev. D*, **31**:1 (1985), 160–163.
- [12] S. N. Gupta, S. F. Radford, W. W. Repko, *Phys. Rev. D*, **34**:1 (1986), 201–206.
- [13] S. F. Radford, W. W. Repko, *Phys. Rev. D*, **75**:7 (2007), 074031.
- [14] S. F. Radford, W. W. Repko, *Nucl. Phys. A*, **865**:1 (2011), 69–75.
- [15] T. J. Burns, *Phys. Rev. D*, **87**:3 (2013), 034022, 8 pp.
- [16] D. V. Vassilevich, A. Yurov, *Phys. Rev. D*, **69**:10 (2004), 105006, 5 pp.
- [17] M. Chaichian, M. M. Sheikh-Jabbari, A. Tureanu, *Phys. Rev. Lett.*, **86**:13 (2001), 2716–2719.
- [18] V. G. Kupriyanov, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **46**:24 (2013), 245303, 7 pp., arXiv: 1209.6105.
- [19] R. Wulkenhaar, *JHEP*, **03** (2002), 024, 35 pp., arXiv: hep-th/0112248.
- [20] J. Beringer, J.-F. Arguin, R. M. Barnett et al. [Particle Data Group], *Phys. Rev. D*, **86**:1 (2012), 010001, 1528 pp.
- [21] С. Славянов, В. Лай, *Специальные функции: единая теория, основанная на анализе особенностей*, Невский Диалект, СПб., 2002.
- [22] С. Ю. Славянов, *ТМФ*, **119**:1 (1999), 3–19.
- [23] M. Hortacsu, “Heun functions and their uses in physics”, *Proceedings of the 13th Regional Conference on Mathematical Physics* (Antalya, Turkey, October 27–31, 2010), eds. U. Camci, I. Semiz, World Sci., Singapore, 2013, 23–39, arXiv: 1101.0471.
- [24] В. Лай, *ТМФ*, **101**:3 (1994), 360–368.
- [25] С. Ю. Славянов, *ТМФ*, **182**:2 (2015), 223–230.

Поступила в редакцию 11.02.2015,
после доработки 25.03.2015